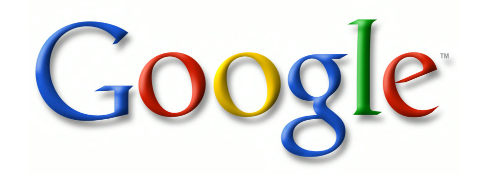
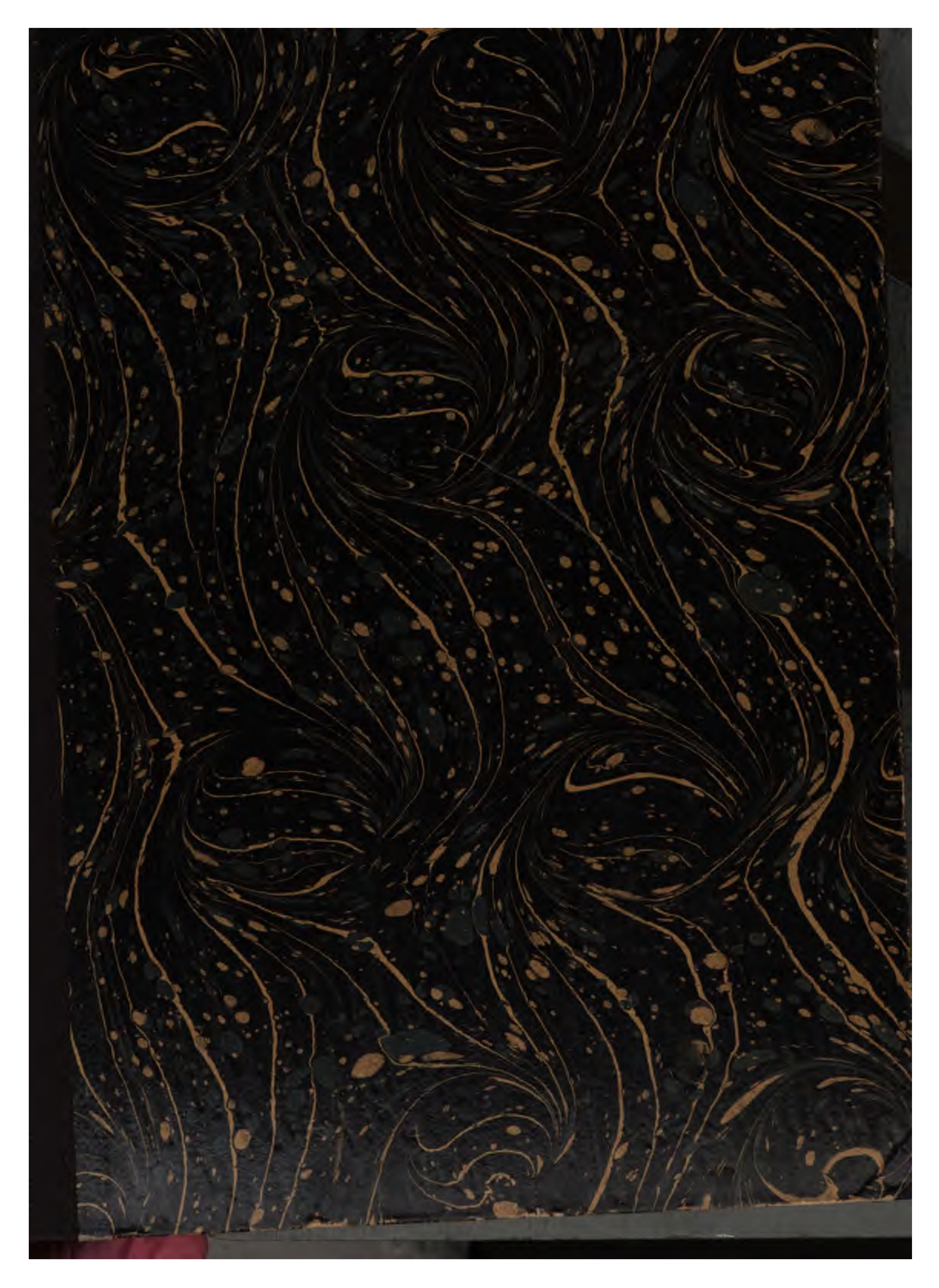




Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Herausgegeben

von

L. Kronecker und **K. Weierstrass.**

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preussischer Behörden.

Fortsetzung des von

A. L. Crelle (1826 bis 1856) und **C. W. Borchardt** (1856 bis 1880)

herausgegebenen Journals.

Sechsundneunzigster Band.

In vier Heften.

Mit zwei Figurentafeln.

Berlin, 1884.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

Inhaltsverzeichniss des sechsundneunzigsten Bandes.

Beiträge zu der Kenntniss der *Bernouilli*schen Zahlen.

(Von Herrn *R. Lipschitz* in Bonn.)

Die Eigenschaft des mit der m^{ten} *Bernouilli*schen Zahl B_m gebildeten Products $2^{2m-1}(2^{2m}-1)B_m$, gleich einem ganzen Vielfachen von m zu sein, welche in dem Aufsatze des Herrn *Stern* „Zur Theorie der *Bernouilli*schen Zahlen", Bd. 88, S. 85 d. J., ferner in Herrn *Worpitzkys* „Studien über die *Bernouilli*schen und *Euler*schen Zahlen", Bd. 94, S. 203 d. J., enthalten, und auch in der Mittheilung des Herrn *Kronecker*, Bd. 94, S. 268 d. J., durch verschiedene einfache Betrachtungen bewiesen ist, veranlasste mich zu untersuchen, ob eine ähnliche Beziehung zwischen der m^{ten} *Bernouilli*schen Zahl und den $2m^{\text{ten}}$ Potenzen von anderen Zahlen als der Zwei vorhanden sei. Hierbei erhielt ich die beiden im Folgenden zu begründenden Sätze, dass für jede Zahl a das Product $a^{2m}(a^{2m}-1)B_m$, und für jedes Paar von relativen Primzahlen a und b das Product $(a^{2m}-1)(b^{2m}-1)B_m$ gleich einem ganzen Vielfachen der Zahl $2m$ ist.

Indem ich mich ferner mit den von *v. Staudt* und Herrn *Clausen* herrührenden Darstellungen der *Bernouilli*schen Zahlen und mit der von Herrn *Hermite* Bd. 81, S. 93 d. J. veröffentlichten Arbeit über die in jenen Darstellungen vorkommenden ganzzahligen Bestandtheile beschäftigte, glaube ich den Schlüssel zu verschiedenen hierher gehörigen Erscheinungen in einer analytischen Function gefunden zu haben, welche, so viel ich weiss, noch nicht untersucht worden ist. Diese Function wird für ein complexes Argument u, dessen Betrag die Einheit übertrifft, durch die über alle ungeraden Primzahlen p auszudehnende convergente Summe

$$\Sigma_p \frac{1}{p(u^p-u)}$$

ausgedrückt. Indem man zu der Differenz von zwei solchen Functionen, deren Argumente von u um ganze Zahlen differiren, eine gewisse einfach

gebildete rationale Function von u hinzuaddirt, entsteht eine Verbindung, welche sich in eine semiconvergente Reihe entwickeln lässt, bei der die erwähnten ganzzahligen Bestandtheile der *Bernouilli*schen Zahlen als Coefficienten auftreten. Auf diese Weise kann die obige mit Hülfe der sämmtlichen ungeraden Primzahlen gebildete Function von u zur Definition der ganzzahligen Bestandtheile der *Bernouilli*schen Zahlen dienen. Umgekehrt wird aber auch durch die betreffende mit den ganzzahligen Bestandtheilen der *Bernouilli*schen Zahlen gebildete semiconvergente Reihe die so eben bezeichnete Function von u vollständig bestimmt. Zwischen der Reihe der Primzahlen und der Reihe der ganzzahligen Bestandtheile der *Bernouilli*schen Zahlen findet nämlich die merkwürdige Beziehung statt, dass, wenn die ganzzahligen Bestandtheile der n ersten *Bernouilli*schen Zahlen gegeben sind, ein System von n Gleichungen ersten Grades existirt, durch dessen Auflösung für jede der n ersten auf die Einheit folgenden ungeraden Zahlen die Frage beantwortet wird, ob sie eine Primzahl oder eine zusammengesetzte Zahl sei.

1.

In der mit einer veränderlichen Grösse y gebildeten bekannten Gleichung

$$(1.)\quad \frac{1}{2}\frac{e^y+1}{e^y-1} = \frac{1}{y}+\frac{B_1}{2!}y-\frac{B_2}{4!}y^3\pm\cdots$$

werde statt y der Quotient $\frac{y}{a}$ substituirt, wo a eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet. Dann ergiebt sich durch Subtraction der mit $\frac{1}{a}$ multiplicirten neuen Gleichung die Relation

$$(2.)\quad \frac{1}{2}\left(\frac{e^y+1}{e^y-1}-\frac{1}{a}\frac{e^{\frac{y}{a}}+1}{e^{\frac{y}{a}}-1}\right) = \left(1-\frac{1}{a^2}\right)\frac{B_1}{2!}y-\left(1-\frac{1}{a^4}\right)\frac{B_2}{4!}y^3\pm\cdots$$

und, indem mit zwei positiven ganzen Zahlen a und b operirt wird, die ich sogleich als relative Primzahlen voraussetze, die zweite Relation

$$(2^a.)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{e^y+1}{e^y-1}-\frac{1}{a}\frac{e^{\frac{y}{a}}+1}{e^{\frac{y}{a}}-1}-\frac{1}{b}\frac{e^{\frac{y}{b}}+1}{e^{\frac{y}{b}}-1}+\frac{1}{ab}\frac{e^{\frac{y}{ab}}+1}{e^{\frac{y}{ab}}-1}\right) \\ = \left(1-\frac{1}{a^2}\right)\left(1-\frac{1}{b^2}\right)\frac{B_1}{2!}y-\left(1-\frac{1}{a^4}\right)\left(1-\frac{1}{b^4}\right)\frac{B_2}{4!}y^3\pm\cdots \end{cases}$$

Jetzt werde statt y in (2.) der Ausdruck az, in (2^a.) der Ausdruck abz sub-

stituirt, hierauf (2.) mit a, (2^a.) mit ab multiplicirt; dann folgen nach einer leichten Umformung der linken Seiten die Gleichungen

$$(3.)\qquad \frac{d\log\left(\frac{e^{az}-1}{e^z-1}\right)}{dz}-\frac{a-1}{2} = (a^2-1)\frac{B_1}{2!}z-(a^4-1)\frac{B_2}{4!}z^3\pm\cdots,$$

$$(4.)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\log\left(\frac{(e^{abz}-1)(e^z-1)}{(e^{az}-1)(e^{bz}-1)}\right)}{dz}-\frac{(a-1)(b-1)}{2}\\ &= (a^2-1)(b^2-1)\frac{B_1}{2!}z-(a^4-1)(b^4-1)\frac{B_2}{4!}z^3\pm\cdots.\end{aligned}\right.$$

Hier ist $\frac{e^{az}-1}{e^z-1}$ gleich einer ganzen Function $(a-1)^{\text{ten}}$ Grades von e^z, die für $z = 0$ den Werth a annimmt, ferner, da a und b relative Primzahlen sind, $\frac{(e^{abz}-1)(e^z-1)}{(e^{az}-1)(e^{bz}-1)}$ gleich einer ganzen Function des $(ab-a-b+1)^{\text{ten}}$ Grades von e^z, die für $z = 0$ gleich der Einheit wird. Wenn man daher von den Ausdrücken der linken Seite von (3.) und (4.) den $(2m-1)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten nach z nimmt und hierauf $z = 0$ setzt, so erhält man nach der von Herrn *Kronecker* in dem angeführten Aufsatze gebrauchten Schlussweise in (3.) einen Quotienten, dessen Zähler eine ganze Zahl $G_{2m-1}(a)$ und dessen Nenner die Potenz a^{2m} ist, dagegen in (4.) eine ganze Zahl $G_{2m-1}(a, b)$. Hieraus folgen durch Gleichsetzen des Factors von z^{2m-1} in den Entwickelungen der beiden Seiten von (3.) und (4.) respective die beiden Gleichungen

$$(5.)\qquad \frac{G_{2m-1}(a)}{(2m-1)!\,a^{2m}} = (-1)^{m-1}(a^{2m}-1)\frac{B_m}{(2m)!},$$

$$(6.)\qquad \frac{G_{2m-1}(a,b)}{(2m-1)!} = (-1)^m(a^{2m-1}-1)(b^{2m}-1)\frac{B_m}{(2m)!}.$$

Nach Weglassung des gemeinsamen Factors $(2m-1)!$ zeigt die erste Gleichung, dass das Product $a^{2m}(a^{2m}-1)B_m$, und die zweite, dass das Product $(a^{2m}-1)(b^{2m}-1)B_m$ gleich einer durch $2m$ theilbaren ganzen Zahl ist, wie behauptet worden war.

Aus dem ersten dieser beiden Sätze lässt sich eine bemerkenswerthe Eigenschaft der Zähler der *Bernoulli*schen Zahlen ableiten, die *v. Staudt* in der Universitätsschrift: *De numeris Bernouillianis commentatio altera*, Erlangen, 1845, art. 8 bekannt gemacht und bewiesen hat. Für die m^{te} *Bernoulli*sche Zahl besteht die im Eingange erwähnte Darstellung

$$(7.)\qquad (-1)^m B_m = A_m+\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\cdots+\frac{1}{\lambda},$$

wo A_m eine ganze Zahl ist und $\alpha, \beta, \dots \lambda$ die sämmtlichen Primzahlen sind, für welche $2m$ durch $\alpha-1, \beta-1, \dots \lambda-1$ aufgeht. Es möge $2m$, in seine verschiedenen Primfactoren zerlegt, den Ausdruck

$$(8.)\quad 2m = 2^\varrho q^\sigma q'^{\sigma'} \dots r^\tau r'^{\tau'} \dots$$

liefern, und zwar seien $q, q', \dots$ die ungeraden Primzahlen, für welche $2m$ durch $q-1, q'-1, \dots$ aufgeht, dagegen $r, r', \dots$ die übrigen, für welche diese Bedingung nicht erfüllt ist. Wenn nun g eine nach Disqu. ar. art. 89 stets vorhandene zu dem Modul r^τ gehörige primitive Wurzel bedeutet, so darf man aus der Thatsache, dass der Ausdruck $\frac{g^{2m}(g^{2m}-1)B_m}{2m}$ gleich einer ganzen Zahl ist, schliessen, dass die in $2m$ enthaltene Primzahlpotenz r^τ, welche weder in den Factor g^{2m}, noch, da nach der Voraussetzung der Exponent $2m$ nicht durch $r-1$ theilbar ist, in den Factor $g^{2m}-1$ aufgehen kann, nothwendig in den Zähler der auf ihre kleinste Benennung gebrachten Zahl B_m aufgeht. Für die übrigen Primzahlpotenzen $r'^{\tau'}, \dots$ gilt dasselbe, mithin muss der Zähler von B_m durch das Product $r^\tau r'^{\tau'} \dots$ theilbar sein, und darin besteht der erwähnte *v. Staudt*sche Satz. Hiernach vertheilen sich die Factoren von $2m$ in der Weise, dass die Primzahlen $2, q, q', \dots$ in dem Nenner, die Primzahlpotenzen $r^\tau, r'^{\tau'}, \dots$ in dem Zähler von B_m als Factoren auftreten, wie auch Herr *Sylvester* in einem an Herrn *Serret* gerichteten Briefe (C. R. de l'ac. de Paris, t. 61, p. 307, année 1861) bemerkt hat.

2.

Der Zusammenhang zwischen den *Bernoulli*schen Zahlen und der im Eingange vermittelst der sämmtlichen ungeraden Primzahlen definirten Function beruht auf der Betrachtung von semiconvergenten Reihen, die ich in der Abhandlung „Ueber die Darstellung gewisser Functionen durch die *Euler*sche Summenformel", Bd. 56, S. 11 dieses Journals, untersucht habe. Die zu dem gegenwärtigen Zweck geeignete Relation kann durch zweifache Anwendung der dortigen Gleichung (29.) in § 2 erhalten werden. Doch werde ich dieselbe, um das zu Grunde liegende Princip deutlicher hervortreten zu lassen, unmittelbar ableiten.

Für eine complexe Grösse u, deren reeller Theil positiv ist, und eine positive Grösse s möge der Ausdruck

$$(9.)\quad \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{u^s} + \frac{1}{(u+1)^s}\right) + \frac{1}{-s+1}\left(\frac{1}{u^{-s+1}} - \frac{1}{(u+1)^{-s+1}}\right)$$

durch bestimmte Integrale ausgedrückt werden. Man hat mit Hülfe des *Euler*schen Integrals $\Gamma(s)$ die Gleichung

$$(10.)\quad \frac{1}{u^s} = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty e^{-uy} y^{s-1} dy,$$

und die fernere

$$(11.)\quad \frac{1}{-s+1}\left(\frac{1}{u^{-s+1}} - \frac{1}{(u+1)^{-s+1}}\right) = \frac{-1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty (e^{-uy} - e^{-(u+1)y}) y^{s-2} dy.$$

In dem Falle, dass die Grösse s der Einheit genähert wird, verwandelt sich der Ausdruck der linken Seite von (11.) in die Differenz der natürlichen Logarithmen

$$(11^*.)\quad \log u - \log(u+1),$$

bei denen der Werth des imaginären Theils zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ zu nehmen ist. Durch Addition der betreffenden bestimmten Integrale ergiebt sich die Darstellung

$$(12.)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u^s} + \frac{1}{(u+1)^s}\right) + \frac{1}{-s+1}\left(\frac{1}{u^{-s+1}} - \frac{1}{(u+1)^{-s+1}}\right) \\ = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \left(\frac{1}{2}\frac{1+e^{-y}}{1-e^{-y}} - \frac{1}{y}\right)(e^{-uy} - e^{-(u+1)y}) y^{s-1} dy. \end{cases}$$

Die unter dem Integralzeichen in der ersten Klammer befindliche Function, welche in (1.) in eine unendliche Reihe entwickelt ist, die nur so lange convergirt, als der Betrag von y unter 2π bleibt, erlaubt für jedes reelle y die folgende begrenzte Entwickelung

$$(13.)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{1+e^{-y}}{1-e^{-y}} - \frac{1}{y} = \frac{B_1}{2!}y - \frac{B_2}{4!}y^3 \pm \cdots + (-1)^{m-1}\frac{B_m}{(2m)!}y^{2m-1} \\ \qquad + (-1)^m \frac{2}{(2\pi)^{2m+2}} \sum_{t=1}^{t=\infty} \frac{y^{2m+1}}{t^{2m}\left(t^2 + \frac{y^2}{4\pi^2}\right)}. \end{cases}$$

Hiernach entsteht für den einen Theil des in (12.) vorhandenen Integrals die Darstellung, in welcher u_1 den nach der Annahme positiven reellen Theil von u bedeutet, ε und ε' aber positive oder negative echte Brüche sind,

$$(14.)\quad \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \left(\frac{1}{2}\frac{1+e^{-y}}{1-e^{-y}} - \frac{1}{y}\right) e^{-uy} dy \\ = \frac{B_1 s}{2!}\frac{1}{u^{s+1}} - \frac{B_2 s(s+1)(s+2)}{4!}\frac{1}{u^{s+3}} \pm \cdots + (-1)^{m-1}\frac{B_m s(s+1)\ldots(s+2m-2)}{(2m)!}\frac{1}{u^{s+2m-1}} \\ \qquad + B_{m+1}\frac{s(s+1)\ldots(s+2m)}{(2m+2)!}\cdot\frac{\varepsilon+\varepsilon' i}{u_1^{s+2m+1}}. \end{cases}$$

Der andere Theil des Integrals liefert eine ebenso gebildete Reihe, bei der statt u die Verbindung $u+1$ zu substituiren ist, und statt ε und ε' zwei andere echte Brüche η und η' auftreten. Für den vorliegenden Zweck ist die Grösse s gleich Zwei zu nehmen; dann folgt aus (12.) die Gleichung

$$(15.)\quad \left\{\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{(u+1)^2}\right)-\frac{1}{u}+\frac{1}{u-1} \\ &= \frac{B_1}{u^3}-\frac{B_2}{u^5}\pm\cdots+(-1)^{m-1}\frac{B_m}{u^{2m+1}}+\frac{B_{m+1}(\varepsilon+\varepsilon' i)}{u_1^{2m+3}} \\ &-\frac{B_1}{(u+1)^3}+\frac{B_2}{(u+1)^5}\mp\cdots-(-1)^{m-1}\frac{B_m}{(u+1)^{2m+1}}-\frac{B_{m+1}(\eta+\eta' i)}{(u_1+1)^{2m+3}}. \end{aligned}\right.$$

Bei der auf der rechten Seite befindlichen Reihe hat der mit B_{m+1} gebildete Restausdruck die Eigenschaft, für jeden festen Werth von m dadurch beliebig klein zu werden, dass man den reellen Theil u_1 der complexen Grösse u beliebig gross annimmt. In diesem Sinne wird sowohl der reelle wie der imaginäre Theil der linken Seite durch eine semiconvergente Reihe dargestellt.

Ich werde jetzt in (15.) die in (7.) angegebenen Ausdrücke der *Bernouilli*schen Zahlen substituiren, und die durch Abtrennen der Brüche entstehende Reihe

$$(16.)\quad \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{1}{u^3}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\frac{1}{u^5}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}\right)\frac{1}{u^7}+\cdots$$

betrachten. Da der Factor von $\frac{1}{u^{2m+1}}$ kleiner als die Summe der reciproken Werthe der natürlichen Zahlen von 2 bis $2m+1$ und daher auch kleiner als der Werth $\log(2m+1)$ ist, so hat diese Reihe die Eigenschaft, in unendlicher Ausdehnung genommen, für jede complexe Grösse u, deren Betrag über der Einheit liegt, zu convergiren, und auch bei der Ersetzung jedes Gliedes durch seinen Betrag convergent zu bleiben. Die aus den Beträgen der einzelnen Glieder gebildete Reihe ist ferner, wie leicht zu erkennen, so beschaffen, dass, wenn die m ersten Glieder fortgenommen werden, die beliebig weit ausgedehnte Summe der übrigen Glieder für einen hinreichend grossen Betrag von u numerisch kleiner bleibt als eine feste Grösse, dividirt durch die $(2m+3)^{\text{te}}$ Potenz des Betrages von u, also gewiss auch kleiner als diese feste Grösse dividirt durch die $(2m+3)^{\text{te}}$ Potenz des reellen Theiles von u. Der Factor $\frac{1}{2}$ kommt in allen Gliedern vor, so dass das Aggregat der in $\frac{1}{2}$ multiplicirten Glieder durch Summation der betreffenden geometrischen Reihe das Resultat $\frac{1}{2(u^2-u)}$ liefert. Ebenso

erscheint der mit einer bestimmten ungeraden Primzahl p gebildete Factor $\frac{1}{p}$ bei den Potenzen $\frac{1}{u^{2k+1}}$ für welche $2k$ gleich einem der auf einander folgenden Vielfachen von $p-1$ ist. Für jede ungerade Primzahl p ist daher wieder eine geometrische Reihe zu summiren und bringt den Ausdruck $\frac{1}{p(u^p-u)}$ hervor. Wenn daher die mit allen ungeraden Primzahlen p gebildete Summe als die Function

$$(17.)\qquad Z(u) = \Sigma_p \frac{1}{p(u^p-u)}$$

eingeführt wird, so erhält (16.) den Ausdruck

$$(16^*.)\qquad \frac{1}{2(u^3-u)}+Z(u),$$

und man kann der Gleichung (15.) die folgende Gestalt geben, bei der auf der linken Seite ein Aggregat von analytischen Functionen, auf der rechten Seite aber eine Differenz von zwei mit den ganzzahligen Coefficienten $A_1, A_2, \dots$ versehenen semiconvergenten Reihen auftritt, die auch als eine einzige semiconvergente Reihe betrachtet werden darf,

$$(18.)\qquad \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{(u+1)^2}\right)-\frac{1}{u}+\frac{1}{u+1}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u^3-u}-\frac{1}{(u+1)^3-(u+1)}\right)+Z(u)-Z(u+1) \\ \qquad = -\frac{A_1}{u^3}-\frac{A_2}{u^5}-\dots+\frac{A_1}{(u+1)^3}+\frac{A_2}{(u+1)^5}+\dots. \end{cases}$$

Die Gleichheit der beiden Seiten ist so zu verstehen, dass, wenn die Entwickelungen rechts mit m Gliedern abgebrochen werden, der hinzuzufügende Rest einen Betrag hat, der für einen hinreichend grossen reellen Theil u_1 von u kleiner ist als eine Constante dividirt durch die $(2m+3)^{\text{te}}$ Potenz von u_1; die Gründe hierfür sind im Vorhergehenden angegeben. Durch diese Gleichung werden die ganzen Zahlen $A_1, A_2, \dots$ vollständig definirt, und daher mit Zuziehung von (7.) auch die *Bernouilli*schen Zahlen.

3.

Nachdem die Gleichung (18.) aufgestellt ist, scheint es mir vor allem wünschenswerth, die Eigenschaften der in die linke Seite eingehenden Functionen aufzusuchen, welche zur Folge haben, dass die auf der rechten Seite befindlichen Entwickelungscoefficienten in der That ganze Zahlen sind. Hierbei werde ich Argumente voraussetzen, die von der Variable u um

beliebige ganze Zahlen abweichen, und Reihenentwickelungen betrachten die nach den negativen Potenzen von u fortschreiten.

Wenn man mit einer beliebigen ganzen Zahl a für die Function $Z(u)$ die Differenz $Z(u-a)-Z(u)$ bildet, so liefert eine nach den negativen Potenzen von u vorgenommene Entwickelung nur ganzzahlige Coefficienten und zwar rührt dies von der sogleich zu beweisenden Thatsache her, dass bei der in der angegebenen Weise ausgeführten Entwickelung der Differenz

$$(19.)\qquad \frac{1}{p((u-a)^p-(u-a))}-\frac{1}{p(u^p-u)},$$

in welcher p irgend eine ungerade Primzahl bedeutet, alle Coefficienten ganze Zahlen sind. In (19.) lässt sich der erste Bestandtheil in eine geometrische Reihe nach den negativen Potenzen von $(u-a)$, und jedes einzelne Glied derselben in eine nach den negativen Potenzen von u fortschreitende Reihe, ferner der zweite Bestandtheil unmittelbar in eine geometrische Reihe nach den negativen Potenzen von u entwickeln. Sucht man nun den Factor von $\frac{1}{u^m}$ auf, so ist leicht einzusehen, dass es bei den Beiträgen, welche jeder der beiden Bestandtheile liefert, auf den Rest ankommt, den die Zahl $m-1$ bei der Division durch $p-1$ ergiebt, und der durch die Gleichung

$$(20.)\qquad m-1 = \mu+\nu(p-1)$$

dargestellt werden möge. Der zweite Bestandtheil bringt nur dann einen Beitrag, und zwar gleich $\frac{-1}{p}$, wenn $\mu=0$ ist; sobald daher das Zeichen δ_μ die Einheit oder die Null bedeutet, je nachdem die Zahl μ gleich Null oder von Null verschieden ist, so ist dieser Beitrag gleich $\frac{-\delta_\mu}{p}$. Um den von dem ersten Bestandtheil herrührenden Beitrag darzustellen, werde für die auftretenden Binomialcoefficienten die Bezeichnung

$$(21.)\qquad \frac{k!}{(k-l)!\,l!} = (k)_l$$

angewendet. Dann ergiebt sich für den Factor von $\frac{1}{u^m}$ in der Entwickelung von (19.) der Ausdruck

$$(22.)\qquad \frac{1}{p}\left((m-1)_{p-1}a^{m-p}+(m-1)_{2p-2}a^{m-2p+1}+\cdots+(m-1)_{\nu(p-1)}a^{\mu}-\delta_\mu\right).$$

Eine andere Darstellung erhält man, indem auf die in (19.) vorkommenden Brüche die Zerlegung in Partialbrüche angewendet wird. Wo-

fern die $(p-1)$ Wurzeln der Gleichung $u^{p-1}-1 = 0$ successive mit $\omega_{p-1}^{(k)}$ bezeichnet werden, so ist

$$(23.)\quad \frac{1}{u^p-u} = \frac{1}{p-1}\Sigma_k\Big(\frac{1}{u-\omega_{p-1}^{(k)}}\Big)-\frac{1}{u}.$$

Demnach hat der Factor von $\frac{1}{u^m}$ in (19.) den zweiten Ausdruck

$$(24.)\quad \frac{1}{p}\Big(\Sigma_k\frac{(a+\omega_{p-1}^{(k)})^{m-1}}{p-1}-a^{m-1}-\delta_\mu\Big).$$

Setzt man in (23.) und (24.) gleichzeitig $m = 2n+2$ und $a = 1$, so muss δ_μ gleich Null sein, weil die ungerade Zahl $2n+1$ durch $p-1$ nicht aufgehen kann, und es verwandelt sich (22.) in den Ausdruck, den Herr *Hermite* in der angeführten Abhandlung S_p genannt hat, und (24.) in diejenige Darstellung desselben, aus der daselbst geschlossen wird, dass S_p eine ganze Zahl ist.

Auf ähnliche Weise lässt sich die Behauptung begründen, dass der Ausdruck (22.) stets eine ganze Zahl ist. Sobald μ nicht gleich Null ist, mithin δ_μ verschwindet, hat die in der Klammer von (22.) befindliche Summe den Factor a^μ. Wenn nun a nicht durch p aufgeht, so kann man den Factor a^μ abtrennen und bemerken, dass in dem Ausdruck

$$\frac{1}{p}\big((m-1)_{p-1}a^{(\nu-1)(p-1)}+(m-1)_{2p-2}a^{(\nu-2)(p-1)}+\cdots+(m-1)_{\nu(p-1)}\big)$$

die sämmtlichen Potenzen von a wegen des *Fermat*schen Satzes für den Modul p den Rest Eins liefern; der vorliegende Ausdruck ist daher deshalb gleich einer ganzen Zahl, weil der mit $a = 1$ gebildete Ausdruck gleich einer ganzen Zahl ist, wie Herr *Hermite* bewiesen hat. Sobald μ nicht gleich Null, a aber durch p theilbar ist, geht der Nenner p in den Factor a^μ auf. Es bleibt also nur noch der Fall zu erledigen, dass $\mu = 0$ und deshalb $\delta_\mu = 1$ ist. Alsdann wird in (22.) auch der Bestandtheil $(m-1)_{\nu(p-1)}a^\mu$ gleich der Einheit und hebt sich gegen $-\delta_\mu$ fort. Wofern jetzt a durch p theilbar ist, so sind in (22.) wieder alle Summanden durch p theilbar. Wenn aber a nicht durch p aufgeht, so kommt abermals der *Fermat*sche Satz zur Anwendung, und man hat nur nöthig zu beweisen, dass der Ausdruck (22.) für $a = 1$ gleich einer ganzen Zahl ist. Derselbe hat nach (24.), da jetzt $\delta_\mu = 1$ ist, die Gestalt

$$(25.)\quad \frac{1}{p}\Big(\Sigma_k\frac{(1+\omega_{p-1}^{(k)})^{m-1}}{p-1}-2\Big).$$

Indem man hier nach dem Vorgange des Herrn *Hermite* statt der $p-1$ Einheitswurzeln $\omega_{p-1}^{(k)}$ die Zahlen 1, 2, 3, ... $p-1$ als die Wurzeln der Congruenz $u^{p-1}-1\equiv 0 \pmod{p}$ substituirt und den Rest modulo p nimmt, so zeigt sich, dass die ganze Zahl $\Sigma_k(1+\omega_{p-1}^{(k)})^{m-1}$, da $m-1$ durch $p-1$ aufgeht, den Rest $p-2$, mithin die ganze Zahl

$$\Sigma_k \frac{(1+\omega_{p-1}^{(k)})^{m-1}}{p-1}$$

den Rest 2 liefert. Mithin ist (25.) gleich einer ganzen Zahl, und die aufgestellte Behauptung vollständig erwiesen.

Aus dem Vorstehenden folgt sofort, dass in der Entwickelung einer mit zwei beliebigen ganzen Zahlen a und b gebildeten Differenz

$$(26.)\qquad \frac{1}{p((u-a)^p-(u-a))}-\frac{1}{p((u-b)^p-(u-b))}$$

nach den negativen Potenzen von u ebenfalls die sämmtlichen Coefficienten ganze Zahlen sind, und dass deshalb auch für die Differenz der beiden entsprechenden Functionen $Z(u-a)-Z(u-b)$ das Gleiche stattfindet. Ein anderes Verhalten zeigt der auf der linken Seite von (18.) mit dem Factor $\frac{1}{2}$ auftretende Bruch $\frac{1}{2(u^3-u)}$. Setzt man hier $u-a$ für u, und zerlegt den Bruch in Partialbrüche, so kommt

$$(27.)\qquad \frac{1}{2((u-a)^3-(u-a))} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{u-a-1}+\frac{1}{u-a+1}-\frac{2}{u-a}\right).$$

Bei der nach den negativen Potenzen von u erfolgenden Entwickelung erhält dann der Factor von $\frac{1}{u^m}$ den Ausdruck

$$(28.)\qquad \frac{1}{4}((a+1)^{m-1}+(a-1)^{m-1}-2a^{m-1}),$$

wobei $m \gtreqless 3$ ist. Die in der Klammer dargestellte Zahl hat nach dem Modul 4 für ein gerades a den Rest $1+(-1)^{m-1}$, für ein ungerades a den Rest 2. Mithin liefert die Entwickelung der Differenz

$$(29.)\qquad \frac{1}{2((u-a)^3-(u-a))}-\frac{1}{2((u-b)^3-(u-b))}$$

dann und nur dann lauter ganzzahlige Coefficienten, wenn die ganzen Zahlen a und b gleichzeitig gerade oder gleichzeitig ungerade sind. Dem gegenüber stellt sich heraus, dass die Entwickelung des Ausdrucks

$$(30.)\qquad \frac{1}{2(u-a)^2}+\frac{1}{2(u-b)^2}$$

nach negativen Potenzen von u solche Coefficienten hervorbringt, dass die

Bildung der Differenz zwischen (29.) und (30.) immer zu ganzzahligen Coefficienten führt.

In Betreff der Function $Z(u)$ möchte ich noch hervorheben, dass die rationalen Functionen von u, aus denen dieselbe durch Addition zusammengesetzt wird, zusammen genommen, abgesehen von dem Werthe $u=0$, für alle diejenigen und nur für diejenigen Werthe von u unendlich werden, die gleich irgend einer Wurzel der Einheit sind. Denkt man sich eine Wurzel der Einheit in der Gestalt $e^{\frac{2\pi fi}{h}}$ gegeben, wo f und h relative Primzahlen sind, so kommt bei der nach dem Schema von (23.) ausgeführten Partialbruchzerlegung der Bruch $\frac{1}{u-e^{\frac{2\pi fi}{h}}}$ überall da vor, wo der Nenner h ein Theiler des mit einer Primzahl p gebildeten Ausdrucks $p-1$ ist, das heisst, bei allen in der arithmetischen Reihe $1+hd$ enthaltenen Primzahlen p. Bei jeder dieser Primzahlen erscheint der genannte Bruch mit dem Factor $\frac{1}{p(p-1)}$ versehen. Sobald diese sämmtlichen Factoren herausgehoben und addirt werden, ergiebt sich die mit den charakterisirten Primzahlen gebildete offenbar convergente Summe $\Sigma_p \frac{1}{p(p-1)}$. Die betreffenden Primzahlen sind aber diejenigen, welche nach der Abhandlung des Herrn *Kummer:* „Theorie der idealen Primfactoren der complexen Zahlen, welche aus den Wurzeln der Gleichung $\omega^n=1$ gebildet sind, wenn n eine zusammengesetzte Zahl ist" (Abhandlungen der Berliner Akademie v. J. 1856), in dem Gebiete der aus den Einheitswurzeln $e^{\frac{2\pi fi}{h}}$ gebildeten complexen Zahlen genau h ideale Primfactoren haben.

4.

Da der Betrag des Restes, welcher bei einem Abbrechen der auf der rechten Seite von (18.) befindlichen semiconvergenten Reihe nach m Gliedern hinzuzufügen ist, durch eine angemessene Vergrösserung des reellen Theils u_1 von u zu einer beliebig kleinen Grösse von der Ordnung $\frac{1}{u_1^{2m+3}}$ herabgedrückt werden kann, so müssen, falls die beiden Seiten von (18.) nach den negativen Potenzen von u entwickelt werden, die Coefficienten der gleich hohen Potenzen von u einander gleich sein. Die Coefficienten der linken Seite werden in Folge der im vorigen Artikel bewiesenen Sätze lauter ganze Zahlen, die Coefficienten der rechten Seite sind homogene

lineare Ausdrücke der Grössen $A_1, A_2, \ldots$ mit ganzzahligen Coefficienten. Durch Gleichsetzung der entsprechenden Ausdrücke erhält man recurrirende Relationen, welche zur Bestimmung der Grössen $A_1, A_2, \ldots$ geeignet sind, und zwar bei der Anwendung der geraden Potenzen von u diejenigen, welche Herr *Hermite* in der erwähnten Arbeit aufgestellt hat. Die zu den ungeraden Potenzen von u gehörenden Relationen hängen mit denjenigen zusammen, die Herr *Stern* in dem Aufsatze: „Zur Theorie der *Bernouilli*schen Zahlen", Bd. 84, S. 267 d. J., entwickelt hat. Doch folgt weder aus den einen noch den anderen Relationen, so viel ich sehe, unmittelbar, dass die Grössen $A_1, A_2, \ldots$ ganze Zahlen sind. Um diese Eigenschaft evident zu machen, genügt es aber, die Gleichung (18.) mehrere Male zu gebrauchen, indem man für u eine Reihe von Argumenten setzt, die aus u durch Addition von beliebig beginnenden auf einander folgenden ganzen Zahlen entstehen. Es leuchtet ein, dass, wenn man in der angegebenen Weise mit der Gleichung (15.) verfährt, die resultirenden Gleichungen addirt und hierauf das Ergebniss nach den negativen Potenzen von u entwickelt, auf der linken Seite die Summen der gleich hohen Potenzen der auf einander folgenden natürlichen Zahlen, auf der rechten die bekannten Ausdrücke dieser Summen vermittelst der *Bernouilli*schen Zahlen erscheinen. Denselben Inhalt hat die folgende Gleichung, welche aus (18.) hervorgeht, indem statt u nach einander die Grössen $u-a$, $u-a+1, \ldots$, $u+1$, $u+2, \ldots u+a-1$ substituirt werden,

$$(31.)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{t=-a+1}^{t=a-1}\frac{1}{(u-t)^2}+\tfrac{1}{2}\Big(\frac{1}{(u-a)^2}+\frac{1}{(u+a)^2}\Big)-\frac{1}{u-a}+\frac{1}{u+a}\\ &+\tfrac{1}{2}\Big(\frac{1}{(u-a)^3-(u-a)}-\frac{1}{(u+a)^3-(u+a)}\Big)+Z(u-a)-Z(u+a)\\ &\quad=-\frac{A_1}{(u-a)^3}-\frac{A_2}{(u-a)^5}-\cdots+\frac{A_1}{(u+a)^4}+\frac{A_1}{(u+a)^5}+\cdots.\end{aligned}\right.$$

Bei der vorzunehmenden Entwickelung heben sich die Factoren der negativen ungeraden Potenzen von u fort. Wenn man aber auf beiden Seiten in der im vorigen Artikel erörterten Weise den Factor von $\frac{1}{u^{2n+2}}$ bildet, und die halben Werthe einander gleich setzt, so ergiebt sich die Gleichung

$$(32.)\quad \left\{\begin{aligned} &(2n+1)\sum_{t=1}^{t=a-1}t^{2n}+\frac{2(2n+1)a^{2n}+(a+1)^{2n+1}+(a-1)^{2n+1}-6a^{2n+1}}{4}\\ &+\Sigma_p\frac{1}{p}\big((2n+1)_{p-1}a^{2n-p+2}+(2n+1)_{2p-2}a^{2n-2p+3}+\cdots+(2n+1)_{\nu(p-1)}a^{\mu}\big)\\ &\quad=-\big(A_1(2n+1)_2a^{2n-1}+A_2(2n+1)_4a^{2n-3}+\cdots+A_n(2n+1)_{2n}a\big).\end{aligned}\right.$$

Hier ist $2n+1 = \mu+\nu(p-1)$, und es bedeutet $\nu(p-1)$ das grösste Vielfache von $p-1$, welches nicht über $2n+1$ liegt, p die Reihe der ungeraden Primzahlen von 3 bis $2n+1$; auch erkennt man aus den im vorigen Artikel angegebenen Gründen, dass sowohl der mit dem Nenner 4 versehene Quotient wie die mit den Nennern p versehenen Ausdrücke ganze Zahlen sind. Der Beweis, dass die sämmtlichen Grössen A_1, $A_2, \dots$ ganze Zahlen sind, lässt sich nun führen, indem man erstens zeigt, dass $A_1 = -1$ ist, und zweitens, dass, wenn A_1, $A_2, \dots A_{n-1}$ ganze Zahlen sind, A_n ebenfalls eine ganze Zahl sein muss. Zu dem letzteren Behuf lege ich der Zahl a den Werth $2n+1$ bei. Dann haben auf der rechten Seite von (32.) die Grössen A_1, $A_2, \dots A_{n-1}$ Coefficienten, welche durch a^3, mithin gewiss durch $(2n+1)^2$ theilbar sind, während der Coefficient von A_n gleich $(2n+1)^2$ wird. Ebenso ist auf der linken Seite die als Bruch mit dem Nenner 4 geschriebene ganze Zahl durch $(2n+1)^2$ theilbar. Es kommt also bei den übrigen Bestandtheilen auf den Rest an, welchen sie nach dem Modul $(2n+1)^2$ liefern. In Betreff des Summanden

$$\frac{1}{p}\left((2n+1)_{p-1}a^{2n-p+2}+(2n+1)_{2p-2}a^{2n-2p+3}+\cdots+(2n+1)_{\nu(p-1)}a^{\mu}\right),$$

in dem ebenfalls $a = 2n+1$ ist, muss man unterscheiden, ob die Bedingung, dass $2n+1$ durch p aufgehe und $\mu = 1$ sei, erfüllt ist oder nicht. Im ersten Falle hat der Ausdruck nach dem Modul $(2n+1)^2$ den Rest $\frac{(2n+1)^2}{p}$. Im zweiten Falle geht entweder $2n+1$ durch p auf; und μ ist gleich oder grösser als Zwei, dann geht der in Rede stehende Ausdruck stets durch $(2n+1)^2$ auf; oder $2n+1$ geht nicht durch p auf, dann ist $(2n+1)^{\mu}$ ein Factor der betreffenden Zahl, und dieselbe muss, wenn $\mu \gtreqless 2$ ist, wegen dieses Factors, wenn $\mu = 1$ ist, wegen des als Factor hinzukommenden Binomialcoefficienten $2n+1$ durch $(2n+1)^2$ theilbar sein. Wenn also $p, p', \dots$ diejenigen ungeraden Primzahlen sind, welche in $2n+1$ aufgehen, und für welche $\mu = 1$ oder $2n$ durch $p-1$ theilbar ist, so hat die linke Seite von (32.) nach dem Modul $(2n+1)^2$ den Rest

$$(2n+1)\sum_{t=1}^{t=2n} t^{2n}+\frac{(2n+1)^2}{p}+\frac{(2n+1)^2}{p'}+\cdots.$$

Nach dem Satze 8 der Abhandlung von *v. Staudt:* „Beweis eines Lehrsatzes, die *Bernouilli*schen Zahlen betreffend", Bd. 21, S. 272 dieses Journals, in welcher die hier erörterte Darstellung der *Bernouilli*schen Zahlen zum ersten

Male bewiesen ist, geht aber für eine beliebige ganze Zahl n, wenn $a, b, c, \dots$ diejenigen Primfactoren von n sind, für welche $a-1, b-1, c-1, \dots$ Theiler von $2n$ werden, die ganze Zahl

$$\sum_{t=1}^{t=n} t^{2n} + \frac{n}{a} + \frac{n}{b} + \cdots$$

durch n auf. Mithin ist der oben bezeichnete Rest durch $(2n-1)$ theilbar, und daher muss die Grösse A_n gleich einer ganzen Zahl sein, wie bewiesen werden sollte.

5.

Die Function $Z(u)$, welche in (17.) als eine über alle ungeraden Primzahlen zu erstreckende Summe definirt ist, lässt sich als eine über alle ungeraden Zahlen auszudehnende Summe auffassen, bei der alle von ungeraden zusammengesetzten Zahlen herrührenden Glieder wegfallen. Wenn man demnach festsetzt, dass das Zeichen $\theta(2l-1)$ für jede ungerade Primzahl gleich der Einheit, für jede ungerade zusammengesetzte Zahl gleich Null sein soll, so ergiebt sich der Ausdruck

$$(33.)\qquad Z(u) = \sum_{l=1}^{l=\infty} \frac{\theta(2l-1)}{(2l-1)(u^{2l-1}-u)}.$$

Denselben substituire ich in die Gleichung (31.), nachdem daselbst a gleich der Einheit genommen ist, und erhalte die Gleichung

$$(34.)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(u-1)^2}+\frac{1}{(u+1)^2}\right)+\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(u-1)(-u-1)}+\frac{1}{(u+1)(-u+1)}\right) \\ \quad -\sum_{l=1}^{l=\infty}\frac{\theta(2l-1)}{(2l-1)((u-1)^{2l-1}-u+1)}-\sum_{l=1}^{l=\infty}\frac{\theta(2l-1)}{(2l-1)((u+1)^{2l-1}-u-1)} \\ \quad = -\frac{A_1}{(u-1)^2}-\frac{A_2}{(u-1)^4}-\cdots-\frac{A_1}{(u+1)^2}-\frac{A_2}{(u+1)^4}-\cdots. \end{cases}$$

Wenn man jetzt wieder beide Seiten nach den negativen Potenzen von u entwickelt und die Factoren von $\frac{1}{u^{2n-2}}$ gleich setzt, so folgt die Relation

$$(35.)\quad \begin{cases} (n-1)(2^{2n-1}) - \sum_{l=1}^{l=n} \frac{\theta(2l-1)}{2l-1}\left((2n-1)_{2l}+(2n-1)_{4l}+(2n-1)_{6l}+\cdots\right) \\ \quad = -(A_1(2n-1)_2+A_2(2n-1)_4+\cdots+A_N(2n-1)_{2N}). \end{cases}$$

Dieselbe ist nur durch die Bezeichnung von der mehrfach erwähnten Relation des Herrn *Hermite* und, was dasselbe bedeutet, von derjenigen verschieden, die aus (32.) bei der Annahme $a=1$ hervorgeht. Allein die Einführung der Grössen $\theta(2l-1)$ gewinnt hier eine wesentliche Bedeutung. Wenn man sich die ganzen Zahlen $A_1, A_2, \dots A_N$ gegeben denkt, so liefert die

Relation (35.) für die N Werthe $n = 1, 2, \dots N$ ein System von N Gleichungen des ersten Grades, aus denen die Werthe der Grössen $\theta(3), \theta(5), \dots \theta(2N+1)$ unzweideutig bestimmt werden können, weil der Factor jeder neuen zu bestimmenden Grösse einen von Null verschiedenen Zahlenwerth hat. Demnach kann aus der Kenntniss der N ganzen Zahlen $A_1, A_2, \dots A_N$ durch Auflösung des bezeichneten Systems von Gleichungen die Beantwortung der Frage abgeleitet werden, ob eine bestimmte ungerade Zahl aus der Reihe $3, 5, \dots 2N+1$ eine Primzahl sei oder nicht.

Durch diese Eigenschaft erhalten die ganzzahligen Bestandtheile der *Bernouilli*schen Zahlen eine Stellung in der allgemeinen Grössenlehre. Alle irrationalen Grössen stammen von den rationalen Grössen, alle rationalen Grössen von den ganzen Zahlen her, die Zusammensetzung der ganzen Zahlen durch Multiplication führt aber auf den Begriff der Primzahlen, die nach einem unergründeten Gesetz fortschreiten. Weil nun aus der Kenntniss der N ersten ungeraden Primzahlen die Bestimmung der N ersten Zahlen $A_1, A_2, \dots A_N$, und umgekehrt aus der Kenntniss dieser Zahlen die Bestimmung des Gesetzes der Primzahlen bis zu der Zahl $2N+1$ folgt, so können das Gesetz des Fortschreitens der ganzzahligen Bestandtheile der *Bernouilli*schen und das Gesetz des Fortschreitens der Primzahlen für einander eintreten und haben gleiche Tiefe.

6.

Alle bisherigen Resultate sind aus der Gleichung (12.) abgeleitet, indem daselbst die Grösse $s = 2$ gesetzt wurde. Nimmt man $s = 1$ und berücksichtigt die obige zu (11.) und (11*.) gemachte Bemerkung, so entsteht die Gleichung

$$(36.)\quad \left\{\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{u+1}\right)+\log u-\log(u+1) \\ &= \frac{B_1}{2u^2} - \frac{B_2}{4u^4} \pm \cdots + \frac{(-1)^{m-1}B_m}{2m\,u^{2m}} + \frac{B_{m+1}(\varepsilon+\varepsilon' i)}{(2m+2)u_1^{2m+2}} \\ &- \frac{B_1}{2(u+1)^2} + \frac{B_2}{4(u+1)^4} \mp \cdots - \frac{(-1)^{m-1}B_m}{2m(u+1)^{2m}} - \frac{B^{m+1}(\eta+\eta' i)}{(2m+2)(u_1+1)^{2m+2}}, \end{aligned}\right.$$

wo alle Bezeichnungen die mit den früheren correspondirende Bedeutung haben. Hier tritt nun der Zusammenhang der *Bernouilli*schen Zahlen und der Function hervor, welche *Riemann* in der Abhandlung: „Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse", mit $\zeta(s)$ bezeichnet und für die Werthe der complexen Veränderlichen s, deren reeller Theil grösser als die Einheit ist, durch die über alle ganzen Zahlen n auszudehnende Summe:

$$\Sigma \frac{1}{n^s}$$

definirt hat. Indem *Riemann* die Definition von $\zeta(s)$ auf alle Werthe der complexen Veränderlichen s ausdehnt, findet er zwischen $\zeta(s)$ und $\zeta(1-s)$ eine Relation, welche sich durch die Gleichung

$$(37.)\qquad \zeta(1-s) = \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2}s\right)\Gamma(s)\zeta(s)}{(2\pi)^s}$$

ausdrücken lässt. Bekanntlich wird der Werth von $\zeta(s)$ für alle ganzzahligen geraden Werthe von s durch die Gleichung

$$(38.)\qquad \zeta(2m) = (2\pi)^{2m}\frac{B_m}{2(2m)!}$$

dargestellt. Setzt man in (37.) die Variable $s=2m$ und benutzt die Gleichung (38.), so ergiebt sich für $\zeta(s)$ bei ungeradem negativem Werthe von s der folgende Ausdruck

$$(39.)\qquad \zeta(-2m+1) = \frac{(-1)^m B_m}{2m}.$$

Derselbe repräsentirt das Gesetz der Coefficienten in der auf der rechten Seite von (36.) vorkommenden semiconvergenten Reihe. Man kann deshalb die Gleichung (36.) in die folgende Gestalt bringen

$$(40.)\quad \left\{\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{u+1}\right)+\log u-\log(u+1)\\ &= -\frac{\zeta(-1)}{u^2}-\frac{\zeta(-3)}{u^4}-\cdots-\frac{\zeta(-2m+1)}{u^{2m}}-\frac{\zeta(-2m-1)}{u_1^{2m+2}}(\varepsilon+\varepsilon' i)\\ &\quad+\frac{\zeta(-1)}{(u+1)^2}+\frac{\zeta(-3)}{(u+1)^4}+\cdots+\frac{\zeta(-2m+1)}{(u+1)^{2m}}+\frac{\zeta(-2m-1)}{(u_1+1)^{2m+2}}(\eta+\eta' i),\end{aligned}\right.$$

in welcher nur die Werthe von $\zeta(s)$ für die ungeraden negativen Zahlen auftreten.

Da die Gleichung (36.) aus der obigen Gleichung (15.) dadurch abgeleitet werden kann, dass man jedes Glied mit du multiplicirt und in angemessener Weise integrirt, so ist klar, dass, wenn in (36.) die Darstellung (7.) der *Bernouilli*schen Zahlen eingeführt wird, eine Gleichung entsteht, die aus (18.) durch Integration der einzelnen Bestandtheile erhalten werden kann. Hierbei tritt die Function $\int Z(u)du$ auf, welche für den bezeichneten Bereich der Variable u durch die convergente Summe

$$\Sigma_p \frac{1}{p(p-1)}\log(1-u^{-p+1})$$

dargestellt wird.

Bonn, den 19ten Juli 1883.

Zur Theorie der Transformation hyperelliptischer Functionen zweier Argumente.

(Von Herrn *Wiltheiss* in Halle a. S.)

Wie *Jacobi* im dritten Bande dieses Journals hervorhebt, sind die Wurzeln aus den $n+1$ reciproken Multiplicatoren, welche bei der Transformation der elliptischen Functionen durch ein System von $n+1$ nicht äquivalenten Transformationen n^{ten} Grades auftreten, durch $\frac{1}{2}(n+1)$ lineare Gleichungen von ganz specieller Form verbunden:

$$(1^a.)\qquad \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} e^{\nu\frac{2\pi i}{n}gt^2}\sqrt{1:M_\nu} = 0, \qquad \left(t=1,2,\dots\frac{n-1}{2}\right)$$

$$(1^b.)\qquad \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1}\sqrt{1:M_\nu} = \sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}}n(1:M)},$$

in denen g ein Nichtrest mod. n ist. Diese Multiplicatoren sind ferner die Wurzeln einer Gleichung, deren Coefficienten rational in dem Modul k sind. — Legt man als Repräsentanten der Klassen nicht äquivalenter Transformationen diejenigen Transformationen zu Grunde, bei welchen die Gleichungen zwischen den ursprünglichen Perioden K und iK' und den transformirten $\varLambda$ und $i\varLambda'$ die folgende Gestalt haben:

$$K = M_\nu\varLambda_\nu,\quad iK' = M_\nu(2\nu\varLambda_\nu+ni\varLambda'_\nu) \qquad (\nu=0,1,\dots n-1)$$

und

$$K=(-1)^{\frac{n-1}{2}}nM\varLambda,\quad iK'=(-1)^{\frac{n-1}{2}}Mi\varLambda',$$

so folgt aus der bekannten Gleichung

$$\frac{2}{\pi}K = \vartheta_3^2(0;\ k),$$

und den entsprechenden:

$$\frac{2}{\pi}\varLambda_\nu = \vartheta_3^2(0;\ \lambda_\nu),\qquad \frac{2}{\pi}\varLambda = \vartheta_3^2(0;\ \lambda),$$

(wo der Modul λ_ν zu den Perioden Λ_ν und $i\Lambda'_\nu$, der Modul λ zu den Perioden Λ und $i\Lambda'$ gehört), dass

$$1 : M_\nu = \vartheta_3^2(0;\ \lambda_\nu) : \vartheta_3^2(0;\ k), \qquad 1 : M = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n \vartheta_3^2(0;\ \lambda) : \vartheta_3^2(0;\ k).$$

Es sind also die reciproken Multiplicatoren gleich dem Quadrate der für den Werth Null des Arguments ausgerechneten Thetafunctionen, $\vartheta_3(0;\lambda_\nu)$ und $\vartheta_3(0;\lambda)$, dividirt durch $\vartheta_3^2(0;k)$ bez. $(-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n} \vartheta_3^2(0;\ k)$. Demgemäss sind diese Thetafunctionen

$$\vartheta_3(0;\ \lambda_\nu), \qquad (-1)^{\frac{n-1}{2}} n \vartheta_3(0;\ \lambda) \qquad\qquad {\scriptstyle (\nu = 0,\, 1,\, \ldots\, n-1)}$$

selbst durch Gleichungen verbunden, welche analog den Gleichungen (1.) sind, und sie sind Wurzeln einer Gleichung $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades, deren Coefficienten rationale Functionen sind von k, d. i. von einem für den Werth Null des Arguments ausgerechneten Thetaquotienten, und (da $\vartheta_1'(0) = \vartheta(0)\,\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)$, also

$$\vartheta_3^2(0;\ k) = \frac{\vartheta_3(0;k)}{\vartheta_2(0;k)} \cdot \left[\frac{d}{dv}\,\frac{\vartheta_1(v;k)}{\vartheta(v;k)}\right]_{v=0}$$

ist) von der ebenfalls für den Werth Null des Arguments ausgerechneten Ableitung eines Thetaquotienten.

Genau ebenso verhält es sich mit den beiden andern geraden Thetafunctionen, und insbesondere noch mit der Ableitung der ungeraden Thetafunction: auch sie genügen Gleichungen von der Form der Gleichungen (1.) und sind Wurzeln von Gleichungen, deren Coefficienten eine ähnliche Beschaffenheit wie die der Gleichung für $\vartheta_3(0;\ \lambda_\nu)$ haben. —

Es lag nun der Gedanke nahe, dass etwas Aehnliches bei den ***Rosenhain***schen Thetafunctionen, also den Thetafunctionen zweier Argumente stattfinden würde, und ich werde im Folgenden zeigen, dass dies in der That der Fall ist.

§ 1.

Zu der ursprünglichen Fundamentalthetafunction

$$\vartheta(v_1, v_2;\ \tau_{11}, 2\tau_{12}, \tau_{22})_5 = \sum_{(n)} e^{\pi i g(v_1, v_2;\ n_1, n_2;\ \tau_{11}, 2\tau_{12}, \tau_{22})},$$

wobei

$$g(v_1, v_2;\ n_1, n_2;\ \tau_{11}, 2\tau_{12}, \tau_{22}) = 2n_1 v_1 + 2n_2 v_2 + n_1^2 \tau_{11} + 2n_1 n_2 \tau_{12} + n_2^2 \tau_{22},$$

und die Summation bezüglich n_1 und n_2 über alle ganzen Zahlen auszuführen

ist, erhalte ich die transformirte Fundamentalthetafunction:

$$\vartheta(v_1', v_2';\ \tau_{11}', 2\tau_{12}', \tau_{22}')_5,$$

wenn ich die Argumente v_1', v_2' durch die Gleichungen

$$v_\alpha' = m_{1,\alpha}v_1+m_{2,\alpha}v_2+\tau_{\alpha 1}'(m_{1,3}v_1+m_{2,3}v_2)+\tau_{\alpha 2}'(m_{1,4}v_1+m_{2,4}v_2) \qquad (\alpha=1,2)$$

mit den Argumenten v_1 und v_2 verbinde, und für τ_{11}', τ_{12}', τ_{22}' die aus den Gleichungen

$$m_{\beta+2,\alpha}+m_{\beta+2,3}\tau_{\alpha 1}'+m_{\beta+2,4}\tau_{\alpha 2}' = m_{1,\alpha}\tau_{1\beta}+m_{2,\alpha}\tau_{2\beta}+\tau_{\alpha 1}'(m_{1,3}\tau_{1\beta}+m_{2,3}\tau_{2\beta})$$
$$+\tau_{\alpha 2}'(m_{1,4}\tau_{1\beta}+m_{2,4}\tau_{2\beta}) \qquad (\alpha,\beta=1,2)$$

berechneten Werthe nehme, wobei die ganzen Zahlen $m_{\lambda,\mu}$ nur den Bedingungen

$$\sum_{\beta=1,2}(m_{\beta,\lambda}m_{\beta+2,\lambda+1}-m_{\beta,\lambda+1}m_{\beta+2,\lambda}) = 0, \qquad (\lambda=1,2,3,4)$$

$$\sum_{\beta=1,2}(m_{\beta,\alpha}m_{\beta+2,\alpha+2}-m_{\beta,\alpha+2}m_{\beta+2,\alpha}) = \varkappa \qquad (\alpha=1,2)$$

(die Indices sind mod. 4 auf die Werthe 1, 2, 3, 4 zu reduciren) unterliegen. Die Zahl $\varkappa$ nennt man den Grad der Transformation. —

Für das System der Zahlen

$$\begin{matrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{matrix}$$

nehme ich nun die speciellen Systeme

$$(\text{I.})\ \left\{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2\lambda_1 & \lambda_2 & \varkappa & 0 \\ \lambda_2 & 2\lambda_3 & 0 & \varkappa \end{matrix}\right. \qquad (\text{II.})\ \left\{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_2 & \varkappa & 0 & 0 \\ 2\lambda_1 & 0 & \varkappa & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right.$$

$$(\text{III.})\ \left\{\begin{matrix} \varkappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2\lambda_3 & 0 & \varkappa \end{matrix}\right. \qquad (\text{IV.})\ \left\{\begin{matrix} \varkappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varkappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1, \end{matrix}\right.$$

in denen $\varkappa$ eine ungerade Zahl und λ_1, λ_2, λ_3 beliebige Zahlen sind, und erhalte dem entsprechend gemäss den obigen Formeln die vier transformirten Thetafunctionen

$$\text{(I.)} \quad \vartheta\left(v_1, v_2;\ \frac{1}{\varkappa}(\tau_{11}-2\lambda_1), \frac{1}{\varkappa}(2\tau_{12}-2\lambda_2), \frac{1}{\varkappa}(\tau_{22}-2\lambda_3)\right)_5,$$

$$\text{(II.)} \quad \vartheta\left(v_1-\lambda_2 v_2, \varkappa v_2;\ \frac{1}{\varkappa}(\tau_{11}-2\lambda_2\tau_{12}+\lambda_2^2\tau_{22}-2\lambda_1), (2\tau_{12}-2\lambda_2\tau_{22}), \varkappa\tau_{22}\right)_5,$$

$$\text{(III.)} \quad \vartheta\left(\varkappa v_1, v_2;\ \varkappa\tau_{11}, 2\tau_{12}, \frac{1}{\varkappa}(\tau_{22}-2\lambda_3)\right)_5,$$

$$\text{(IV.)} \quad \vartheta(\varkappa v_1, \varkappa v_2;\ \varkappa\tau_{11}, 2\varkappa\tau_{12}, \varkappa\tau_{22})_5.$$

Giebt man den λ_1, λ_2, λ_3 je $\varkappa$ Werthe, die mod. $\varkappa$ incongruent sind, so bilden diese $\varkappa^3+\varkappa^2+\varkappa+1$ transformirten Thetafunctionen ein Repräsentantensystem der nicht äquivalenten Klassen von Transformationen, und ich werde nachweisen, dass dieses System von transformirten Thetafunctionen die in Frage kommenden Eigenschaften besitzt. —

Zu bemerken ist, dass sich diese transformirten Thetafunctionen nicht ändern, wenn man die Zahlen λ_1, λ_2, λ_3 um Vielfache von $\varkappa$ vermehrt. Bei den Thetafunctionen (I.), (III.), (IV.) folgt dies unmittelbar aus der Definition der Thetafunction; bei der Thetafunction (II.) aus der Relation:

$$\begin{aligned} & g\Big(v_1-(\lambda_2+m\varkappa)v_2, \varkappa v_2;\ n_1, n_2; \\ & \frac{1}{\varkappa}(\tau_{11}-2(\lambda_2+m\varkappa)\tau_{12}+(\lambda_2+m\varkappa)^2\tau_{22}-2(\lambda_1+m'\varkappa)), (2\tau_{12}-2(\lambda_2+m\varkappa)\tau_{22}), \varkappa\tau_{22}\Big) \\ & = g\Big(v_1-\lambda_2 v_2, v_2;\ n_1, n_2-mn_1; \\ & \frac{1}{\varkappa}(\tau_{11}-2\lambda_2\tau_{12}+\lambda_2^2\tau_{22}-2\lambda_1), (2\tau_{12}-2\lambda_2\tau_{22}), \varkappa\tau_{22}\Big)-2n_1^2 m'. \end{aligned}$$

§ 2.

Um zu beweisen, dass zwischen diesen $\varkappa^3+\varkappa^2+\varkappa+1$ Thetafunctionen lineare Gleichungen bestehen, die den Gleichungen (1.) entsprechen, werde ich zuerst zeigen, dass sich diese Thetafunctionen durch die folgenden $\frac{1}{2}(\varkappa^2+1)$ Reihen linear darstellen lassen:

$$\sum_{(\nu)} e^{\pi i g\left(v_1, v_2;\ \varkappa\nu_1+h_1, \varkappa\nu_2+h_2;\ \frac{1}{\varkappa}\tau_{11}, \frac{2}{\varkappa}\tau_{12}, \frac{1}{\varkappa}\tau_{22}\right)} + \sum_{(\nu)} e^{\pi i g\left(v_1, v_2;\ \varkappa\nu_1-h_1, \varkappa\nu_2-h_2;\ \frac{1}{\varkappa}\tau_{11}, \frac{2}{\varkappa}\tau_{12}, \frac{1}{\varkappa}\tau_{22}\right)} = \varphi(h_1, h_2),$$

$$\begin{pmatrix} h_1 = 0, 1, \ldots \frac{\varkappa-1}{2} \\ h_2 = 0, 1, \ldots \frac{\varkappa-1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} h_1 = 1, 2, \ldots \frac{\varkappa-1}{2} \\ h_2 = -1, -2, \ldots -\frac{\varkappa-1}{2} \end{pmatrix},$$

wobei die Summation bezüglich ν_1 und ν_2 von $-\infty$ bis $+\infty$ auszudehnen ist. Diese Functionen genügen, wie aus ihrer Definition hervorgeht, der Gleichung

$$\varphi(h_1+m_1\varkappa,\ h_2+m_2\varkappa) = \varphi(h_1,\ h_2),$$

wenn m_1 und m_2 ganze Zahlen sind. —

Es ist nun, abgesehen von dem Factor $i\pi$, der Exponent eines Gliedes der Reihe für

$$\vartheta\left(v_1,\ v_2;\ \frac{1}{\varkappa}(\tau_{11}-2\lambda_1),\ \frac{1}{\varkappa}(2\tau_{12}-2\lambda_2),\ \frac{1}{\varkappa}(\tau_{22}-2\lambda_3)\right)_5$$

gleich

$$g\left(v_1,\ v_2;\ n_1,\ n_2;\ \frac{1}{\varkappa}(\tau_{11}-2\lambda_1),\ \frac{1}{\varkappa}(2\tau_{12}-2\lambda_2),\ \frac{1}{\varkappa}(\tau_{22}-2\lambda_3)\right).$$

In diesen Ausdruck führe ich an Stelle der Summationsbuchstaben n_1, n_2 vier neue Summationsbuchstaben durch die Gleichungen

$$n_1 = \varkappa\nu_1+\mu_1,\qquad n_2 = \varkappa\nu_2+\mu_2$$

ein, von denen ν_1 und ν_2 von $-\infty$ bis $+\infty$, μ_1 und μ_2 von $-\frac{\varkappa-1}{2}$ bis $\frac{\varkappa-1}{2}$ laufen, was gestattet ist, da jedem Werthsystem n_1, n_2 *ein* Werthsystem ν_1, ν_2, μ_1, μ_2 entspricht, und umgekehrt. Dadurch wird jener Ausdruck gleich

$$g\left(v_1,\ v_2;\ \varkappa\nu_1+\mu_1,\ \varkappa\nu_2+\mu_2;\ \frac{1}{\varkappa}\tau_{11},\ \frac{2}{\varkappa}\tau_{12},\ \frac{1}{\varkappa}\tau_{22}\right)-\frac{2}{\varkappa}(\mu_1^2\lambda_1+\mu_1\mu_2\lambda_2+\mu_2^2\lambda_3)-2N,$$

wo N eine ganze Zahl ist, und dem entsprechend wird:

$$\sum_{(n)} e^{\pi i g\left(v_1,\, v_2;\ n_1,\, n_2;\ \frac{1}{\varkappa}(\tau_{11}-2\lambda_1),\,\frac{1}{\varkappa}(2\tau_{12}-2\lambda_2),\,\frac{1}{\varkappa}(\tau_{22}-2\lambda_3)\right)}$$

$$= \sum_{(\mu)} e^{-\frac{2\pi i}{\varkappa}(\mu_1^2\lambda_1+\mu_1\mu_2\lambda_2+\mu_2^2\lambda_3)} \sum_{(\nu)} e^{\pi i g\left(v_1,\, v_2;\ \varkappa\nu_1+\mu_1,\, \varkappa\nu_2+\mu_2;\ \frac{1}{\varkappa}\tau_{11},\, \frac{2}{\varkappa}\tau_{12},\, \frac{1}{\varkappa}\tau_{22}\right)}$$

oder, wenn ich für die unendlichen Reihen die Functionszeichen

$$\vartheta\left(v_1,\ v_2;\ \frac{1}{\varkappa}(\tau_{11}-2\lambda_1),\ldots\right)_5 \text{ und } \varphi(h_1,\ h_2)$$

schreibe:

$$(2^a).\quad \begin{cases} \vartheta\left(v_1,\ v_2;\ \frac{1}{\varkappa}(\tau_{11}-2\lambda_1),\ \frac{1}{\varkappa}(2\tau_{12}-2\lambda_2),\ \frac{1}{\varkappa}(\tau_{22}-2\lambda_3)\right)_5 \\ = \frac{1}{2}\varphi(0,\ 0)+\sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{1}{2}(\varkappa-1)}\left(e^{-\frac{2\pi i}{\varkappa}\mu^2\lambda_1}\varphi(\mu,0)+e^{-\frac{2\pi i}{\varkappa}\mu^2\lambda_3}\varphi(0,\ \mu)\right) \\ \quad + \sum_{\mu_1,\,\mu_2=1}^{\frac{1}{2}(\varkappa-1)}\left(e^{-\frac{2\pi i}{\varkappa}(\mu_1^2\lambda_1+\mu_1\mu_2\lambda_2+\mu_2^2\lambda_3)}\varphi(\mu_1,\ \mu_2)\right. \\ \quad \left. + e^{-\frac{2\pi i}{\varkappa}(\mu_1^2\lambda_1-\mu_1\mu_2\lambda_2+\mu_2^2\lambda_3)}\varphi(\mu_1,\ -\mu_2)\right). \end{cases}$$

Und dies ist die gesuchte Darstellung.

In ähnlicher Weise erhalte ich die betreffende Darstellung von

$$\vartheta\Big(v_1-\lambda_2 v_2,\ \varkappa v_2;\ \frac{1}{\varkappa}(\tau_{11}-2\lambda_2\tau_{12}+\lambda_2^2\tau_{22}-2\lambda_1),\ (2\tau_{12}-2\lambda_2\tau_{22}),\ \varkappa\tau_{22}\Big)_5.$$

Der Exponent eines Gliedes der Reihe ist hier, abgesehen von dem Factor $i\pi$,

$$g\Big(v_1-\lambda_2 v_2,\ \varkappa v_2;\ n_1,\ n_2;\ \frac{1}{\varkappa}(\tau_{11}-2\lambda_2\tau_{12}+\lambda_2^2\tau_{22}-2\lambda_1),\ (2\tau_{12}-2\lambda_2\tau_{22}),\ \varkappa\tau_{22}\Big).$$

In diesen Ausdruck führe ich neue Summationsbuchstaben ν_1, ν_2, μ durch die Gleichungen

$$n_1 = \varkappa\nu_1+\mu, \qquad n_2 = \lambda_2\nu_1+\nu_2$$

ein, von denen ν_1 und ν_2 von $-\infty$ bis $+\infty$, μ von $-\frac{\varkappa-1}{2}$ bis $\frac{\varkappa-1}{2}$ laufen; dies ist gestattet, da jedem Werthsystem n_1, n_2 *ein* Werthsystem ν_1, ν_2, μ entspricht, und umgekehrt. Der Exponent nimmt dadurch die Form an:

$$g\Big(v_1,\ v_2;\ \varkappa\nu_1+\mu,\ \varkappa\nu_2-\lambda_2\mu;\ \frac{1}{\varkappa}\tau_{11},\ \frac{2}{\varkappa}\tau_{12},\ \frac{1}{\varkappa}\tau_{22}\Big)-\frac{2\lambda_1\mu^2}{\varkappa}-2N,$$

wo N eine ganze Zahl ist; demgemäss ist

$$\begin{aligned}&\sum_{(n)} e^{\pi i g\left(v_1-\lambda_2 v_2,\ \varkappa v_2;\ n_1,\ n_2;\ \frac{1}{\varkappa}(\tau_{11}-2\lambda_2\tau_{12}+\cdots),\ \cdots\right)}\\ &= \sum_{(\mu)} e^{-\frac{2\pi i}{\varkappa}\mu^2\lambda_1} \sum_{(\nu)} e^{\pi i g\left(v_1,\ v_2;\ \varkappa\nu_1+\mu,\ \varkappa\nu_2-\lambda_2\mu;\ \frac{1}{\varkappa}\tau_{11},\ \frac{2}{\varkappa}\tau_{12},\ \frac{1}{\varkappa}\tau_{22}\right)},\end{aligned}$$

und hieraus ergiebt sich die gesuchte Darstellung:

$$(2^b.)\quad \left\{\begin{aligned}&\vartheta\Big(v_1-\lambda_2 v_2,\ \varkappa v_2;\ \frac{1}{\varkappa}(\tau_{11}-2\lambda_2\tau_{12}+\lambda_2^2\tau_{22}-2\lambda_1),\ (2\tau_{12}-2\lambda_2\tau_{22}),\ \varkappa\tau_{22}\Big)_5\\ &\qquad = \tfrac{1}{2}\varphi(0,0)+\sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{1}{2}(\varkappa-1)} e^{-\frac{2\pi i}{\varkappa}\mu^2\lambda_1}\varphi(\mu,-\mu\lambda_2).\end{aligned}\right.$$

Durch ein ganz gleiches Verfahren findet man auch die Darstellung der beiden noch übrigen Thetafunctionen durch die Functionen $\varphi(h_1, h_2)$:

$$(2^c.)\quad \left\{\begin{aligned}&\vartheta\Big(\varkappa v_1,\ v_2;\ \varkappa\tau_{11},\ 2\tau_{12},\ \frac{1}{\varkappa}(\tau_{22}-2\lambda_3)\Big)_5\\ &= \tfrac{1}{2}\varphi(0,0)+\sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{1}{2}(\varkappa-1)} e^{-\frac{2\pi i}{\varkappa}\mu^2\lambda_3}\varphi(0,\mu),\end{aligned}\right.$$

$$(2^d.)\quad \vartheta(\varkappa v_1,\ \varkappa v_2;\ \varkappa\tau_{11},\ 2\varkappa\tau_{12},\ \varkappa\tau_{22})_5 = \tfrac{1}{2}\varphi(0,0). \text{ —}$$

Sollen nun zwischen diesen Thetafunctionen lineare Gleichungen,

ähnlich den Gleichungen (1ᵃ.) bestehen, also solche, bei denen λ_1, λ_2, λ_3 lineare Functionen des Summationsbuchstabens sind:

$$\lambda_\alpha = a_\alpha s + c_\alpha, \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

so kann dies offenbar nur zwischen den Functionen

$$\vartheta\left(v_1, v_2; \frac{1}{\varkappa}(\tau_{11} - 2\lambda_1), \ldots\right)_5$$

einerseits, oder den Functionen

$$\vartheta\left(v_1 - \lambda_2 v_2, \varkappa v_2; \frac{1}{\varkappa}(\tau_{11} - 2\lambda_2\tau_{12} \ldots), \ldots\right)_5$$

andererseits, oder endlich zwischen den Functionen

$$\vartheta(\varkappa v_1, v_2; \varkappa\tau_{11}, \ldots)_5$$

möglich sein. Wenn man aber in die Summe

$$\sum_{s=0}^{s=\varkappa-1} e^{\frac{2\pi i}{\varkappa} g t^2 s} \vartheta\left(v_1, v_2; \frac{1}{\varkappa}(\tau_{11} - 2a_1 s - 2c_1), \frac{1}{\varkappa}(2\tau_{12} - 2a_2 s - 2c_2), \frac{1}{\varkappa}(\tau_{22} - 2a_3 s - 2c_3)\right)_5,$$

in der g ein Nichtrest mod. $\varkappa$, und t eine der Zahlen $1, 2, \cdots \frac{\varkappa-1}{2}$ ist, den Ausdruck (2ᵃ.) für die Thetafunction in den Functionen $\varphi(h_1, h_2)$ einsetzt, so erkennt man unmittelbar, dass derselbe nur dann, aber dann auch immer verschwindet, wenn für alle in Betracht kommenden Werthepaare μ_1, μ_2, oder was dasselbe ist, wenn überhaupt für alle Werthepaare μ_1, μ_2

$$\sum_{s=0}^{s=\varkappa-1} e^{\frac{2\pi i}{\varkappa} s(g t^2 - a_1\mu_1^2 - a_2\mu_1\mu_2 - a_3\mu_2^2)}$$

gleich Null ist, d. h. wenn für alle Werthepaare μ_1, μ_2

$$a_1\mu_1^2 + a_2\mu_1\mu_2 + a_3\mu_2^2$$

ein Rest mod. $\varkappa$ ist. Dazu ist nothwendig, dass*)

---

*) Dies kann man folgendermassen beweisen: Da $g(xy) = a_1 x^2 + a_2 xy + a_3 y^2$ für alle Werthe xy Reste mod. $\varkappa$ liefern soll, so müssen insbesondere $g(1, 0)$ und $g(0, 1)$ Reste sein, also:

$$a_1 \equiv p_1^2, \quad a_3 \equiv p_2^2 \pmod{\varkappa}.$$

Sind nun p_1 und p_2 nicht congruent Null, so führe ich eine Zahl t durch $a_2 \equiv 2p_1p_2t$ (mod. $\varkappa$) ein; dadurch wird

$$g(xy) \equiv (p_1 x + p_2 t y)^2 + p_2^2(1 - t^2)y^2,$$

und hieraus folgt, wenn ich bei einem festen y, das nicht $\equiv 0$ (mod. $\varkappa$) ist, x alle Zahlen durchlaufen, also $(p_1 x + p_2 t y)^2$ allen Resten congruent werden lasse, dass jeder Rest vermehrt um $p_2^2(1-t^2)y^2$ wieder ein Rest sein muss, und dies ist nur

$$a_1 \equiv p_1^2, \quad a_2 \equiv 2p_1p_2, \quad a_3 \equiv p_2^2 \pmod{\varkappa},$$

wobei p_1 und p_2 ganze Zahlen bedeuten.

Mithin ist (ich kann bei Berücksichtigung der Bemerkung am Ende des § 1 direct $a_1 = p_1^2$ u. s. w. setzen, ohne dadurch die Allgemeinheit zu beschränken):

$$(A.)\left\{\begin{array}{l} \sum_{s=0}^{s=\varkappa-1} e^{\frac{2\pi i}{\varkappa} g t^2 s} \\ \cdot \vartheta\left(v_1, v_2;\ \frac{1}{\varkappa}(\tau_{11}-2p_1^2 s-2c_1),\ \frac{1}{\varkappa}(2\tau_{12}-4p_1p_2 s-2c_2),\ \frac{1}{\varkappa}(\tau_{22}-2p_2^2 s-2c_3)\right)_5 = 0. \\ \qquad (t=1,2,\ldots \frac{1}{2}(\varkappa-1)) \end{array}\right.$$

Hierin sind die Zahlen p_1, p_2, c_1, c_2, c_3 ganz beliebig.

In gleicher Weise findet man:

$$(B.)\left\{\begin{array}{l} \sum_{s=0}^{s=\varkappa-1} e^{\frac{2\pi i}{\varkappa} g t^2 s} \\ \cdot \vartheta\left(v_1-c_2v_2, \varkappa v_2;\ \frac{1}{\varkappa}(\tau_{11}-2c_2\tau_{12}+c_2^2\tau_{22}-2p_1^2 s-2c_1),\ (2\tau_{12}-2c_2\tau_{22}),\ \varkappa\tau_{22}\right)_5 = 0 \end{array}\right.$$

$$(C.) \quad \sum_{s=0}^{s=\varkappa-1} e^{\frac{2\pi i}{\varkappa} g t^2 s}\, \vartheta\left(\varkappa v_1, v_2;\ \varkappa\tau_{11}, 2\tau_{12}, \frac{1}{\varkappa}(\tau_{22}-2p_2^2 s-2c_3)\right)_5 = 0.$$

Auch hierin sind die Zahlen p_1, p_2, c_1, c_2, c_3 ganz beliebig.

Es sind jetzt noch die den Gleichungen (1^b.) entsprechenden Gleichungen aufzustellen. — Um den Werth der Summe

$$\sum_{s=0}^{s=\varkappa-1} \vartheta\left(v_1, v_2;\ \frac{1}{\varkappa}(\tau_{11}-2p_1^2 s-2c_1), \frac{1}{\varkappa}(2\tau_{12}-4p_1p_2 s-2c_2), \frac{1}{\varkappa}(\tau_{22}-2p_2^2 s-2c_3)\right)_5$$

zu erhalten, muss man zwei Fälle unterscheiden: 1) die Zahl p_2 sei nicht congruent Null mod. $\varkappa$. Dann bestimmt man eine Zahl p_2' durch die Congruenz

$$p_2p_2' \equiv 1 \pmod{\varkappa}$$

und setzt

$$p_1p_2' = p_1',$$

so dass p_1' eine Lösung der Congruenz

$$p_1'p_2 \equiv p_1 \pmod{\varkappa}$$

---

dann möglich, wenn $1-t^2 \equiv 0$, also $a_2 \equiv \pm 2p_1p_2$, oder da p_1 und p_2 ganz beliebig sind, wenn

$$a_2 \equiv 2p_1p_2 \pmod{\varkappa}.$$

Dass, wenn p_1 oder p_2 congruent Null ist, auch $a_2 \equiv 0$, also auch hier $a_2 \equiv 2p_1p_2$ ist, bedarf wohl kaum eines Beweises.

wird, und führt statt s den neuen Summationsbuchstaben r durch die Congruenz

$$s \equiv p_2'^2 r \quad (\text{mod. } \varkappa)$$

ein. Dadurch nimmt die obige Summe mit Rücksicht auf die Bemerkung am Ende des § 1 die Form an:

$$\sum_{r=0}^{r=\varkappa-1} \vartheta\Big(v_1, v_2; \frac{1}{\varkappa}(\tau_{11}-2p_1'^2 r-2c_1), \frac{1}{\varkappa}(2\tau_{12}-4p_1' r-2c_2), \frac{1}{\varkappa}(\tau_{22}-2r-2c_3)\Big)_5,$$

und setzt man hierin den Ausdruck (2^a.) der Thetafunction in den Functionen $\varphi(h_1, h_2)$, so erhält man genau den $\varkappa$-fachen Ausdruck (2^b.) der Function

$$\vartheta\Big(v_1-p_1'v_2, \varkappa v_2; \frac{1}{\varkappa}(\tau_{11}-2p_1'\tau_{12}+p_1'^2\tau_{22}-2c_1+2c_2p_1'-2c_3p_1'^2), \ldots\Big)_5;$$

also ist

$$(D^a.)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{s=0}^{s=\varkappa-1} \vartheta\Big(v_1, v_2; \frac{1}{\varkappa}(\tau_{11}-2p_1^2 s-2c_1), \frac{1}{\varkappa}(2\tau_{12}-4p_1p_2 s-2c_2), \frac{1}{\varkappa}(\tau_{22}-2p_2^2 s-2c_3)\Big)_5 \\ = \varkappa\vartheta\Big(v_1-p_1'v_2, \varkappa v_2; \frac{1}{\varkappa}(\tau_{11}-2p_1'\tau_{12}+p_1'^2\tau_{22}-2c_1+2c_2p_1'-2c_3p_1'^2), (2\tau_{12}-2p_1'\tau_{22}), \varkappa\tau_{22}\Big)_5. \end{cases}$$

Dabei ist p_1' durch die Congruenz

$$p_1'p_2 \equiv p_1 \quad (\text{mod. } \varkappa)$$

bestimmt.

2) Es sei $p_2 \equiv 0$ (mod. $\varkappa$). Es ist alsdann

$$(D^b.)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{s=0}^{s=\varkappa-1} \vartheta\Big(v_1, v_2; \frac{1}{\varkappa}(\tau_{11}-2p_1^2 s-2c_1), \frac{1}{\varkappa}(2\tau_{12}-2c_2), \frac{1}{\varkappa}(\tau_{22}-2c_3)\Big)_5 \\ = \varkappa\vartheta\Big(\varkappa v_1, v_2; \varkappa\tau_{11}, 2\tau_{12}, \frac{1}{\varkappa}(\tau_{22}-2c_3)\Big)_5, \end{cases}$$

wie man erkennt, wenn man die Ausdrücke (2^a.) und (2^c.) der Thetafunctionen in den Functionen $\varphi(h_1, h_2)$ substituirt.

In derselben einfachen Weise, wie bei der letzten Gleichung, weist man die Richtigkeit der Gleichungen nach:

$$(E.)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{s=0}^{s=\varkappa-1} \vartheta\Big(v_1-c_2v_2, \varkappa v_2; \frac{1}{\varkappa}(\tau_{11}-2c_2\tau_{12}+c_2^2\tau_{22}-2p_1^2 s-2c_1), (2\tau_{12}-2c_2\tau_{22}), \varkappa\tau_{22}\Big)_5 \\ = \varkappa\vartheta(\varkappa v_1, \varkappa v_2; \varkappa\tau_{11}, 2\varkappa\tau_{12}, \varkappa\tau_{22})_5, \end{cases}$$

$$(F.)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{s=0}^{s=\varkappa-1} \vartheta\Big(\varkappa v_1, v_2; \varkappa\tau_{11}, 2\tau_{12}, \frac{1}{\varkappa}(\tau_{22}-2p_2^2 s-2c_3)\Big)_5 \\ = \varkappa\vartheta(\varkappa v_1, \varkappa v_2; \varkappa\tau_{11}, 2\varkappa\tau_{12}, \varkappa\tau_{22})_5. \end{cases}$$

Die Gleichungen (*A.*), (*B.*), (*C.*), (*D.*), (*E.*), (*F.*) haben noch nicht ganz genau die Form der Gleichungen (1.); wenn man aber setzt:

$$\vartheta\Big(v_1, v_2;\ \frac{1}{\varkappa}(\tau_{11}-2\lambda_1), \frac{1}{\varkappa}(2\tau_{12}-2\lambda_2), \frac{1}{\varkappa}(\tau_{22}-2\lambda_3)\Big)_5 = F_1(v_1, v_2;\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3),$$

$$\vartheta\Big(v_1-\lambda_2 v_2, \varkappa v_2;\ \frac{1}{\varkappa}(\tau_{11}-2\lambda_2\tau_{12}+\lambda_2^2\tau_{22}-2\lambda_1), (2\tau_{12}-2\lambda_2\tau_{22}), \varkappa\tau_{22}\Big)_5$$
$$= i^{\frac{1}{2}(\varkappa-1)}\varkappa^{-\frac{1}{2}}F_2(v_1, v_2;\ \lambda_1, \lambda_2, 0),$$

$$\vartheta\Big(\varkappa v_1, v_2;\ \varkappa\tau_{11}, 2\tau_{12}, \frac{1}{\varkappa}(\tau_{22}-2\lambda_3)\Big)_5 = i^{\frac{1}{2}(\varkappa-1)}\varkappa^{-\frac{1}{2}}F_3(v_1, v_2;\ 0, 0, \lambda_3),$$

$$\vartheta(\varkappa v_1, \varkappa v_2;\ \varkappa\tau_{11}, 2\varkappa\tau_{12}, \varkappa\tau_{22})_5 = (-1)^{\frac{1}{2}(\varkappa-1)}\varkappa^{-1}F_4(v_1, v_2;\ 0, 0, 0),$$

so lassen sich diese Gleichungen sämmtlich in der Form schreiben:

$$\sum_{s=0}^{s=\varkappa-1} e^{\frac{2\pi i}{\varkappa}gt^2 s} F_\alpha(v_1, v_2;\ p_1^2 s+c_1, 2p_1p_2 s+c_2, p_2^2 s+c_3) = 0,$$

$$\sum_{s=0}^{s=\varkappa-1} F_\alpha(v_1, v_2;\ p_1^2 s+c_1, 2p_1p_2 s+c_2, p_2^2 s+c_3) = i^{\frac{1}{2}(\varkappa-1)}\varkappa^{\frac{1}{2}}F_\beta(v_1, v_2;\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3),$$

und zwar ist, wenn

erstens $\alpha = 1$ ist, p_1, p_2, c_1, c_2, c_3 beliebig, und

a) wenn p_2 nicht $\equiv 0 \pmod{\varkappa}$, so ist $\beta = 2$, $\lambda_1 = c_1 - c_2 p_1' + c_3 p_1'^2$, $\lambda_2 = p_1'$, $\lambda_3 = 0$, wobei

$$p_1' p_2 \equiv p_1 \pmod{\varkappa},$$

b) wenn $p_2 \equiv 0 \pmod{\varkappa}$, so ist $\beta = 3$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = c_3$;

zweitens, wenn $\alpha = 2$, so ist p_1, c_1, c_2 beliebig, $p_2 = c_3 = 0$, $\beta = 4$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$;

drittens, wenn $\alpha = 3$, so ist p_2, c_3 beliebig, $p_1 = c_1 = c_2 = 0$, $\beta = 4$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Die Functionen F_α genügen dabei zu Folge der Bemerkung am Ende des § 1 der Gleichung

$$(3.)\qquad F_\alpha(v_1, v_2;\ \lambda_1+m_1\varkappa, \lambda_2+m_2\varkappa, \lambda_3+m_3\varkappa) = F_\alpha(v_1, v_2;\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3),$$

wenn m_1, m_2, m_3 ganze Zahlen sind. —

Die Darstellung (2^a.) der Thetafunction

$$\vartheta\Big(v_1, v_2;\ \frac{1}{\varkappa}(\tau_{11}-2\lambda_1), \ldots\Big)_5$$

durch die Functionen $\varphi(h_1, h_2)$ führt auch noch auf einen Zusammenhang zwischen der Thetafunction und der zweifach *Gauss*ischen Reihe. Setzt man nämlich in die Gleichung

$$\sqrt{\tau_{12}^2-\tau_{11}\tau_{22}}\sum_{(n)} e^{\pi i g(0, 0;\ n_1+w_1, n_2+w_2;\ \tau_{11}, 2\tau_{12}, \tau_{22})}$$
$$= \sum_{(n)} e^{\pi i g(w_1, w_2;\ n_1, n_2;\ \sigma_{11}, 2\sigma_{12}, \sigma_{22})},$$

welche eine lineare Transformation darstellt, und in der

$$\sigma_{11} = -\tau_{22}:(\tau_{11}\tau_{22}-\tau_{12}^2), \quad \sigma_{12} = \tau_{12}:(\tau_{11}\tau_{22}-\tau_{12}^2), \quad \tau_{22} = -\tau_{11}:(\tau_{11}\tau_{22}-\tau_{12}^2)$$

ist, den Werth $\frac{\varepsilon\mu_1}{\varkappa}$, bez. $\frac{\varepsilon\mu_2}{\varkappa}$ an Stelle von w_1, bez. w_2, und den Werth $\varkappa\tau_{11}$, bez. $\varkappa\tau_{12}$, $\varkappa\tau_{22}$ an Stelle von τ_{11}, bez. τ_{12}, τ_{22}, und summirt die Gleichung über $\varepsilon = +1$ und -1, so wird die linke Seite gleich $\varphi(\mu_1, \mu_2)$, wenn man in $\varphi(\mu_1, \mu_2)$ die Argumente gleich Null setzt. Und lässt man jetzt die Werthe von τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} sich so verändern, dass die Coefficienten von i in σ_{11} und σ_{22} immer grösser und grösser werden, so nähert sich der Werth der rechten Seite dem Werthe 2, so dass man hat:

$$\lim\left(\varkappa\sqrt{\tau_{12}^2-\tau_{11}\tau_{22}}\;\varphi(\mu_1, \mu_2)\right) = 2.$$

Demgemäss erhält man aus der Gleichung (2^a.)

$$\lim\left(\varkappa\sqrt{\tau_{12}^2-\tau_{11}\tau_{22}}\,\vartheta\left(0, 0; \tfrac{1}{\varkappa}(\tau_{11}-2\lambda_1), \tfrac{1}{\varkappa}(2\tau_{12}-2\lambda_2), \tfrac{1}{\varkappa}(\tau_{22}-2\lambda_3)\right)_5\right)$$
$$= 1+2\sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{1}{2}(\varkappa-1)}\left(e^{-\frac{2\pi i}{\varkappa}\mu^2\lambda_1}+e^{-\frac{2\pi i}{\varkappa}\mu^2\lambda_3}\right)$$
$$+2\sum_{\mu_1,\mu_2=1}^{\frac{1}{2}(\varkappa-1)}\left(e^{-\frac{2\pi i}{\varkappa}(\mu_1^2\lambda_1+\mu_1\mu_2\lambda_2+\mu_2^2\lambda_3)}+e^{-\frac{2\pi i}{\varkappa}(\mu_1^2\lambda_1-\mu_1\mu_2\lambda_2+\mu_2^2\lambda_3)}\right).$$

Die rechte Seite hierin ist genau gleich

$$\sum_{\mu_1,\mu_2=0}^{\varkappa-1} e^{-\frac{2\pi i}{\varkappa}(\mu_1^2\lambda_1+\mu_1\mu_2\lambda_2+\mu_2^2\lambda_3)},$$

also genau gleich der zweifach *Gauss*ischen Reihe. Bemerkenswerth ist, dass im Exponenten der Glieder der *Gauss*ischen Reihe das Product $\mu_1\mu_2$ nicht den Zahlenfactor 2 hat*).

§ 3.

Die Functionen F_i^2, d. i. also abgesehen von constanten Multiplicatoren die Quadrate der transformirten Thetafunctionen, lassen sich, wie ich

*) Auf diese Beziehung zwischen der Thetafunction und der zweifach *Gauss*ischen Reihe hat mich Herr *Kronecker* aufmerksam gemacht, als ich ihm diese Arbeit zum Einrücken in das Journal für Mathematik einreichte. Herr *Kronecker* hat, wie er mir mittheilte, diese Beziehungen wie die in diesem Paragraphen enthaltenen Resultate schon am 27. Febr. 1868 in einer Abhandlung „über die verschiedenen Beweise des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste" der Akademie zu Berlin vorgelegt (vgl. Monatsberichte von 1868, S. 132), ohne sie jedoch zu veröffentlichen; auf sein Anrathen habe ich auch diesem Paragraphen die vorliegende Fassung gegeben, während ich früher zuerst die Gleichungen (*A*.), (*B*.), ... ableitete und aus diesen die Zerlegung (2.) folgerte.

im Folgenden zeigen will, rational durch die ursprünglichen Thetafunctionen ausdrücken, ohne dass dabei noch andere Functionen nothwendig werden. Der Einfachheit der dabei gebrauchten Formeln halber will ich annehmen, es seien λ_1, λ_2, λ_3 durch 4 theilbar

$$\lambda_s = 4\lambda'_s, \qquad (s=1,2,3)$$

was auf Grund der Gleichung (3.) geschehen kann.

Bezeichnet man nun mit s, m_1, m_2, n_1, n_2 beliebige Zahlen, von denen die 4 letzteren der Bedingung genügen:

$$(4.) \qquad m_1 n_2 - m_2 n_1 = 1,$$

so ist der Ausdruck der transformirten Fundamentalthetafunction

$$\vartheta\Big(v_1, v_2;\ \frac{1}{\varkappa}(\tau_{11}-8\lambda'_1), \ldots\Big)_5$$

durch die ursprünglichen Thetafunctionen $\vartheta(v_1, v_2;\ \tau_{11}, 2\tau_{12}, \tau_{22})_k$, die ich hier und im Folgenden einfach mit $\vartheta(v_1, v_2)_k$ bezeichnen will, der folgende:

$$(5.) \left\{ \begin{aligned} &\vartheta\Big(v_1, v_2;\ \frac{1}{\varkappa}(\tau_{11}-8\lambda'_1), \frac{1}{\varkappa}(2\tau_{12}-8\lambda'_2), \frac{1}{\varkappa}(\tau_{22}-8\lambda'_3)\Big)_5 \\ &= C\sum_\mu e^{\pi i\chi(\mu)}\prod_\nu \vartheta\Big(v_1+\frac{\nu}{\varkappa}\tau_1(m)+\frac{\mu}{\varkappa}\tau_1(n)-s\frac{m_2}{\varkappa},\ v_2+\frac{\nu}{\varkappa}\tau_2(m)+\frac{\mu}{\varkappa}\tau_2(n)+s\frac{m_1}{\varkappa}\Big)_5. \end{aligned} \right.$$

Dabei ist C eine Constante,

$$\tau_1(p) = p_1(\tau_{11}-8\lambda'_1)+p_2(\tau_{12}-4\lambda'_2), \qquad \tau_2(p) = p_1(\tau_{12}-4\lambda'_2)+p_2(\tau_{22}-8\lambda'_3)$$

(für $p = m, n$), und

$$\chi(\mu) = 2\mu(n_1 v_1 + n_2 v_2) + \frac{\mu^2}{\varkappa}(n_1\tau_1(n) + n_2\tau_2(n)),$$

und das Product über μ und die Summe über ν ist von $-\frac{\varkappa-1}{2}$ bis $\frac{\varkappa-1}{2}$ zu nehmen. Man überzeugt sich von der Richtigkeit der Gleichung dadurch, dass man die Argumente um die transformirten Perioden

$$0, 1;\ 1, 0;\ \frac{1}{\varkappa}\tau_1(m), \frac{1}{\varkappa}\tau_2(m);\ \frac{1}{\varkappa}\tau_1(n), \frac{1}{\varkappa}\tau_2(n)$$

vermehrt, aus denen sich zu Folge der Gleichung (4.) die sämmtlichen transformirten Perioden ganzzahlig zusammensetzen lassen; denn dadurch ändert sich die Gleichung nicht, was ja die hinreichende und nothwendige Bedingung ihrer Richtigkeit ist.

Der Einfachheit halber will ich in der Folge $s = 0$ annehmen.

Den Exponentialfactor $e^{\pi i\chi(\mu)}$ ersetze ich, wie dies auf Grund der Formeln, welche

$$\vartheta(v_1+\tfrac{1}{2}p_1+\tfrac{1}{2}q_1\tau_{11}+\tfrac{1}{2}q_2\tau_{22},\quad v_2+\tfrac{1}{2}p_2+\tfrac{1}{2}q_1\tau_{12}+\tfrac{1}{2}q_2\tau_{22})_h$$

in $\vartheta(v_1, v_2)_k$ überführen, geschehen kann, durch

$$(6.)\quad e^{\pi i\chi(\mu)} = \frac{\vartheta^2\Big(\frac{\mu}{2}\tau_1(n), \frac{\mu}{2}\tau_2(n)\Big)_5 \vartheta^2\Big(\frac{(\varkappa-1)\mu}{2\varkappa}\tau_1(n), \frac{(\varkappa-1)\mu}{2\varkappa}\tau_2(n)\Big)_5 \vartheta(v_1, v_2)_5}{\vartheta^2(0,0)_l\, \vartheta^2\Big(\frac{\mu}{2\varkappa}\tau_1(n), \frac{\mu}{2\varkappa}\tau_2(n)\Big)_l\, \vartheta(v_1+\mu\tau_1(n), v_2+\mu\tau_2(n))_5},$$

wobei $l = 5$, wenn μ gerade, und wenn μ ungerade, $l = 01$, oder $= 4$, oder $= 23$ ist, je nachdem n_1 ungerade und n_2 gerade, oder n_1 gerade und n_2 ungerade, oder n_1 und n_2 ungerade ist. Alsdann will ich die rechte Seite der Gleichung (5.), abgesehen von der unbestimmten Constanten C, mit $\psi(\vartheta_5, \vartheta_i;\ \tau_\alpha(m))$ bezeichnen:

$$(5^a.)\quad \vartheta\Big(v_1, v_2;\ \frac{1}{\varkappa}(\tau_{11}-8\lambda_1'), \frac{1}{\varkappa}(2\tau_{12}-8\lambda_2'), \frac{1}{\varkappa}(\tau_{22}-8\lambda_3')\Big)_5 = C\psi(\vartheta_5, \vartheta_i;\ \tau_\alpha(m)).$$

Die entsprechenden Formeln für die übrigen Thetafunctionen erhalte ich, indem ich die Argumente um halbe ursprüngliche Perioden vermehre. Es ergiebt sich:

$$(5^b.)\quad \vartheta\Big(v_1, v_2;\ \frac{1}{\varkappa}(\tau_{11}-8\lambda_1'), \frac{1}{\varkappa}(2\tau_{12}-8\lambda_2'), \frac{1}{\varkappa}(\tau_{22}-8\lambda_3')\Big)_h = C\psi(\vartheta_h, \vartheta_i;\ \tau_\alpha(m)).$$

Die Constante C hat dabei für alle Indices h der Thetafunctionen denselben Werth.

Nun ist bekanntlich

$$(7.)\quad \begin{cases} \Big[\frac{\partial}{\partial v_1}\vartheta(v_1, v_2)_1 \frac{\partial}{\partial v_2}\vartheta(v_1, v_2)_3 - \frac{\partial}{\partial v_1}\vartheta(v_1, v_2)_3 \frac{\partial}{\partial v_2}\vartheta(v_1, v_2)_1\Big]_{v_1=v_2=0} \\ \qquad = \pi^2\vartheta(0,0)_5\, \vartheta(0,0)_0\, \vartheta(0,0)_2\, \vartheta(0,0)_4, \end{cases}$$

und mit Rücksicht auf diese Gleichung nimmt der Ausdruck für die Function $F_1^2(v_1, v_2;\ 4\lambda_1', 4\lambda_2', 4\lambda_3')$ die folgende Form an, in der ich zur Abkürzung $\vartheta[v_1, v_2]_h$ anstatt

$$\vartheta\Big(v_1, v_2;\ \frac{1}{\varkappa}(\tau_{11}-8\lambda_1'), \ldots\Big)_h$$

geschrieben habe:

$$\pi^2 F_1^2(v_1, v_2;\ 4\lambda_1', 4\lambda_2', 4\lambda_3') = \frac{\vartheta^2[v_1, v_2]_5}{\vartheta[0,0]_5\, \vartheta[0,0]_0\, \vartheta[0,0]_2\, \vartheta[0,0]_4}$$

$$\cdot\Big[\frac{\partial}{\partial v_1}\vartheta[v_1, v_2]_1 \frac{\partial}{\partial v_2}\vartheta[v_1, v_2]_3 - \frac{\partial}{\partial v_1}\vartheta[v_1, v_2]_3 \frac{\partial}{\partial v_2}\vartheta[v_1, v_2]_1\Big]_{v_1=v_2=0}.$$

Substituire ich jetzt hierin für $\vartheta[v_1, v_2]_h$ die Ausdrücke $C\psi(\vartheta_h, \vartheta_i;\ \tau_\alpha(m))$, so erhalte ich die gesuchte Darstellung von $F_1^2(v_1, v_2;\ 4\lambda_1', 4\lambda_2', 4\lambda_3')$, die ich mit

$$(8^a.)\quad \pi^2 F_1^2(v_1, v_2;\ 4\lambda_1', 4\lambda_2', 4\lambda_3') = \Psi(v_1, v_2;\ \vartheta_l;\ \tau_\alpha(m))$$

bezeichnen will. Der Ausdruck Ψ enthält nicht mehr die unbestimmte Constante C.

Die entsprechenden Ausdrücke für die übrigen Functionen F habe ich mit Hilfe der linearen Transformation der Thetafunctionen hergestellt. Wendet man nämlich die lineare Transformation

$$\vartheta(w_1, w_2;\ \tau_{11}, 2\tau_{12}, \tau_{22})_{k_h}$$

$$= c\varepsilon_h e^{-\pi i \frac{w_2^2}{\tau_{22}}}\, \vartheta\Big(w_1 - \frac{\tau_{12}}{\tau_{22}} w_2, -\frac{1}{\tau_{22}} w_2;\ \frac{\tau_{11}\tau_{22}-\tau_{12}^2}{\tau_{22}}, -2\frac{\tau_{12}}{\tau_{22}}, -\frac{1}{\tau_{22}}\Big)_h,$$

(bei welcher für $h = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 01, 34$ der Index $k_h = 03, 13, 23, 3, 34, 5, 01, 4$ ist, und die Constante ε_h überall den Werth 1 hat ausser bei $h = 3$, wo $\varepsilon_h = -i$ ist) auf die beiden Seiten der Gleichung (5^b.) an, nachdem man in derselben λ_3' hat Null werden lassen, und setzt alsdann τ_{11}, bez. $\tau_{12}, \tau_{22}, v_1, v_2$ an Stelle von

$$(\tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}^2) : \tau_{22},\ \text{bez.}\ -\tau_{12} : \tau_{22},\ -1 : \tau_{22},\ v_1 - \frac{\tau_{12}}{\tau_{22}} v_2,\ -\frac{v_2}{\tau_{22}},$$

so erhält man einen Ausdruck für

$$\vartheta\Big(v_1 - 4\lambda_2' v_2, \varkappa v_2;\ \frac{1}{\varkappa}(\tau_{11} - 8\lambda_2'\tau_{12} + \cdots), \ldots\Big)_h,$$

der sich von dem mit $C\psi(\vartheta_h, \vartheta_l;\ \tau_\alpha(m))$ bezeichneten Ausdruck nur dadurch unterscheidet, dass die Constante C einen andern Werth hat, dass an Stelle von $\tau_1(m), \tau_2(m)$, bez. $\tau_1(n), \tau_2(n)$ die Grössen

$$\tau_1'(p) = p_1(\tau_{11} - 4\lambda_2'\tau_{12} - 8\lambda_1') - p_2.4\lambda_2',\quad \tau_2'(p) = p_1(\tau_{12} - 4\lambda_2'\tau_{22}) - p_2,\quad (p = m, n)$$

stehen, und dass an Stelle der Thetafunction $\vartheta(v_1, v_2)_l$ eventuell eine andere Thetafunction, $\vartheta(v_1, v_2)_{l_1}$, steht, wobei, wo μ gerade ist, $l_1 = 5$, wo μ ungerade ist, $l_1 = 01$, oder $= 34$, oder $= 2$ ist, je nachdem n_1 ungerade und n_2 gerade, oder n_1 gerade und n_2 ungerade, oder n_1 und n_2 ungerade ist. (Vergl. (6.)) Dem entsprechend muss man diesen Ausdruck, abgesehen von der multiplicativen Constanten mit $\psi(\vartheta_h, \vartheta_{l_1};\ \tau_\alpha'(m))$ bezeichnen; und man findet alsdann:

$$(9.)\quad \begin{cases} \vartheta\Big(v_1 - 4\lambda_2' v_2, \varkappa v_2;\ \frac{1}{\varkappa}(\tau_{11} - 8\lambda_2'\tau_{12} + 16\lambda_2'^2\tau_{22} - 8\lambda_1'), (2\tau_{12} - 8\lambda_2'\tau_{22}), \varkappa\tau_{22}\Big)_h \\ \qquad = \varepsilon_h^{\varkappa-1} C_1 \psi(\vartheta_h, \vartheta_{l_1};\ \tau_\alpha'(m)). \end{cases}$$

Wenn ich nun zur augenblicklichen Abkürzung $\vartheta|w_1, w_2|_h$ anstatt

$$\vartheta\Big(w_1, w_2;\ \frac{1}{\varkappa}(\tau_{11} - 8\lambda_2'\tau_{12} + \cdots), \ldots\Big)_h$$

schreibe, so folgt mit Hilfe der Gleichung (7.), da

$$\left[\frac{\partial}{\partial v_1}\vartheta\{v_1-4\lambda_2'v_2,\varkappa v_2\}_1\frac{\partial}{\partial v_2}\vartheta\{v_1-4\lambda_2'v_2,\varkappa v_2\}_3-\cdots\right]_{v_1=v_2=0}$$
$$=\varkappa\left[\frac{\partial}{\partial v_1'}\vartheta\{v_1',v_2'\}_1\frac{\partial}{\partial v_2'}\vartheta\{v_1',v_2'\}_3-\cdots\right]_{v_1'=v_2'=0}$$

ist:

$$\pi^2F_2^2(v_1,v_2;\ 4\lambda_1',4\lambda_2',0)=(-1)^{\frac{1}{2}(\varkappa-1)}\frac{\vartheta^2\{v_1-4\lambda_2'v_2,\varkappa v_2\}_5}{\vartheta\{0,0\}_5\,\vartheta\{0,0\}_0\,\vartheta\{0,0\}_2\,\vartheta\{0,0\}_4}$$
$$\cdot\left[\frac{\partial}{\partial v_1}\vartheta\{v_1-4\lambda_2'v_2,\varkappa v_2\}_1\frac{\partial}{\partial v_1}\{v_1-4\lambda_2'v_2,\varkappa v_2\}_3\right.$$
$$\left.-\frac{\partial}{\partial v_1}\vartheta\{v_1-4\lambda_2'v_2,\varkappa v_2\}_3\frac{\partial}{\partial v_2}\vartheta\{v_1-4\lambda_2'v_2,\varkappa v_2\}_1\right]_{v_1=v_2=0},$$

und substituire ich hierin für die Thetafunctionen den obigen Ausdruck (9.), so nimmt die rechte Seite eine Gestalt an, die ich entsprechend der Bezeichnung in der Gleichung (8^a.) mit

$$(8^b.)\qquad \pi^2F_2^2(v_1,v_2;\ 4\lambda_1',4\lambda_2',0)=\Psi(v_1,v_2;\ \vartheta_{l_1};\ \tau_\alpha'(m))$$

bezeichnen muss.

Durch die ganz gleiche Betrachtung, wenn man nur die lineare Transformation, bei welcher an Stelle von τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} die neuen Perioden $-1:\tau_{11}$, $-\tau_{12}:\tau_{22}$, $(\tau_{11}\tau_{22}-\tau_{12}^2):\tau_{22}$ treten, anwendet, findet man

$$(8^c.)\qquad \pi^2F_3^2(v_1,v_2;\ 0,0,4\lambda_3')=\Psi(v_1,v_2;\ \vartheta_{l_2};\ \tau_\alpha''(m)),$$
$$(8^d.)\qquad \pi^2F_4^2(v_1,v_2;\ 0,0,0\ )=\Psi(v_1,v_2;\ \vartheta_{l_3};\ \tau_\alpha'''(m)),$$

wobei

$$\begin{aligned}\tau_1''(p)&=-p_1+p_2\tau_{12}, & \tau_2''(p)&=p_2(\tau_{22}-8\lambda_3'),\\ \tau_1'''(p)&=-p_1, & \tau_2'''(p)&=-p_2\end{aligned}\qquad (p=m,n)$$

und (vergl. (5.), (6.)), wo μ gerade ist, $l_2=l_3=5$, wo μ ungerade ist, $l_2=12$, oder $=4$, oder $=03$, $l_3=12$, oder $=34$, oder $=0$ ist, je nachdem n_1 ungerade und n_2 gerade, oder n_1 gerade und n_2 ungerade, oder n_1 und n_2 ungerade ist. —

Die Ausdrücke Ψ kann man ferner verwandeln in das Product aus $\pi^2\vartheta^{2\varkappa}(v_1,v_2)_5:\vartheta^{2\varkappa-2}(0,0)_5$ und einem Factor, der rational aus Quotienten von Thetafunctionen gebildet ist. Es gehen nämlich bei Anwendung der Formeln, welche $\vartheta(v_1+a_1,v_2+a_2)_f\,\vartheta(v_1-a_1,v_2-a_2)_f$ durch $\vartheta(v_1,v_2)_g$ und $\vartheta(a_1,a_2)_h$ darstellen, die einzelnen Producte des Ausdruckes (5.) von

$$\vartheta\left(v_1,v_2;\ \frac{1}{\varkappa}(\tau_{11}-8\lambda_1'),\ \ldots\right)_5$$

und der entsprechenden Ausdrücke von

$$\vartheta\left(v_1, v_2; \frac{1}{\varkappa}(\tau_{11}-8\lambda_1'), \ldots\right)_k$$

über in Summen von Gliedern der Form:

$$e^{\pi i \chi(\mu)} \prod_\nu \frac{\vartheta(0,0)_{h_0}\,\vartheta\left(\frac{\nu}{\varkappa}\tau_1(m), \frac{\nu}{\varkappa}\tau_2(m)\right)_{f_\nu}\,\vartheta\left(v_1+\frac{\mu}{\varkappa}\tau_1(n), v_2+\frac{\mu}{\varkappa}\tau_2(n)\right)_{g_\nu}}{\vartheta(0,0)_{h_\nu}},$$

wo f_ν, g_ν, h_ν bestimmte Indices bedeuten. Ferner kann man mittelst des Ausdruckes (6.) von $e^{\pi i\chi(\mu)}$, und auf Grund der aus der eben angewandten Formel abgeleiteten Gleichung

$$\vartheta(v_1-a_1, v_2-a_2)_g\,\vartheta(v_1-b_1, v_2-b_2)_f$$
$$= \vartheta(v_1, v_2)_5\,\vartheta(v_1-(a_1+b_1), v_2-(a_2+b_2))_5 \frac{\vartheta^2\left(\frac{a_1-b_1}{2}, \frac{a_2-b_2}{2}\right)_5}{\vartheta^2\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}\right)_5} R,$$

(wo R eine rationale Function von Thetaquotienten bedeutet, die für die Variablen v_1, v_2 oder die constanten Werthe $\frac{a_1 \pm b_1}{2}$, $\frac{a_2 \pm b_2}{2}$, bez. 0, 0 ausgerechnet sind) nachweisen, dass

$$e^{\pi i\chi(\mu)} \prod_\nu \vartheta\left(v_1+\frac{\mu}{\varkappa}\tau_1(n), v_2+\frac{\mu}{\varkappa}\tau_2(n)\right)_{g_\nu} = \vartheta(v_1, v_2)_h\,\vartheta^{\varkappa-1}(v_1, v_2)_5\,R_1,$$

wo R_1 eine rationale Function von Thetaquotienten bedeutet, die für die Variablen v_1, v_2 oder die constanten Werthe $\frac{\mu}{2\varkappa}\tau_1(n)$, $\frac{\mu}{2\varkappa}\tau_2(n)$, bez. 0, 0 ausgerechnet sind. Daraus erkennt man, dass der Ausdruck $\psi(\vartheta_h, \vartheta_i; \tau_\alpha(m))$ auf die Form gebracht werden kann:

$$\psi(\vartheta_h, \vartheta_i; \tau_\alpha(m)) = \frac{\prod_\nu \vartheta\left(\frac{\nu}{\varkappa}\tau_1(m), \frac{\nu}{\varkappa}\tau_2(m)\right)_5}{\vartheta^\varkappa(0,0)_5}\,\vartheta(v_1, v_2)_h\,\vartheta^{\varkappa-1}(v_1, v_2)_5\,R_2,$$

wo R_2 ebenso zusammengesetzt ist wie R_1. —

Aus dieser Beschaffenheit der Functionen ψ folgt nun mit Rücksicht auf die Gleichung (7.), dass

$$(10.)\qquad \Psi(v_1, v_2; \vartheta_i; \tau_\alpha(m)) = \pi^2 \frac{\vartheta^{2\varkappa}(v_1, v_2)_5}{\vartheta^{2(\varkappa-1)}(0,0)_5} R_3,$$

wo R_3 wieder ebenso beschaffen ist wie R_1 und R_2. Und hieraus geht hervor, dass

$$F_1^2(0, 0; 4\lambda_1', 4\lambda_2', 4\lambda_3') : \vartheta^2(0,0)_5$$

gleich einer rationalen Function von ursprünglichen Thetaquotienten ist, die für die Werthe

$$\frac{1}{2\varkappa}\tau_1(m),\ \frac{1}{2\varkappa}\tau_2(m),\ \text{bez.}\ \frac{1}{2\varkappa}\tau_1(n),\ \frac{1}{2\varkappa}\tau_2(n),\ \text{bez.}\ 0,0$$

der Argumente ausgerechnet sind. Da nun die Thetaquotienten, deren Argumente gleich dem $2\varkappa^{\text{ten}}$ Theil von Perioden sind, die Wurzeln von Gleichungen — den Theilungsgleichungen — sind, deren Coefficienten sich aus den für den Werth Null der Argumente ausgerechneten Thetafunctionen rational zusammensetzen, so sind auch die Functionen

$$F_1(0,0;\ 4\lambda_1',4\lambda_2',4\lambda_3'):\vartheta^2(0,0)_5$$

die Wurzeln von Gleichungen, deren Coefficienten rational aus den für den Werth Null der Argumente ausgerechneten ursprünglichen Thetafunctionen gebildet sind.

Dasselbe gilt auch von den übrigen Functionen F, da die Ausdrücke Ψ für dieselben die ganz gleiche Beschaffenheit haben. —

Die Ausdrücke $\Psi(0,0;\vartheta_{l_i};\tau_a^{(i)}(m))$ für die verschiedenen Functionen $\pi^2F_i(0,0;\ 4\lambda_1',4\lambda_2',4\lambda_3')$ unterscheiden sich nur dadurch von einander, dass die Thetaquotienten je für andere Bruchtheile der Perioden:

$$\frac{1}{2\varkappa}\tau_1(m),\ \frac{1}{2\varkappa}\tau_2(m);\ \frac{1}{2\varkappa}\tau_1(n),\ \frac{1}{2\varkappa}\tau_2(n)\quad\text{oder}\quad\frac{1}{2\varkappa}\tau_1'(m),\ \frac{1}{2\varkappa}\tau_2'(m);\ \text{etc.},$$

ausgerechnet sind, und dass an gewissen Stellen andere Thetafunctionen, ϑ_l, ϑ_{l_1}, etc., stehen. Nimmt man aber insbesondere $n_1=1$, $n_2=0$ an, so wird

$$F_1^2(0,0;\ 4\lambda_1',4\lambda_2',4\lambda_3'):\vartheta^2(0,0)_5 = \Psi(0,0;\ \vartheta_{01};\ \tau_a(m)):\pi^2\vartheta^2(0,0)_5,$$
$$F_2^2(0,0;\ 4\lambda_1',4\lambda_2',0)\ \ :\vartheta^2(0,0)_5 = \Psi(0,0;\ \vartheta_{01};\ \tau_a'(m)):\pi^2\vartheta^2(0,0)_5,$$

und die Ausdrücke auf der rechten Seite unterscheiden sich jetzt, für diese speciellen Werthe von n_1 und n_2, nur dadurch, dass die Quotienten der Thetafunctionen für verschiedene Bruchtheile der Perioden ausgerechnet sind; diese Ausdrücke sind also in derselben Weise aber je aus verschiedenen Wurzeln der Theilungsgleichungen zusammengesetzt, sie sind mithin conjugirte Functionen bezüglich dieser Gleichungen. Folglich genügen die sämmtlichen Functionen:

$$F_1^2(0,0;\ 4\lambda_1',4\lambda_2',4\lambda_3'):\vartheta^2(0,0)_5\quad\text{und}\quad F_2^2(0,0;\ 4\lambda_1',4\lambda_2',0):\vartheta^2(0,0)_5,$$

die diesen Ausdrücken gleich sind, einer und derselben Gleichung.

Nimmt man ferner $n_1 = 0$, $n_2 = 1$ an, so findet man durch dieselbe Betrachtung, dass dies auch je bezüglich der Functionen

$$F_1^2(0,0;\ 4\lambda_1', 4\lambda_2', 4\lambda_3') : \vartheta^2(0,0)_5 \quad \text{und} \quad F_3^2(0,0;\ 0,0,4\lambda_3') : \vartheta^2(0,0)_5,$$

$$\text{bez.}\ F_2^2(0,0;\ 4\lambda_1', 4\lambda_2', 0) \quad : \vartheta^2(0,0)_5 \quad \text{und} \quad F_4^2(0,0;\ 0,0,0) \quad : \vartheta^2(0,0)_5$$

der Fall ist.

Folglich sind wir zu dem Resultat gekommen, dass die sämmtlichen $1+\varkappa+\varkappa^2+\varkappa^3$ Functionen

$$F_i^2(0,0;\ 4\lambda_1', 4\lambda_2', 4\lambda_3') : \vartheta^2(0,0)_5$$

Wurzeln einer und derselben Gleichung sind.

Da $F_i(0,0;\ 4\lambda_1', 4\lambda_2', 4\lambda_3')$ unmittelbar das Quadrat einer transformirten Thetafunction, oder das Quadrat einer transformirten Thetafunction, die mit $\sqrt{(-1)^{\frac{1}{2}(\varkappa-1)}\varkappa}$ bez. $(-1)^{\frac{1}{2}(\varkappa-1)}\varkappa$ multiplicirt ist, bedeutet, so findet sich auch hier eine vollkommene Analogie mit den Thetafunctionen einer Variablen (vergl. die Einleitung).

§ 4.

Die Resultate, zu denen wir bezüglich der Fundamentalthetafunction gekommen sind, bleiben mit geringen Modificationen auch für die übrigen Thetafunctionen bestehen. Vermehrt man nämlich in den $1+\varkappa+\varkappa^2+\varkappa^3$ transformirten Thetafunctionen die Argumente v_1, v_2 um eine halbe ursprüngliche Periode

$$\tfrac{1}{2}\tau_\alpha = \tfrac{1}{2}q_\alpha + \tfrac{1}{2}q_1'\tau_{\alpha 1} + \tfrac{1}{2}q_2'\tau_{\alpha 2}, \qquad (\alpha = 1, 2)$$

so geht die Fundamentalthetafunction über in eine andere Thetafunction mal

$$i^\nu e^{-\varkappa\frac{\pi i}{2}\{q_1'(2v_1+\frac{1}{2}\tau_1)+q_2'(2v_2+\frac{1}{2}\tau_2)\}},$$

wo ν eine bestimmte Zahl ist. In den Gleichungen (*A.*), (*B.*), ... (*F.*) heben sich die Exponentialfactoren hinweg, da sie in allen Gliedern dieselben sind; ferner, wenn ich $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ durch 4 theilbar annehme, so werden die Indices der verwandelten Thetafunctionen überall einander gleich, und die Potenz von i, die zu den einzelnen Gliedern als Factor tritt, wird überall gleich 1, ausser auf den rechten Seiten der Gleichungen (*D.*), (*E.*), (*F.*), wo sie bei gewissen Thetafunctionen, aber nur wenn $\varkappa \equiv -1 \pmod{4}$, auch gleich -1 werden kann. Mit diesen Modificationen bleiben also die Gleichungen (*A.*), (*B.*), ... (*F.*) bestehen, welche Thetafunction in denselben auch an Stelle der Fundamentalthetafunction tritt.

Ferner, die Entwicklungen des § 3 hängen gar nicht davon ab, welche Thetafunction unter den Functionen F verstanden wird. Denn vermehrt man in den Gleichungen (10.) und in den entsprechenden Gleichungen die Argumente um die halben Perioden $\frac{1}{2}\tau_1$, $\frac{1}{2}\tau_2$, so heben sich in diesen Gleichungen der Exponentialfactor und die Potenz von i hinweg, und es tritt nur insofern eine Aenderung ein, als die Fundamentalthetafunction durch eine andere Thetafunction ersetzt wird, was auf die an diese Gleichungen geknüpften Entwicklungen keinen Einfluss hat.

Halle a. S., Februar 1883.

Bemerkungen und Zusätze zu *Steiners* Aufsätzen über Maximum und Minimum.

(Hierzu Figurentafel 1.)

(Von Herrn *Rudolf Sturm* in Münster i. W.)

Steiner hat sich bekanntlich längere Zeit mit Untersuchungen über Maxima und Minima der geometrischen Figuren beschäftigt. Zum Theile publicirte er sie als „Aufgaben und Lehrsätze", zum Theile aber auch in ausführlicheren Abhandlungen in den Bänden 13—18, 21, 24 dieses Journals und in den Monatsberichten der Berliner Akademie für 1836, 1837, 1838. Von den ausführlichen Abhandlungen treten besonders hervor der Aufsatz über den Krümmungsschwerpunkt ebener Curven (Monatsber. 1838; dieses Journal Bd. 21) und die beiden grossen Aufsätze: „Ueber Maximum und Minimum bei den Figuren in der Ebene, auf der Kugelfläche und im Raume überhaupt" (beide im 24. Bande dieses Journals, der erste auch in Bd. 6 der ersten Serie von *Liouvilles* Journal), welche ich im Folgenden, da ich mich insbesondere auf sie beziehen werde, mit 𝔄, 𝔅 citiren will. Auch in ihnen begnügt sich *Steiner* oft, zumal in den schwierigeren Partieen, mit der Angabe der Resultate oder kurzen Andeutungen.

Die gesammelten Werke *Steiners* bringen die erwähnten Arbeiten alle im zweiten Bande; 𝔄, 𝔅 sind die im Inhaltsverzeichnisse unter Nr. 16, 17 aufgezählten, die andern No. 3, 5—12.

Es scheint, als wenn gerade dieser Theil der Thätigkeit des grossen Geometers wenig zu weiteren Arbeiten Anregung gegeben hat; die Herausgabe der gesammelten Werke, für welche wir der Berliner Akademie zu grossem Danke verpflichtet sind, wird wohl darin Aenderung schaffen.

Ich erlaube mir, im Folgenden einige Betrachtungen zu veröffentlichen, zu denen mich das erneute Studium der *Steiner*schen Arbeiten über Maximum und Minimum angeregt hat.

Es haben mich vorzugsweise folgende Fragen beschäftigt.

Im *ersten Abschnitte* bespreche ich die Folgerungen, welche *Steiner* an den „Hauptsatz“, dass von allen ebenen Figuren gleichen Umfangs der Kreis den grössten Inhalt hat, in 𝔄 No. 19—25 geknüpft hat, discutire die Frage, ob bei gegebenen geraden Seiten und gegebener Länge L der Zwischenbogen oder gegebenem Inhalte stets ein und nur ein „Kreisstück“ möglich ist; was in 𝔄 nicht geschehen ist, so dass *Steiners* Umkehrungssatz, bei dem der Flächeninhalt als gegeben vorausgesetzt wird (No. 23), nicht ganz correct gefasst erscheint. Für den Fall, dass die Summe von mehr als zwei geraden Seiten statt der einzelnen Seiten gegeben ist (No. 24), gebe ich (§ 13) einen exacten Beweis, während derjenige von *Steiner*, wenn ich die freilich sehr kurze Andeutung richtig verstehe, auf einen — von ihm selbst an anderem Orte als nicht befriedigend bezeichneten — unendlichen Prozess hinausläuft. Sodann wende ich mich zu dem Satze (den ich kurz „Sectorsatz“ nenne), dass von allen Linien gegebener Länge, welche die Schenkel eines gegebenen Winkels verbinden, der Kreisbogen um den Scheitel als Centrum den grössten Inhalt mit den Schenkeln einschliesst (𝔄 No. 30). Aus der Darstellung *Steiners*, der sich mehrfach mit diesem Satze beschäftigt hat, bleibt unklar, ob er ihn auch bei dem *convexen* Winkel noch für richtig gehalten hat; einige Stellen lassen dies, handschriftliche Notizen hingegen das Gegentheil vermuthen; *Steiners* Beweis 𝔅 No. 20, der den convexen Winkel zuzulassen scheint, halte ich für nicht richtig oder wenigstens für unvollständig. Ich zeige, dass der Satz im Falle des convexen Winkels nicht mehr gilt, und weise das Maximum nach (§ 15).

Zum Schlusse des Abschnitts gebe ich, den neuerdings (Gött. Nachr. 1882) von Herrn *Edler* gelieferten directen Beweis des „Hauptsatzes“ umbildend und vereinfachend, einen *directen* Beweis des Sectorsatzes, der dann zugleich den Hauptsatz mit umfasst; worauf ja *Steiner* mehrfach hinzielt.

Im *zweiten Abschnitte* beschäftige ich mich mit den einem gegebenen Polygone eingeschriebenen Polygonen von kleinstem Umfange. In 𝔄 No. 63, 64 hat *Steiner* diese Frage in Angriff genommen; doch bleiben einige Fälle noch unerledigt. Er behandelt den Fall, dass das gegebene Polygon ungerade Seitenzahl hat, und im andern Fall gerader Seitenzahl nur den Specialfall, dass die Summe der geraden (oder ungeraden) Winkel zu 2π commensurabel ist. Aber auch selbst dann ist das gefundene Resultat nicht

immer brauchbar. Z. B. beim Dreiecke ist das Höhenfusspunkten-Dreieck nicht mehr das eingeschriebene Dreieck vom kleinsten Umfange, wenn das gegebene Dreieck stumpfwinklig ist, wie *Steiner* schon selbst bemerkt hat, und beim Kreisvierecke sind das Viereck der Fusspunkte der aus dem Diagonalenschnitte auf die Seiten gefällten Lothe und seine Parallel-Vierecke nicht mehr eingeschriebene Vierecke kleinsten Umfangs, wenn das gegebene Viereck den Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises ausschliesst. Ich erledige diese dem *Steiner*schen Resultate sich nicht subsumirenden Fälle des Dreiecks und Vierecks, so wie aber auch den von *Steiner* gar nicht behandelten Fall des *allgemeinen* Vierecks (vergl. in Bezug auf das Resultat § 33).

Sodann möchte ich hier zwei von mir gegebene einfache Beweise (§ 22, 24) von Maximums-Eigenschaften hervorheben, welche *Steiner* je am Ende von 𝔄 No. 63 III *A* und *B* ausgesprochen und selbst aus einem allgemeineren Satze abgeleitet hat.

Der kurze *dritte Abschnitt* bringt einige kleinere Sachen: einen geometrischen Beweis des von *Steiner* unbewiesen gelassenen Satzes 𝔅 No. 3 IV 2), die Ermittelung der kleinsten und grössten unter den Geraden, welche den Inhalt, bez. den Umfang eines Dreiecks hälften, sowie der Geraden, welche, durch einen gegebenen Punkt innerhalb eines Winkels gehend, von demselben das Dreieck kleinsten Umfangs abschneidet.

I.

§ 1. Den Satz, welchen *Steiner* in 𝔄 als Hauptsatz bezeichnet hat:

„*Der Kreis hat von allen (ebenen) Figuren gleichen Umfangs den grössten Inhalt und von allen Figuren gleichen Inhalts den kleinsten Umfang*“ hat er von verschiedenen Seiten her zu beweisen gesucht: wir finden Beweise in 𝔄 No. 17, 𝔅 No. 8, 9, 21, 25. In diesen Beweisen wird die Figur grössten Inhalts durch eine gewisse Eigenschaft charakterisirt, von der Beschaffenheit, dass bei jeder Figur, welche sie nicht hat, durch eine zugehörige Operation eine Vergrösserung des Inhalts, unter Beibehaltung des Umfangs, möglich ist. So ergiebt sich in 𝔄 No. 17, dass die Maximalfigur so beschaffen sein muss, dass jede zwei Punkte, welche ihren Umfang halbiren, aus jedem beliebigen weitern Punkte des Umfangs unter rechtem Winkel gesehen werden; in 𝔅 No. 9, dass jede 4 Punkte des Umfangs der

Maximalfigur auf einem Kreise liegen müssen. Aehnlich wird in andern Fällen verfahren. Es wird sich herausstellen, dass die genannte Operation doch bisweilen bei Figuren, welche die erwähnte Eigenschaft nicht besitzen, wegen gewisser Beschränkungen, nicht ausführbar wird, dass also bei derartigen Figuren auf die genannte Weise die Grösse, um deren Maximum oder Minimum es sich handelt, auch nicht vergrössert oder verkleinert werden kann, und dass sogar mehrfach gerade solche Figuren das Maximum oder Minimum aufweisen.

Ja selbst, wenn Beschränkungen nicht statt haben, wenn thatsächlich nur eine einzige Figur existirt, bei welcher die genannte Vergrösserungs- oder Verkleinerungs-Operation nicht ausführbar ist, wie bei den Beweisen des Hauptsatzes, wird man — und *Steiner* hat dies ja selbst an anderer Stelle bemerkt — von Beweisen der Art, wie sie oben geschildert sind, niemals recht befriedigt sein; obgleich ja sicher nur jene einzige Figur die Maximal-, bez. Minimalfigur sein kann. Und dies ist bekanntlich mehrfach in Bezug auf einige der *Steiner*schen Beweise geäussert worden.

§ 2. Befriedigend wird ein Beweis nur dann sein, wenn die betreffende Grösse bei der Maximal- oder Minimalfigur und bei einer beliebigen andern der Voraussetzung entsprechenden Figur *direct* verglichen wird; also etwa so, dass die letztere Figur derart verwandelt wird, dass die betreffende Grösse sich vergrössert, bez. verkleinert, aber wiederum nicht so, dass zur Ueberführung in die Maximal-, bez. Minimalfigur eine unendliche, oft gar nicht übersehbare Reihe von Verwandlungen nothwendig wird, oder — wenn ich den von Herrn *Geiser**) mitgetheilten Ausdruck *Dirichlet*s richtig verstehe —, dass die Maximal-, bez. Minimalfigur nur asymptotisch erreicht wird.

Z. B. in dem Beweise 𝔅 No. 9 des Hauptsatzes geschieht bei einer beliebigen Figur, bei welcher ja beliebige vier Punkte des Umfangs nicht auf einem Kreise liegen, die Vergrösserung dadurch, dass man deren Viereck in ein Kreisviereck, mit Beibehaltung der Seiten, verwandelt und dann die früheren Segmente wieder auf dieselben aufsetzt; so dass der Umfang erhalten bleibt. Aber eine Wiederholung der Operation zerstört die Wirkung der vorhergehenden, und es ist gar nicht abzusehen, wie man so zum Kreise selbst gelangen soll.

---

*) *Geiser,* Zur Erinnerung an *Jacob Steiner,* Zürich, 1874, S. 28.

Steiner selbst tadelt, wie schon bemerkt, in 𝔄 No. 5 den unendlichen Verwandlungsprozess an dem *Lhuilier*schen Beweise des Satzes, dass von allen Dreiecken gleichen Umfangs das gleichseitige den grössten Inhalt hat; obgleich bei diesem Beweise der Verlauf des Prozesses wenigstens übersichtlich ist, indem bei jedem der unendlich vielen construirten gleichschenkligen Dreiecke der Unterschied zwischen Basis und Schenkel kleiner als beim vorhergehenden ist, also durchweg ein Fortschritt auf das Ziel zu erfolgt.

In seinem Beweise II dieses Satzes hat *Steiner* selbst ein Muster eines solchen befriedigenden Beweises gegeben, indem er das beliebige Dreieck durch drei Transformationen, bei denen je der Umfang erhalten, der Inhalt vergrössert wird, in das gleichseitige überführt.

Einen solchen befriedigenden Beweis des „Hauptsatzes" hat nun neuerdings Herr *Edler* gefunden*). Ich werde später Gelegenheit haben, über denselben zu sprechen; jetzt will ich zunächst die Betrachtungen, welche *Steiner* an seinen ersten Beweis (𝔄 No. 17) anknüpft, verfolgen.

§ 3. Er giebt in No. 19 den Beweis des Satzes: *Von allen* (beliebig geformten) *Linien gegebener Länge L, die mit der* (geraden) *Verbindungslinie ihrer Endpunkte* (deren Länge beliebig ist, also auch 0 sein kann) *eine geschlossene Figur bilden, liefert der Halbkreis von der Länge L mit seinem Durchmesser die grösste Figur.*

Ich werde diesen Satz beim „Sectorsatz" verwerthen.

In No. 20 wird dann gezeigt, dass, wenn auch die Länge der genannten Verbindungslinie gegeben ist gleich $a < L$, die grösste Figur durch den Kreisbogen von der Länge L über der Sehne entsteht.

Beide Beweise zeichnen sich durch überaus grosse Einfachheit aus.

§ 4. *Steiner* geht dann in No. 21, 23 zur Vergleichung von *Figuren* über, *welche von n geraden Seiten a, b, c, ... und von beliebig geformten „Zwischenbogen" von der Gesammtlänge L eingeschlossen werden,* und findet *als grösste Figur das Kreisstück aus den gegebenen Stücken.* Er versteht dabei unter *dem Kreisstück zwischen n* (sich nicht durchschneidenden) *Sehnen* die von diesen Sehnen, welche alle dem nämlichen Kreise angehören, und den zwischen ihnen befindlichen Bogen dieses Kreises eingeschlossene Figur. Der Inhalt eines solchen Kreisstücks ändert sich nicht, wenn die Reihen-

*) Göttinger Nachrichten für 1882, S. 73; neuerdings noch (in französischer Uebersetzung) im Bull. des sciences mathém. 2. Ser. Bd. VII S. 198 erschienen.

folge der geraden und krummen Seiten, unter Beibehaltung der Längen derselben, verändert wird; wir wollen es uns deshalb am einfachsten in der Form vorstellen, dass die geraden Seiten an einander stossen und also die Zwischenbogen zu einem einzigen Bogen („Schliessungsbogen") — hier von der Länge L — sich vereinigen, und dieser dann an die grösste gerade Seite a anstösst.

In No. 23 fügt *Steiner* ohne Beweis (wie gewöhnlich bei Umkehrungssätzen, auch wenn der Beweis nicht so ohne Weiteres erhellt) den Umkehrungssatz zu: Sind die geraden Seiten $a, b, c, \ldots$ und der Inhalt F gegeben, so hat L beim Kreisstück den kleinsten Werth.

Steiner erörtert nicht die Frage, ob *bei gegebenen $a, b, c, \ldots$ und L oder F wirklich auch immer ein Kreisstück möglich ist.* Aus dem Wortlaute seiner Sätze, insbesondere des Umkehrungssatzes wäre man geneigt, dies zu folgern; aber es ist nicht der Fall.

Sind $a, b, c, \ldots$ und L gegeben, so muss nothwendig:

$$a < b+c+\cdots+L$$

sein; sonst ist überhaupt keine von diesen Grössen eingeschlossene Figur möglich. Wird diese Bedingung, die man jedoch fast als selbstverständlich bezeichnen kann, eingehalten, so ist, wie sich zeigen wird, stets ein Kreisstück möglich. Die Nicht-Erwähnung der Bedingung ist also unbedenklich. *Doch nicht so, wenn $a, b, c, \ldots$ und F gegeben sind; dann können,* wie wir sehen werden, *diese Grössen so beschaffen sein, dass keine Kreisstücke möglich sind, wohl aber andere Figuren;* und dies musste doch wohl erwähnt werden.

§ 5. Man überzeugt sich leicht, dass in demselben Kreise zwei nicht congruente oder symmetrische gleichartig aus $a, b, c, \ldots$ und L hergestellte Kreisstücke nicht möglich sind. *Aber auch nicht in verschieden grossen Kreisen sind zwei aus denselben Grössen $a, b, c, \ldots$ und L hergestellte Kreisstücke möglich;* denn andernfalls könnte man — ich specialisire für diesen Fall *Steiners* Beweis in No. 21 — das eine Kreisstück durch die Segmente über den Sehnen zum vollen Kreise vervollständigen und dieselben Segmente den gleichen Seiten des andern Kreisstücks aufsetzen; man erhielte dann zwei Figuren gleichen Umfangs, von denen die eine und nur sie ein Kreis ist; also wäre sie nach dem Hauptsatze grösser als die andere und, nach Abzug der Segmente, auch das erstere Kreisstück

grösser (nicht $\geqq$) als das andere; aber ebenso könnte man auch das Umgekehrte beweisen.

§ 6. Nennen wir in jedem Kreise, in den unsere Sehnen $a, b, c, \ldots$ eingetragen sind, die kleineren Bogen über $a, b, c, \ldots$ (wie es *Steiner* an anderer Stelle 𝔄 No. 52 gethan hat) bez. $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, hingegen α' den grösseren Bogen über der grössten Sehne a. Wir haben offenbar zu untersuchen, ob $\alpha'-(\beta+\gamma+\cdots)$ oder $\alpha-(\beta+\gamma+\cdots)$ in einem Kreise den gegebenen Werth L erreicht.

Ist $a > b+c+\cdots$, so sind in jedem Kreise (in dem überhaupt unsere Sehnen möglich sind) beide Differenzen positiv, im andern Falle aber können sie auch negativ sein. Der kleinste Kreis, in dem a und dann auch die übrigen Sehnen möglich sind, ist der Kreis K_0 über a als Durchmesser. In diesen denken wir uns, von dem einen Endpunkte von a aus, die andern Sehnen an einander hängend eingetragen; der Halbkreis, in den sie zuerst eintreten, sei H_0; möglicher Weise reichen sie in den andern oder machen gar mehr als einen Umlauf. In K_0 ist $\alpha' = \alpha$ und also:

$$\alpha'-(\beta+\gamma+\cdots) = \alpha-(\beta+\gamma+\cdots).$$

Sei L_0 der gemeinsame Werth beider Differenzen in diesem Falle.

Man vergrössere nun den Kreis so, dass H_0 in das grössere Segment übergeht: α' wird dann fortwährend wachsen, $\beta, \gamma, \ldots$ hingegen werden abnehmen und $\alpha'-(\beta+\gamma+\cdots)$ durchschreitet jeden Werth von L_0 bis ∞ einmal. Lässt man aber H_0 in das kleinere Segment übergehen, so nimmt α auch ab, wie $\beta, \gamma, \ldots$. Der äusserste Grenzwerth, den $\alpha-(\beta+\gamma+\cdots)$ erreicht, wenn der Kreis unendlich gross geworden ist, ist $a-(b+c+\cdots)$.

Ist $L_0 \leqq 0$, dann werden alle positiven Werthe von $\alpha'-(\beta+\gamma+\cdots)$ bei dem ersten Vergrösserungsprozesse durchlaufen, also auch das gegebene L; und beim zweiten Prozesse können nur negative Werthe für $\alpha-(\beta+\gamma+\cdots)$ sich ergeben; denn etwaige positive würden zu Kreisstücken führen, die mit solchen, welche sich beim ersten ergeben haben, in $a, b, c, \ldots$ und der Länge des Schliessungsbogens übereinstimmen, ohne congruent (oder symmetrisch) zu sein; was § 5 widerspricht. Ist aber $L_0 > 0$, so werden beim zweiten Prozess noch die unter L_0 befindlichen positiven Werthe durch $\alpha-(\beta+\gamma+\cdots)$ je einmal durchlaufen, da die obern wegen § 5 nicht mehr sich wiederholen dürfen, und aus demselben Grunde jeder der unter L_0 befindlichen positiven Werthe nur einmal; freilich, wenn $a > b+c+\cdots$ sein sollte, nur bis $a-(b+c+\cdots)$; aber da wir ja $a < b+c+\cdots+L$ voraus-

setzen, so ist: $L > a-(b+c+\cdots)$; mithin befindet sich L unter den entweder beim ersten Prozesse von $\alpha'-(\beta+\gamma+\cdots)$, oder beim zweiten von $\alpha-(\beta+\gamma+\cdots)$ durchlaufenen Werthen.

Also: *Wofern die überhaupt zur Construction einer Figur aus $a, b, c, \ldots$ und L nothwendige Bedingung:*

$$L > a-(b+c+\cdots)$$

erfüllt wird, ist auch immer ein und nur ein Kreisstück aus diesen Stücken möglich.

§ 7. Ist $a < b+c+\cdots$, so kann L auch $=0$ sein; also aus den n geraden Seiten $a, b, c, \ldots$ ist dann stets ein und nur ein Kreispolygon möglich.

Oder: *Ein Kreispolygon ist* — abgesehen von der verschiedenen Anordnung derselben — *eindeutig durch seine Seiten bestimmt.*

Es müssen daher die Fläche F desselben und der Radius r des umgeschriebenen Kreises symmetrische Functionen der Seiten sein. Aber man kann diese Functionen (ausser bei $n=3, 4$) nicht isolirt darstellen; sie ergeben sich als je die eine Wurzel*) einer Gleichung, deren Coefficienten symmetrische Functionen der Seiten sind, die aber bald sehr hohen Grad erreicht. *Möbius* hat sich**) mit diesen Gleichungen und insbesondere ihrem Grade beschäftigt. Beim $(2m+1)$-Ecke und beim $(2m+2)$-Ecke sind die Gleichungen in F^2 und r^2 vom Grade

$$\frac{1}{2}\,\frac{(2m+1).2m.(2m-1)\ldots(m+2)(m+1)}{1.2.3\ldots(m-1)m} - 2^{2m-1},$$

also beim Fünfeck und Sechseck vom Grade 7.

§ 8. Nachdem die Möglichkeit des Kreisstücks constatirt ist, kann der Beweis folgen, dass von allen aus $a, b, c, \ldots$ und aus Zwischenbogen von der Gesammtlänge L construirten Figuren das Kreisstück den grössten Inhalt hat; wie ihn *Steiner* in überaus einfacher Weise in Nr. 21, 23 gegeben hat.

Sodann ergiebt sich, wenn $L=0$ (Nr. 251), als Specialfall der bekannte***) Satz:

---

*) Die andern gehören zu den sich durchschneidenden Kreispolygonen aus denselben Seiten.

**) Dieses Journal Bd. 3 S. 5.

***) Z. B. *Legendres* Elemente der Geometrie, 4. Buch, Anhang; *Baltzer*, Elem. der Math., Planim. § 15, 7 mit den historischen Notizen. Vergl. auch zwei Aufsätze in diesem Journale von *Umpfenbach* Bd. 25 S. 184 und von *Fasbender* Bd. 26 S. 181, beide durch *Steiners* Aufsatz angeregt.

Unter allen aus $a, b, c, \ldots$ construirbaren Polygonen hat das Kreispolygon den grössten Inhalt.

In Bezug auf den Fall des Vierecks, den ja *Steiner* in seinem einen Beweise des Hauptsatzes (𝔅 No. 9) verwerthet (wobei der Satz dann nicht durch Betrachtungen bewiesen werden kann, die den Hauptsatz voraussetzen), erlaube ich mir noch folgenden wohl weniger bekannten geometrischen Beweis*) anzudeuten: Es seien a, b, c, d die gegebenen Seiten in dieser Reihenfolge, e, f die beiden Diagonalen und f_1, f_2 die Projectionen der letzteren auf die erstere und auf eine zu ihr senkrechte Gerade; so ist:

$$a^2+c^2-(b^2+d^2) = 2e.f_1,$$

sobald a, c im stumpfen Winkel der Diagonalen liegen, ferner:

$$4F = 2e.f_2;$$

also

$$(a^2+c^2-b^2-d^2)^2+16F^2 = 4e^2.f^2;$$

mithin ist F am grössten, wenn $e.f$ am grössten ist, beim Kreisviereck ist aber $ef = ac+bd$; bei einem andern Vierecke jedoch sind diese Producte mit den Seiten eines Dreiecks proportional**), also $ef < ac+bd$.

§ 9. Was nun den *Umkehrungssatz* anlangt, so ist, wie bemerkt, zunächst die Frage zu entscheiden, ob es zu gegebenen geraden Seiten $a, b, c, \ldots$ und jedem Werthe des Inhalts F auch stets ein und nur ein Kreisstück giebt.

Von zwei Kreisstücken K, K', welche in $a, b, c, \ldots$ übereinstimmen, aber verschiedene Schliessungsbogen L, L' haben, besitzt das mit dem grösseren Schliessungsbogen L auch die grössere Fläche. In der That, man ersetze bei K' den Schliessungsbogen L' durch einen mit L gleichen, also grösseren irgend wie geformten Bogen, so aber, dass die neue Figur S grösser ist als K'; K und S stimmen nun in $a, b, c, \ldots$ und L überein, aber S ist kein Kreisstück; also $K > S > K'$. *Und auch umgekehrt, gehört zu grösserer Fläche auch grösserer Schliessungsbogen.* Daraus folgt, dass, *wenn $a < b+c+\cdots$, also wenn ein Kreispolygon aus den Seiten $a, b, c, \ldots$ möglich ist, dieses das kleinste von allen aus $a, b, c, \ldots$ construirbaren Kreisstücken ist, und demnach F nicht kleiner als dessen Fläche sein darf. Ist aber $a > b+c+\cdots$, so ist*

*) Gegenüber dem bekannten trigonometrischen, wie er z. B. bei *Baltzer*, Elem. der Math. Trig. § 4, 12 zu finden ist.

**) *Baltzer*, El. der Math., Plan. § 14, 16.

für jeden Werth von F ein Kreisstück möglich, auch für $F = 0$, wo es zum Radius ∞ gehört und sich auf zwei über einander gelegte Strecken a und $b + c + \cdots + L$ reducirt. Und wenn überhaupt ein Kreisstück möglich ist, dann ist auch nur eins möglich.

Der Umkehrungssatz ist demnach so zu formuliren: *Wenn aus $a, b, c, \ldots$ und dem gegebenen Inhalte F ein Kreisstück K möglich ist, dann ist bei ihm der Schliessungsbogen L kleiner als bei irgend einer andern aus $a, b, c, \ldots$ und F construirten Figur S die Gesammtlänge L' der Zwischenbogen.*

Wir wollen den bei *Steiner* nicht gegebenen Beweis hinzufügen. Es sei K' das Kreisstück, welches mit S in $a, b, c, \ldots$ und L' übereinstimmt, so ist, nach dem Satze, mit dessen Umkehrung wir es jetzt zu thun haben, $K' > S$; also da $K = S$, auch $K' > K$; folglich nach dem Hilfssatze im Anfange des Paragraphen: $L' > L$, weil K' und K beide Kreisstücke sind.

§ 10. *Ist aber, in dem Falle, wo $a < b + c + \cdots$* (der natürlich nicht eintreten kann, wenn es sich nur um eine oder zwei gerade Seiten handelt), *der gegebene Inhalt F kleiner als der des Kreispolygons aus $a, b, c, \ldots$, so ist,* wie gefunden, *kein Kreisstück mehr möglich, wohl aber doch noch andere Figuren.* Z. B. wenn $n > 3$, sind, sobald F nicht eine gewisse untere Grenze unterschreitet, zunächst noch andere Polygone aus $a, b, c, \ldots$ und F möglich, da ja unter allen aus $a, b, c, \ldots$ construirbaren das Kreispolygon das grösste ist; und weil bei diesen L den Werth 0 hat, so repräsentirt jedes beliebige unter ihnen das Minimum bezüglich der Länge L.

Während also, solange aus $a, b, c, \ldots$ und F noch ein Kreisstück möglich ist (auf der Grenze ein Kreispolygon), das Minimum von L, das im Allgemeinen > 0 ist, nur bei einer einzigen Figur — dem Kreisstücke — auftritt; haben im andern Falle ∞^{n-4} Figuren das Minimum, das dann stets Null ist, nämlich alle aus $a, b, c, \ldots$ und F construirbaren Polygone.

§ 11. Jedenfalls giebt es, wenn die Seiten gegeben sind, für den Inhalt eines (gemeinen) Polygons eine im Allgemeinen über 0 befindliche untere Grenze. Mir sind keine Untersuchungen über deren Ermittlung bekannt, und dieselbe scheint wirklich bedeutenden Schwierigkeiten unterworfen zu sein; es würde sich lohnen, vielleicht wenigstens für das Viereck diese untere Grenze aufzusuchen.

Die bekannte Formel:

$$F^2 = \tfrac{1}{16}(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(-a+b+c-d) + abcd \sin\tfrac{1}{2}(A+C)^2 \text{*)}$$

---

*) *Baltzer,* Elem. der Math., Trigon. § 4, 12.

zeigt doch, wenn $a > b > c > d$ und $a+d > b+c$, dass das erste Glied rechts eine — freilich nicht erreichte — untere Grenze für F^2 liefert. Ist $a+d = b+c$, so kann der Inhalt Null erreicht werden, und nur dann.

Geht nun der gegebene Inhalt F unter diese untere Grenze herab, so wird es immer noch Figuren mit Zwischenbogen geben; denn lässt man Zwischenbogen zu, so kann man den Inhalt Null stets durch eine zu einer doppelten Strecke abgeplattete Figur erreichen. Welche Figur aber, für einen gegebenen Inhalt von solcher Grösse, dass aus ihm und den gegebenen Seiten kein Polygon mehr möglich ist, die kleinste Gesammtlänge L der Zwischenbogen besitzt, muss ich noch unerledigt lassen.

§ 12. *Ist nun wiederum L gegeben, aber sind die Seiten $a, b, c, \ldots$ nicht alle einzeln gegeben, sondern ganz oder theilweise zu einer gegebenen Summe* (oder mehreren solcher) *vereinigt; dann liefert uns jede Zerlegung* (bei der überhaupt eine Figur möglich ist) *ein Maximum des Inhalts in dem Kreisstücke, und unter diesen erhält man das grösste Maximum, wenn man die Summe* (oder eine jede der Summen) *in gleiche Summanden zerlegt.*

Steiner beweist diesen Satz in No. 22 für den Fall, dass die Summe zwei Seiten umfasst, in exacter und sehr einfacher Weise und sagt nachher, wo es sich um die Summe von mehr Summanden handelt (No. 24), der Beweis sei ähnlich wie in No. 22.

Wenn ich aber diese Bemerkung richtig verstehe, so meint *Steiner* folgenden Gang der Betrachtung:

Das irgend einer Zerlegung der Summe entsprechende Kreisstück K sei betrachtet, wir machen zwei benachbarte Seiten (von den in der Summe befindlichen) gleich, unter Festhaltung ihrer Summe; nach dem Satze von No. 22 wächst der Inhalt.

Aber da bei weiterer Gleichmachung mindestens eine dieser beiden Seiten wieder herangezogen werden muss, so werden spätere derartige Verwandlungen den Effect der früheren wieder aufheben; und wir gerathen so in einen unübersehbaren unendlichen Prozess.

Ob ich *Steiner* richtig interpretirt habe, muss ich dahin gestellt sein lassen; er könnte möglicher Weise doch seinen Beweis auch so geführt haben, wie es im Folgenden geschieht. Aber aus der kurzen Andeutung ist eben wenig zu entnehmen.

Ich habe mir also — *Steiners* oben erwähnten Musterbeweis nachahmend — den Gang des Beweises in anderer Weise zurecht gelegt, bei

welcher ich von dem einer beliebigen Zerlegung der Summe entsprechenden Kreisstücke durch eine *endliche* Zahl von Verwandlungen zu dem Kreisstück übergehe, das der Zerlegung in gleiche Summanden entspricht.

Dazu muss aber *Steiners* No. 22 in Satz und Beweis etwas geändert werden. *Steiner* vergleicht die beiden Kreisstücke K, K', welche in $c, d, \ldots$ und L übereinstimmen sowie in $a+b$, $a'+b'$, während bei K $a \gtrless b$, bei K' $a' = b'$ ist; ich will hingegen nur annehmen, dass $a-b > a'-b'$ (absolut genommen) ist. Es ist dann $K < K'$.

Indem wir uns in K, was ja erlaubt ist, a und b zu Nachbarseiten machen, zerlegen wir K durch die Linie AB, welche die nicht gemeinsamen Endpunkte von a, b verbindet, in das Dreieck ACB und die Restfigur S. Jenes ersetzen wir durch das Dreieck $AC'B$ mit den Seiten AB, $AC' = a'$, $BC' = b'$. Nach dem im Wortlaute etwas modificirten Satze 𝔄 No. 3 II ist $AC'B > ACB$, also auch $AC'B + S > ACB + S$ oder K. Aber erstere Figur ist kein Kreisstück, denn C' liegt nicht auf dem Kreise, welcher L und die übrigen Ecken enthält; also ist, weil diese Figur mit K' in allen geraden Seiten und in L übereinstimmt:

$$K' > AC'B + S > K.$$

§ 13. Nehmen wir nun an, die Summe s umfasse m gerade Seiten (es genügt, den Fall *einer* Summe zu betrachten); sie sei in irgend einer Weise in m Summanden zerlegt: $a, b, \ldots$, und K sei das zu diesen, den übrigen einzeln gegebenen Seiten und der Länge L gehörige Kreisstück.

Von den m Seiten muss nothwendig mindestens eine $< \frac{s}{m}$ sein und mindestens eine $> \frac{s}{m}$; sei also $a < \frac{s}{m}$, $b > \frac{s}{m}$. Man mache nun $a' = \frac{s}{m}$ und $b' = a + b - a'$; a' und b' haben dann eine kleinere Differenz als a und b. Folglich ist das aus a', b' construirte Kreisstück, das sonst mit K übereinstimmt, grösser als K; es hat nun schon eine Seite a' von der *definitiven* Länge; diese hält man fest und verfährt mit der Summe der $m-1$ übrigen in derselben Weise. Es erhellt, dass man so nach einer endlichen Zahl von Verwandlungen, von denen jede den Inhalt vergrössert, zu dem Kreisstücke gelangt, bei welchem alle m Seiten die Länge $\frac{s}{m}$ haben.

In Bezug auf den Umkehrungssatz werden natürlich ähnliche Bemerkungen zu machen sein, wie oben; doch wollen wir uns damit und mit den nächsten Folgerungen, welche *Steiner* macht, nicht beschäftigen.

§ 14. Wir wenden uns zu dem Sectorsatz in 𝔄 No. 30: *Von allen Linien beliebiger Form, aber gegebener Länge L, welche zwei beliebige Punkte A, B auf den Schenkeln eines gegebenen Winkels verbinden, schliesst der Kreisbogen um den Scheitel C des Winkels als Centrum mit den Schenkeln die grösste Fläche ein.*

Steiner beweist diesen Satz noch an zwei anderen Stellen: 𝔅 No. 4—8 und No. 20. Ich bin nicht zur Klarheit gelangt, ob *Steiner* und auch der Herausgeber der gesammelten Werke, Herr *Weierstrass,* der Ansicht ist, dass der Satz auch richtig bleibt, *wenn der gegebene Winkel convex ist.* Die Bemerkungen *Steiners* in 𝔄 No. 33: „Aehnlich wird der andere Theil des Satzes bewiesen" und in 𝔅 No. 21: „... folgen aus ihm (nämlich dem Satze in No. 20) die Sätze über den Halbkreis und über den ganzen Kreis, wenn der gegebene Winkel C beziehlich gleich π und 2π angenommen wird" deuten darauf hin, dass *Steiner* ihn auch noch dann für richtig gehalten hat. Dagegen aber sehe man *Steiners* handschriftliche Notizen, welche in den Anmerkungen 16)—18) am Schlusse von Bd. II der „Werke" mitgetheilt sind, sowie andererseits wiederum Herrn *Weierstrass'* Bemerkungen dazu.

Thatsächlich gilt der Satz im Falle des convexen Winkels nicht.

Der erste Beweis von *Steiner* (𝔄 No. 30) ist in diesem Falle nicht anwendbar, weil die construirten symmetrischen Figuren in einander übergreifen würden. Was den zweiten Beweis (𝔅 No. 4—8) anlangt, so wird gerade der erste Theil desselben, in dem nachgewiesen wird, dass bei der Maximalfigur die Strecken CA, CB gleich sein müssen, beim convexen Winkel illusorisch; denn das Dreieck CAB tritt dann *subtractiv* auf im Inhalte der vollständigen Figur, und seine Vergrösserung vermindert denselben. (In No. 7 ist der Beweis, um einen unendlichen Prozess zu vermeiden, ähnlich zu modificiren, wie es in § 13 für 𝔄 No. 22, 24 geschehen ist.)

Im dritten Beweise (𝔅 No. 20) wird gezeigt, dass die Maximalfigur in Bezug auf die Halbirungslinie des Winkels symmetrisch sein muss, und jede Hälfte wieder in Bezug auf diejenige ihres Winkels u. s. f. Auf den ersten Blick scheint gegen die Uebertragung dieses Beweises auf den convexen Winkel nichts einzuwenden zu sein, und No. 21 macht, wie gesagt, den Eindruck, dass *Steiner* ihn übertragen hat.

Steiner hat stillschweigend vorausgesetzt, dass die verbindende Linie von der Länge L die Halbirungslinie des Winkels durchschneidet, so wie

es in seiner Figur geschieht; in Folge dessen ***hat er eine ganze Sorte von möglichen Figuren übersehen,*** nämlich solche, bei denen der eine Endpunkt der verbindenden Linie der Scheitel als Punkt des einen Schenkels ist und welche ganz innerhalb der einen Winkelhälfte bleiben. Auf solche Figuren ist *Steiners* Beweis offenbar nicht anwendbar, und auch im Falle des concaven Winkels muss in Bezug auf diese Figuren die Bemerkung vorangeschickt werden, dass sie in andere grössere verwandelt werden können, bei denen keiner der verbundenen Punkte in den Scheitel fällt; was stets leicht dadurch geschieht, dass man die Figur mit ihrer Linie AB innerhalb des Winkels verschiebt, so dass der im Scheitel befindliche Endpunkt A vom Scheitel sich entfernt. Dann erst wird der Beweis richtig, wofern man von den früher geschilderten Mängeln eines Beweises dieser Art absieht.

§ 15. Im Falle des ***convexen Winkels*** aber ist er falsch. ***Die Maximalfigur befindet sich gerade unter jenen Figuren, und zwar wird sie durch den Halbkreis H von der Länge L, der, innerhalb des convexen Winkels liegend, seinen einen Durchmesser-Endpunkt im Scheitel, den andern auf einem der Schenkel hat, mit seinem Durchmesser eingeschlossen.*** In der That, sei S irgend eine andere Figur, welche von einer (innerhalb des convexen Winkels laufenden) Linie ADB von der Länge L mit den Schenkeln CA, CB gebildet wird; so ist ersichtlich

$$S \text{ oder } CADBC \lesssim ADBA$$

um das Dreieck CAB; andererseits aber ist, wegen des oben erwähnten Satzes 𝔄 No. 18 vom Halbkreise (§ 3):

$$ADBA < H;$$

also

$$S < H.$$

Wenn α der Centriwinkel eines Sectors (in Bogenmass) und L der Bogen ist, so ist der Inhalt des Sectors $\frac{1}{2}\frac{L^2}{\alpha}$; der Inhalt des Halbkreises, dessen Bogen L ist, ist $\frac{1}{2}\frac{L^2}{\pi}$; wenn $\alpha > \pi$, ist letzterer grösser. —

§ 16. ***Der Sectorsatz bleibt aber auch für den convexen Winkel richtig, wenn wir der verbindenden Linie die Beschränkung auferlegen, gleich weit vom Scheitel entfernte Punkte der Schenkel zu verbinden.*** Für Figuren, bei denen wirklich beide Endpunkte der verbindenden Linie vom Scheitel verschieden sind, gelten die *Steiner*schen Beweise 𝔅 No. 4—8 oder 𝔅 No. 20.

Im ersteren ist, weil ACB schon gleichschenklig ist, keine Gleichschenkligmachung und deshalb keine dadurch bewirkte Verkleinerung mehr möglich; im zweiten durchschneidet die Halbirungslinie die Figur. Endlich die Figuren, bei welchen die Verbindungslinie in C anfängt und endet, sind alle kleiner als der Kreis vom Umfange L; dieser aber hat den Inhalt $\frac{1}{4}\frac{L^2}{\pi}$, was kleiner ist als der Inhalt des Sectors $\frac{1}{2}\frac{L^2}{\alpha}$ für alle Winkel $\alpha (< 2\pi)$.

Mit dieser Beschränkung können wir unsern Satz also bis zum Winkel 2π ausdehnen und freilich damit dann *den Hauptsatz* nicht beweisen, denn wir haben seiner im Beweise eben bedurft, aber ihn doch *dem jetzigen Satze subsumiren*.

Und in dieser beschränkten Form ist der Sectorsatz auch nur für den Beweis des „andern Theils" von 𝔄 No. 33 nothwendig. Man hat das stumpfwinklige Segment mit der kleineren Sehne zu verlegen, so dass letztere zwischen den Schenkeln des Centriwinkels der grösseren parallel zu derselben und also dem Scheitel näher liegt, u. s. f.

§ 17. Nun ist es aber andererseits doch wünschenswerth, für den Sectorsatz einen *directen* Beweis zu besitzen, in welchem eben gezeigt wird, dass beim concaven Winkel der Sector grösser ist als jede andere Figur mit derselben Länge der Linie zwischen den Schenkeln des Winkels. Und nachdem, wie oben (§ 2) mitgetheilt, ein directer Beweis des „Hauptsatzes" durch Herrn *Edler* gefunden ist, in welchem Verwandlungsmethoden, die *Steiner* in 𝔅 No. 22—24 angegeben hat, weiter ausgebildet und consequent durchgeführt werden, ist es leicht, *durch Umbildung dieses Edlerschen Beweises auch unsern Satz zu beweisen.* Diese Umbildung theile ich hier mit, theils, weil ich damit dem schönen Beweise des Herrn *Edler* eine grössere Publicität geben möchte, theils, weil mein Beweis noch etwas einfacher ist und *beide Sätze, Sectorsatz und Hauptsatz,* umfasst.

1) Wir nehmen zunächst an, dass die verbindende Linie von der Länge L aus ν gleich langen geraden Seiten bestehe und die $\nu+1$ Ecken alle von dem Scheitel des Winkels gleiche Entfernung R haben. Diese „reguläre" Figur sei P. Dann sei R' der Radius des Sectors K um C, dessen Bogen gleich L ist, und L' sei die Gesammtlänge von ν gleichen Tangenten dieses Bogens, die sich an einander schliessen und auf den Schenkeln von C enden; P' die von ihnen mit den Schenkeln gebildete

Fläche. Wir haben: $2P = R.L$, $2K = R'.L$, $2P' = R'.L'$. Also da $P' > K$, auch $L' > L$; mithin wegen der Aehnlichkeit von P und P' auch $R' > R$ und demnach $K > P$. Hier kann der Winkel offenbar auch convex sein.

2) Die verbindende Linie bestehe nun aus n beliebigen geraden Linien, der Winkel sei concav. Wir können annehmen, dass der ganze „Linienzug" jenseits der geraden Verbindungslinie der Endpunkte AB liege; denn andernfalls kann man Theile, welche auf derselben Seite wie der Scheitel C sich befinden, um AB auf die andere Seite klappen, wodurch die Länge des Zugs beibehalten, der Inhalt vergrössert wird. Die Figur zerfällt also in das Dreieck ABC und die Restfigur S. Ersteres verwandeln wir in ein gleichschenkliges D' mit derselben Basis AB und demselben Winkel C (𝔅 No. 3 V) und vergrössern dadurch die Figur.

Beim convexen Winkel sind diese Operationen nicht gestattet.

Die Figur S wird nun durch Parallele zu AB, welche durch die $n-1$ Ecken zwischen den n „äusseren" Seiten gehen, in Trapeze (und Dreiecke) zertheilt, und diese werden, unter Beibehaltung der Grundlinien und Höhen, in gleichschenklige verwandelt. Setzt man diese Figuren und D' in derselben Weise, wie vorher, zusammen, so ergiebt sich (nach *Steiner* 𝔅 No. 22) eine Figur, bei der die Länge des Linienzugs der äusseren Seiten kleiner ist als vorher, der Inhalt aber grösser ist (oder auch ebenso gross, wenn etwa ABC schon gleichschenklig wäre, denn vom Dreiecke ABC allein rührt die Vergrösserung her; dies kann hier der Fall sein, bei den Theilfiguren später nicht mehr).

Die Zahl der Ecken des Linienzugs der neuen Figur ist $3+2(n-2)$, also die der Seiten $2(n-1)$; für diese neue Figur ist die Halbirungslinie des Winkels C Symmetrieaxe. Verfährt man nun mit jeder der beiden Hälften in derselben Weise, so erhält man eine dritte Figur, deren aus $2^2(n-1)$ Seiten bestehender Linienzug wieder kleiner geworden ist, während der Inhalt gewachsen ist, und welche nun eine Hauptsymmetrieaxe und zwei Partialsymmetrieaxen hat, jene für die ganze Figur, diese nur für je eine Hälfte. Nach $n-1$ solchen Transformationen ergiebt sich eine Figur mit 2^{n-1} äusseren Seiten, einer Haupt- und $2+4+\cdots+2^{n-2} = 2^{n-1}-2$ Partialsymmetrieaxen*). In jedem der 2^{n-1} auf einander folgenden Winkel der Schenkel und der Symmetrieaxen befindet sich nun eine Seite des Linien-

*) In dem *Edler*schen Beweise sind alle Symmetrieaxen solche für die ganze Figur.

zugs. Die Symmetrien ergeben, dass diese 2^{n-1} Seiten alle gleich sind und die Ecken abwechselnd gleiche Entfernung von C haben; durch eine s^{te} Transformation macht man noch alle 2^{n-1} Dreiecke gleichschenklig und bringt alle $2^{n-1}+1$ Ecken des Linienzugs auf einen Kreis um C. Die so entstandene reguläre Figur P_n hat grösseren Inhalt als die gegebene P, aber kleineren verbindenden Linienzug L_n. Seien K, K_n die Sectoren um C, deren Bogen bez. gleich L, L_n sind. Wir haben also $P_n > P$, $L_n < L$, also $K_n < K$; und nach 1) $K_n > P_n$. Folglich:

$$K > K_n > P_n > P.$$

3) Die verbindende Linie von der Länge L habe beliebige Gestalt. Nach dem in 2) geschilderten Verfahren verwandele man die von ihr mit den Schenkeln gebildete Figur F in eine in Bezug auf die Halbirungslinie von C symmetrische F', bei der L' die verbindende Linie ist. Sollte die Halbirungslinie von Hause aus Symmetrieaxe sein, so würde man den Winkel und die Figur so theilen, dass mindestens für einen Theil der Figur die Halbirungslinie des betreffenden Theilwinkels nicht Symmetrieaxe ist, und dann mit diesem Theile so verfahren, wie im Allgemeinen mit der ganzen Figur. Es genügt eigentlich, den Linienzug zu verkürzen, ohne den Inhalt zu ändern. Es ist also: $F' \geqq F$, $L' < L$ und zwar um ein endliches Stück. Zu F' werde, in Bezug auf C als Aehnlichkeitspunkt, die ähnliche und ähnlich gelegene Figur F'' construirt, so aber, dass die L' entsprechende Linie L'' gleich L wird; L' wird von L'' umgeben. In dem endlichen Zwischenraume zwischen L'' und L' ziehe man, von dem einen Endpunkte von L'' bis zum andern, an einander stossende Sehnen von L'', so jedoch, dass keine die L' schneidet; was möglich ist, da die Zahl und Grösse dieser Sehnen frei steht; ihre Gesammtlänge sei Λ und Π die von ihnen mit den Schenkeln von C eingeschlossene Figur. Also ist $\Lambda < L''$ oder L und $\Pi > F'$. Sind nun K, K' die Sectoren um C, deren Bogen bez. gleich L, Λ sind, so ist $K' < K$; nach 2) $K' > \Pi$; demnach:

$$K > K' > \Pi > F' \geqq F.$$

Womit der Satz nun bewiesen ist.

Wenn die verbundenen Punkte der Schenkel stets gleiche Entfernung von C haben sollen, so kann der Satz und Beweis auch auf convexe Winkel ausgedehnt und bis zum vollen Winkel von 4 Rechten gegangen werden; vollständig durch eine Linie von gegebener Länge einge-

schlossene Figuren subsumiren sich unter diesen Specialfall, indem ein beliebiger Punkt im Innern als Scheitel C und zwei vereinigte Strahlen von ihm nach dem Umfang als Schenkel angesehen werden.

Die *Vereinfachung* gegen Herrn *Edlers* Beweis besteht darin, dass die einleitende Construction, durch die zunächst ein Mittelpunkt der Figur gewonnen wird, wegfällt und also auch eine Aenderung der Transformationsweise nicht mehr nothwendig wird: ich benutze nur die zweite Art der Verwandlung.

§ 18. Zum Schlusse dieses Abschnitts möchte ich noch eine Bemerkung bezüglich des Satzes 𝔄 No. 33 über Segmente mit gleichem Bogen machen.

Steiner lässt die Behauptung, dass bei gleichem Bogen zum kleineren Winkel die grössere Sehne gehört, unbewiesen; unter dem Winkel eines Segments versteht er dabei den Peripheriewinkel *über* dem Bogen des Segments. Nehmen wir an, dass von den beiden Segmenten S, S' ersteres sowohl kleineren Winkel, als kleinere (oder gleiche) Sehne habe. Man lege die Sehnen so auf einander, dass ihre einen Endpunkte sich decken und die Segmente nach derselben Seite liegen. S liegt dann ganz innerhalb S', weil sonst drei Schnitte sich ergeben würden. Es werde jetzt noch das Segment S'' hinzugefügt, das mit S den Winkel, mit S' die Sehne gemein hat; so ist auch dies von S' eingeschlossen und hier offenbar $b'' < b'$, wenn damit die Bogen bezeichnet werden. Wegen des gleichen Winkels von S und S'', aber kleinerer Sehne von S ist $b < b''$; also wäre $b < b'$, was gegen die Voraussetzung ist. Demnach ist die Sehne von S grösser als die von S'.

II*).

§ 19. Wir wenden uns im Folgenden zur Aufsuchung *der einem gegebenen Polygone von m Seiten einzuschreibenden Polygone von ebenso vielen Seiten mit dem kleinsten Umfange* und schliessen uns zunächst der Betrachtung von *Steiner* in 𝔄 No. 63, 64 an, indem wir die dort grösstentheils ohne Beweis mitgetheilten Sätze beweisen.

Das gegebene Polygon sei $A_1 A_2 A_3 \dots A_m$ (Fig. 1); *wir nehmen auf* $A_1 A_2$ *einen beliebigen Punkt* B_1 *an, von dem unter dem Winkel* β_1 *gegen* $A_1 A_2$

---

*) Hierzu die Figurentafel No. 1.

(„Ausstrahlungswinkel") *ein Strahl ausgeht, der auf A_2A_3 in B_2 unter dem Winkel β_2 auffällt, dort reflectirt wird, A_3A_4 in B_3 unter dem Winkel β_3 trifft, u. s. w.* Nennen wir den Winkel, unter dem der so nach einander an den auf einander folgenden Seiten reflectirte Strahl wieder auf A_1A_2 trifft, und den Punkt, in dem es geschieht, β'_1, B'_1 und setzen wir die Operation dann fort. Wir haben ersichtlich die Gleichungen:

$$(1.)\quad \begin{cases} A_2+\beta_1+\beta_2 = \pi, \\ A_3+\beta_2+\beta_3 = \pi, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ A_1+\beta_m+\beta'_1 = \pi, \\ A_2+\beta'_1+\beta'_2 = \pi, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{cases}$$

Nun ergiebt sich sofort ein Unterschied zwischen m ungerade und gerade.

Ist m ungerade, so führt die abwechselnde Multiplication der $2m$ ersten dieser Gleichungen mit $+1$, -1 und Addition zu:

$$\beta_1 = \beta''_1,$$

woraus dann folgt $\beta_2 = \beta''_2$ etc.

Ist demnach das Polygon von ungerader Seitenzahl, so fällt nach zweimaligem Umlaufe der Strahl auf die erste (und so jede) Seite unter demselben Winkel auf, unter dem er von ihr ausgestrahlt ist.

Ist aber m gerade, so führt dieselbe Operation, mit den ϱm ersten Gleichungen von (1.) vorgenommen, zu:

$$\beta_1^{(\varrho)}-\beta_1 = \varrho\{A_2+A_4+\cdots+A_m-A_1-A_3-\cdots-A_{m-1}\}.$$

Da nun im Allgemeinen die Differenz zwischen den Summen der geraden und ungeraden Winkel des gegebenen Polygons zu 2π incommensurabel ist, so erhalten wir, so oft wir auch den Umlauf vollziehen, niemals den Auffallswinkel $\beta_1^{(\varrho)}$ gleich dem Ausstrahlungswinkel β_1. Sollte aber jene Differenz commensurabel zu 2π, also etwa $\frac{s}{\nu}\cdot 2\pi$ sein, so erhält man nach ν Umläufen:

$$\beta_1^{(\nu)}-\beta_1 = s.2\pi.$$

Insbesondere aber, wenn jene Differenz gleich 0 selbst ist, ergiebt sich schon nach einem Umlaufe: $\beta'_1 = \beta_1$.

Diesen Fall wollen wir hervorheben:

Sind in einem Polygon von gerader Seitenzahl die Summen der geraden und der ungeraden Winkel einander gleich, so ist schon nach einem einmaligen Umlaufe der Auffallswinkel dem Ausstrahlungswinkel gleich.

Wir haben uns im Vorhergehenden stillschweigend den günstigsten Fall vorgestellt, dass alle Reflexionspunkte auf den Seiten selbst liegen und dass der reflectirte Strahl selbst die nächstfolgende Seite trifft, nicht der rückwärts verlängerte oder „gebrochene", wie wir ihn mit *Steiner* nennen können. Wir halten dabei an den Gleichungen (1.) fest, und diese werden in jedem Falle genau die Winkel β bestimmen, die also auch negativ oder stumpf werden können. Ebenso halten wir daran fest, dass z. B. durchweg $B_2A_3 = A_2A_3 - A_2B_2$, so dass, indem wir den Sinn A_iA_{i+1} stets positiv annehmen, B_2A_3 negativ wird, wenn B_2 jenseits A_3 fällt. Dadurch können auch Theile der gebrochenen Linie $B_1B_2B_3 \ldots$ negativ werden, und man wird leicht finden, dass jede „Brechung" einen Vorzeichen-Wechsel bewirkt.

Aus den Gleichungen (1.) folgt sofort, dass, wenn m ungerade ist, $\beta_1 = \beta_1'$ nach sich zieht $\beta_2 = \beta_2'$ etc. Im Falle des Dreiecks haben wir dann:

$$\beta_1 = \beta_1' = A_3, \quad \beta_2 = \beta_2' = A_1, \quad \beta_3 = \beta_3' = A_2,$$

wie sich durch Addition der drei ersten Gleichungen (1.) (nach Multiplication mit $+1$, -1, $+1$) ergiebt; A_3 ist der Gegenwinkel der Seite, an der β_1, β_1' liegen.

§ 20. Indem wir nun den Fall: m ungerade weiter verfolgen, wollen wir, der Einfachheit halber, beim Dreiecke bleiben; die Resultate lassen sich leicht erweitern.

Wir finden:

$$A_2B_2 = B_1A_2 \cdot \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2},$$

$$B_2A_3 = A_2A_3 - A_2B_2 = \frac{A_2A_3\sin\beta_2 - B_1A_2\sin\beta_1}{\sin\beta_2},$$

$$A_3B_3 = \frac{A_2A_3\sin\beta_2 - B_1A_2\sin\beta_1}{\sin\beta_3}, \ldots,$$

$$A_1B_1' = \frac{A_3A_1\sin\beta_3 - A_2A_3\sin\beta_2 + B_1A_2\sin\beta_1}{\sin\beta_1'},$$

. . . .

$$A_1B_1'' = \frac{A_3A_1\sin\beta_3' - A_2A_3\sin\beta_2' + A_1A_2\sin\beta_1' - A_3A_1\sin\beta_3 + A_2A_3\sin\beta_2 - B_1A_2\sin\beta_1}{\sin\beta_1},$$

da $\beta_1'' = \beta_1$.

Also, da

$$B_1''B_1 = A_1A_2 - (A_1B_2'' + B_1A_2),$$

ergiebt sich

$$\begin{aligned}\sin\beta_1 . B_1''B_1 = \; & A_1A_2(\sin\beta_1 - \sin\beta_1') \\ & + A_2A_3(\sin\beta_2 - \sin\beta_2') \\ & + A_3A_1(\sin\beta_3 - \sin\beta_3').\end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass, *wenn der Ausstrahlungswinkel* β_1 (und damit alle übrigen Auffalls- und Reflexionswinkel) *festgehalten wird, die Strecke* $B_1''B_1$ *ihre Länge behält, welches auch der Ausgangspunkt* B_1 *ist.* Sie ist insbesondere Null, wenn $\beta_1 = \beta_1' = A_3$; weil dann $\beta_2 = \beta_2' = A_1$, $\beta_3 = \beta_3' = A_2$.

Hat also der Ausstrahlungswinkel β_1 *diesen Werth* (beim Dreieck A_3, beim Fünfeck $A_1 + A_3 - \pi$ etc.), *so kehrt, welches auch der Ausgangspunkt* B_1 *auf* A_1A_2 *ist, nach zweimaligem Umlaufe der Strahl zu ihm zurück.*

Es lässt sich auch beweisen, dass $\beta_1 = \beta_1''$ die einzige Lösung ist, durch welche $B_1''B_1 = 0$ wird. —

In diesem speciellen Falle hat auch die Strecke $B_1'B_1$ *einen festen Mittelpunkt.* In der That ist dann

$$A_1B_1' = \frac{A_3A_1\sin\beta_3 - A_2A_3\sin\beta_2}{\sin\beta_1} + B_1A_2.$$

Ist $\mathfrak{B}_1$ die Mitte, so ist

$$2A_1\mathfrak{B}_1 = A_1B_1 + A_1B_1' = A_1A_2 - B_1A_2 + A_1B_1'$$
$$= \frac{A_1A_2\sin\beta_1 - A_2A_3\sin\beta_2 + A_3A_1\sin\beta_3}{\sin\beta_1},$$

also unabhängig von B_1.

Nimmt man folglich diesen Punkt $\mathfrak{B}_1$ *als Ausgangspunkt, so fällt schon nach einmaligem Umlaufe* $\mathfrak{B}_1$ *mit ihm zusammen.* Und wir haben so *ein dem gegebenen Polygone eingeschriebenes Polygon von gleich vielen Seiten, und der Beschaffenheit, dass je die benachbarten zwei Seiten desselben mit der Seite des gegebenen, auf der sie sich treffen, gleiche Winkel bilden.* Und dies ist das einzige Polygon. Drücken wir beim *Dreiecke* $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ durch A_3, A_1, A_2 aus, so haben wir

$$2A_1\mathfrak{B}_1 = A_1A_2 - \frac{A_2A_3\sin A_1}{\sin A_3} + \frac{A_3A_1\sin A_2}{\sin A_3}$$
$$= \frac{A_1A_2^2 - A_2A_3^2 + A_3A_1^2}{A_1A_2} = 2A_3A_1\cos A_1;$$

woraus sich $\mathfrak{B}_1$ als Höhenfusspunkt auf $A_1 A_2$ ergiebt; also *ist jenes Dreieck das Höhenfusspunkts-Dreieck* (Fig. 2), von dem die erwähnte Eigenschaft bekannt ist. — Aber mehr: *Zieht man zu dessen Seiten je auf den Seiten des gegebenen Dreiecks sich schneidende Parallelen, so erhält man nach zweimaligem Umlaufe eine geschlossene Figur, von welchem Punkte auf einer Seite des gegebenen Dreiecks man auch ausgehe.* Und eine ähnliche Eigenschaft besteht bei allen Polygonen ungerader Seitenzahl.

§ 21. Aber auch im allgemeinen Falle eines beliebigen, aber festen Ausstrahlungswinkels β_1 haben wir, ausser der Constanz von $B_1'' B_1$, noch eine weitere Constanz, nämlich die Länge der ungeschlossenen Linie $B_1 B_2 B_3 \dots B_1' \dots B_1''$ (und, wenn man will, auch der geschlossenen $B_1 \dots B_1' \dots B_1'' B_1$) ist unveränderlich, wobei freilich, in Folge der obigen Bemerkung, Theile dieser Linie eventuell auch negativ zu nehmen sind, so dass es sich um eine algebraische Summe handelt.

Wir haben (Fig. 1)

$$B_1 B_2 = \frac{B_1 A_2 \sin A_2}{\sin \beta_2}, \quad B_2 B_3 = \frac{B_2 A_3 \sin A_3}{\sin \beta_3} = \frac{(A_2 A_3 \sin \beta_2 - B_1 A_2 \sin \beta_1) \sin A_3}{\sin \beta_2 \sin \beta_3}, \text{ etc.}$$

Es genügt, den Factor von $B_1 A_2 . \sin \beta_1$ ins Auge zu fassen; er ist

$$\frac{\sin A_2}{\sin \beta_1 \sin \beta_2} - \frac{\sin A_3}{\sin \beta_2 \sin \beta_3} + \dots - \frac{\sin A_1}{\sin \beta_3' \sin \beta_1}$$

oder wegen 1)

$$\operatorname{cotg} \beta_1 + \operatorname{cotg} \beta_2 - (\operatorname{cotg} \beta_2 + \operatorname{cotg} \beta_3) + \dots - (\operatorname{cotg} \beta_3' + \operatorname{cotg} \beta_1) = 0.$$

Mithin ist die Behauptung erwiesen.

In dem speciellen Falle, wo nach zweimaligem Umlaufe die Figur geschlossen ist, sind alle diese Perimeter unter einander gleich und doppelt so gross, als bei der Figur, die schon nach einem Umlaufe sich schliesst.

Es ist anzunehmen, dass *Steiner* die Beweise in derselben Art geführt haben wird.

§ 22. *Steiner* theilt nun noch die von ihm aus einem allgemeineren Satze gefolgerte Eigenschaft mit, dass *diese schon nach einem Umlaufe geschlossene Figur doppelt gerechnet oder auch zweimal umlaufen dem Inhalte nach grösser ist, als jede der erst nach zwei Umläufen sich schliessenden Figuren,* also beim Dreiecke, an dem wir wieder den Beweis führen wollen,

$$2 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3 > B_1 B_2 B_3 B_1' B_2' B_3'.$$

Ich habe dafür folgenden einfachen Beweis gefunden. Als Inhalt der verschlungenen Figur gilt (mit Berücksichtigung der Vorzeichen) die

Summe der Inhalte der Dreiecke, welche die Seiten mit einem beliebigen Punkte O der Ebene bilden; ebenso aber auch bei der einfacheren Figur. Demnach haben wir zu beweisen (Fig. 2):

$$2(O\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2+O\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3+O\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_1)$$
$$>OB_1B_2+OB_2B_3+OB_3B_1'+OB_1'B_2'+OB_2'B_3'+OB_3'B_1;$$

O wollen wir am besten innerhalb $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3$ liegend annehmen.

Aus den gleichen Winkeln, welche mit den Seiten des gegebenen Dreiecks gebildet werden, folgt, dass die Entfernung der Seiten von $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3$ je von den beiden parallelen des Sechsecks durchweg dieselbe ist, also e, dass mithin $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$ in der Mitte zwischen B_1B_2 und $B_1'B_2'$ sich befindet, so dass

$$2\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2 = B_1B_2+B_1'B_2', \text{ etc.}$$

Seien nun d_1, d_2, d_3 die Entfernungen der Seiten $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_1$ von O, so hat B_1B_2, das wir jenseits $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$ in Bezug auf O liegend annehmen wollen, die Entfernung d_1+e, B_2B_3 aber wird, wie man leicht ersieht, die Entfernung d_2-e haben, und so wechselt es durchweg ab. Also ist

$$\begin{aligned}
2\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3 &= \mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2.d_1+\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3.d_2+\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_1.d_3;\\
B_1B_2B_3B_1'B_2'B_3' &= \tfrac{1}{2}\{B_1B_2(d_1+e)+B_2B_3(d_2-e)+B_3B_1'(d_3+e)\\
&\quad +B_1'B_2'(d_1-e)+B_2'B_3'(d_2+e)+B_3'B_1(d_3-e)\}\\
&= \tfrac{1}{2}\{d_1(B_1B_2+B_1'B_2')+d_2(B_2B_3+B_2'B_3')+d_3(B_3B_1'+B_3'B_1)\}\\
&\quad -\tfrac{1}{2}e\{(B_1'B_2'-B_1B_2)+(B_2B_3-B_2'B_3')+(B_3'B_1-B_3B_1')\}\\
&= 2\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3-\tfrac{1}{2}e\{(B_1'B_2'-B_1B_2)+(B_2B_3-B_2'B_3')+(B_3'B_1-B_3B_1')\}.
\end{aligned}$$

Die drei Differenzen in der Klammer sind positiv, denn wenn B_1B_2 gerade auf der andern Seite von $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$ liegt, als der im Innern von $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3$ gelegene Punkt O, wie wir oben voraussetzten, und $B_1'B_2'$ auf derselben, so liegt jene näher an der Ecke A_2 des Dreiecks und ist die kleinere. Also ist in der That

$$B_1B_2B_3B_1'B_2'B_3' < 2\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3.$$

Geht B_1B_2 sogar über die Ecke A_2 hinaus, so wird es so wie auch Dreieck OB_1B_2 negativ.

§ 23. Gehen wir nun zum Falle der *Polygone von gerader Seitenzahl über, bei denen die Summen der geraden und der ungeraden Winkel gleich sind* (oder sich um ein ganzes Vielfache von 2π unterscheiden: $\nu=1$,

$s \gtreqless 0$). ***Beim Vierecke*** (wo nothwendig $s = 0$ sein muss) ***handelt es sich also um das Kreisviereck.***

Wir fanden, dass dann stets der Winkel $\beta_1' = \beta_1$ (oder $\equiv \beta_1$ mod. 2π); das zweimal umlaufene Polygon ungerader Seitenzahl subsumirt sich, wie dies schon *Steiner* bemerkt, hierunter.

Wir finden auch hier, dass, ***wenn β_1 fest bleibt, die Strecke $B_1'B_1$ und der Umfang $B_1B_2 \dots B_1'$ constant ist.*** Es ist:

$$\sin\beta_1 . B_1'B_1 = A_1A_2\sin\beta_1 - A_2A_3\sin\beta_2 + A_3A_4\sin\beta_3 - \cdots - A_mA_1\sin\beta_m.$$

Vermöge der Beziehungen 1) wird $B_1'B_1$ nur für einen Werth von β_1 Null. Z. B. beim Viereck, wo $\beta_2 = \pi - A_2 - \beta_1$, $\beta_3 = A_2 - A_3 + \beta_1$, $\beta_4 = \pi - A_1 - \beta_1$, hat man

$$\operatorname{tg}\beta_1 = \frac{A_2A_3\sin A_2 - A_3A_4\sin(A_2 - A_3) + A_4A_1\sin A_1}{A_1A_2 - A_2A_3\cos A_2 + A_3A_4\cos(A_2 - A_3) - A_4A_1\cos A_1}.$$

Ist demnach der Ausstrahlungswinkel β_1 durch diese Formel (oder die analogen bei den Figuren mit mehr Seiten) ***bestimmt, so kehrt der Strahl, von welchem Punkte von A_1A_2 er auch ausgehe, nach einem Umlaufe zu ihm zurück. Wir haben also jetzt einfach unendlich viele dem gegebenen Polygone eingeschriebene von der Art, dass je die Seiten der letzteren, welche sich auf einer des ersteren begegnen, mit ihr gleiche Winkel bilden. Und alle diese Polygone haben dieselbe (algebraische) Summe der Seiten.***

Wir wollen unsere Formel für $\operatorname{tg}\beta_1$ beim Vierecke noch etwas verändern.

Für jedes Viereck $A_1A_2A_3A_4$ bestehen die beiden Gleichungen

$$A_1A_2 - A_2A_3\cos A_2 + A_3A_4\cos(A_2 + A_3) - A_4A_1\cos A_1 = 0,$$
$$A_2A_3\sin A_2 - A_3A_4\sin(A_2 + A_3) - A_4A_1\sin A_1 = 0;$$

man erhält sie durch Projection des Umfanges auf die Seite A_1A_2 und eine zu derselben normale Gerade. Vermittelst derselben hat man

$$\operatorname{tg}\beta_1 = \frac{2A_2A_3\sin A_2 - A_3A_4\{\sin(A_2 + A_3) - \sin(A_2 - A_3)\}}{A_3A_4\{\cos(A_2 - A_3) - \cos(A_2 + A_3)\}} = \frac{A_2A_3 - A_3A_4\cos A_3}{A_3A_4\sin A_3}.$$

Fällt man nun aus dem Schnittpunkte D der beiden Diagonalen auf die Seiten A_1A_2, $A_2A_3, \dots$ die Lothe $D\mathfrak{B}_1$, $D\mathfrak{B}_2, \dots$, so ist das Viereck der vier Fusspunkte eins der fraglichen Vierecke, wie man sich leicht auch direct überzeugt. Es ist ja auch $\angle \mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_1A_2$ das Complement von $A_4A_2A_3$, also $\cos\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_1A_1 = \frac{A_3A_4\sin A_3}{A_2A_4}$; suchen wir dazu die Tangente, so ergiebt sich, mit Anwendung des Cosinus-Satzes, derselbe Ausdruck wie für $\operatorname{tg}\beta_1$.

Das Vorzeichen von $\operatorname{tg}\beta_1$ und also auch von $\cos\beta_1$ hängt ab von $A_2A_3 - A_3A_4 \cos A_3$. Je nachdem dies $>$ oder < 0, ist $\angle A_4A_2A_3$ spitz oder stumpf; d. h. das Kreisviereck schliesst den Mittelpunkt des Kreises ein oder aus, und allein im ersteren Falle befinden sich alle vier Fusspunkte der aus dem Diagonalen-Schnitt gefällten Lothe auf den Seiten selbst. Dies wird später wichtiger werden. Notiren wir hier das erhaltene Resultat:

Beim Kreisviereck hat das Viereck der Fusspunkte der aus dem Diagonalen-Schnitt gefällten Lothe die Eigenschaft, dass seine Seiten mit den Seiten des gegebenen Vierecks gleiche Winkel bilden. Zieht man zu diesen Seiten Parallele, welche sich auf den Seiten des gegebenen Vierecks treffen, so bilden diese eine stets geschlossene Figur: dieselbe hat die nämliche Eigenschaft und gleichen Perimeter mit dem Fusspunkten-Viereck.

Hat das Fusspunkten-Viereck nicht alle seine Ecken auf den Seiten selbst, so gilt das auch für jedes der parallelen Vierecke.

§ 24. Das *Fusspunktenviereck* zeichnet sich vor den übrigen noch durch zwei andere Eigenschaften aus:

Die Halbirungslinien seiner Winkel laufen in den Diagonalen-Schnitt D zusammen, folglich ist es einem Kreise um D umgeschrieben und *die Summe der ungeraden Seiten ist gleich der Summe der geraden.*

Ferner ist es dem Inhalt nach die grösste von allen diesen isoperimetrischen Figuren. Auch diese Eigenschaft folgert *Steiner* aus einem allgemeineren Satz. Wir geben hier folgenden einfacheren Beweis.

Es ist (Fig. 3), wenn $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4$ das Fusspunkten-Viereck und $B_1B_2B_3B_4$ irgend eins der Parallel-Vierecke ist, ebenso wie in § 22, die Distanz zweier parallelen Seiten $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$ und B_1B_2 etc. durchweg dieselbe, e; und abwechselnd liegt B_1B_2 ausserhalb des andern Vierecks, B_2B_3 durchschneidet dasselbe, etc. Sei $C_1C_2C_3C_4$ dasjenige Parallel-Viereck, dessen Seiten dieselbe Entfernung e von denen des Fusspunkten-Vierecks haben, das aber die entgegengesetzte Lage zu ihm hat, so dass C_1C_2 durchschneidet, C_2C_3 ausserhalb liegt, etc. Die beiden Vierecke $B_1B_2B_3B_4$ und $C_1C_2C_3C_4$ sind gleich gross.

Bezeichnen wir die Schnitte der Seiten dieser Vierecke in folgender Weise:

$(B_4B_1, C_1C_2) = D_1$, $(B_2B_3, C_1C_2) = D_2$, $(B_2B_3, C_3C_4) = D_3$, $(B_4B_1, C_3C_4) = D_4$;
$(\mathfrak{B}_4\mathfrak{B}_1, C_1C_2) = E_1$, $(\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3, C_1C_2) = E_2$, $(\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3, C_3C_4) = E_3$, $(\mathfrak{B}_4\mathfrak{B}_1, C_3C_4) = E_4$;
$(\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2, B_4B_1) = F_1$, $(\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2, B_2B_3) = F_2$, $(\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4, B_2B_3) = F_3$, $(\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4, B_4B_1) = F_4$.

gleichen Winkel ist

$F_1, \quad \mathfrak{B}_2 E_2 = \mathfrak{B}_2 F_2, \quad \mathfrak{B}_3 E_3 = \mathfrak{B}_3 F_3, \quad \mathfrak{B}_4 E_4 = \mathfrak{B}_4 F_4;$

F_1 sind aus der Mitte der Basis des gleichschenkligen parallel zu den Schenkeln gezogen. Aus

$$\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4 = \mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3 + \mathfrak{B}_4\mathfrak{B}_1$$

$$F_1 F_2 + F_3 F_4 = E_2 E_3 + E_4 E_1.$$

die Mittelgrundlinien der vier Trapeze $B_1 B_2 D_2 D_1$, $C_2 C_3 D_3 D_2$, D_4, welche alle dieselbe Höhe $2e$ haben; also ist die und dritten gleich der des zweiten und vierten, d. h. aber

$$\text{Inhalt } B_1 B_2 B_3 B_4 = C_1 C_2 C_3 C_4.$$

O wieder ein beliebiger Punkt (am besten im Innern von und seien d_1, d_2, d_3, d_4 seine Entfernungen von $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3$, ist

$$4 B_1 B_2 B_3 B_4 = 2(B_1 B_2 B_3 B_4 + C_1 C_2 C_3 C_4)$$
$$d_1 + e) + B_2 B_3(d_2 - e) + B_3 B_4(d_3 + e) + B_4 B_1(d_4 - e)$$
$$d_1 - e) + C_2 C_3(d_2 + e) + C_3 C_4(d_3 - e) + C_4 C_1(d_4 + e)$$
$$+ C_1 C_2) d_1 + (B_2 B_3 + C_2 C_3) d_2 + (B_3 B_4 + C_3 C_4) d_3 + (B_4 B_1 + C_4 C_1) d_4$$
$$C_2 - B_1 B_2) + (B_2 B_3 - C_2 C_3) + (C_3 C_4 - B_3 B_4) + (B_4 B_1 - C_4 C_1)\}.$$

en Glieder geben

$$\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2 . d_1 + \mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3 . d_2 + \mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4 . d_3 + \mathfrak{B}_4\mathfrak{B}_1 . d_4) = 4\,\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4;$$

en in der Klammer von e sind alle positiv, weil immer der die näher an der Ecke von $A_1 A_2 A_3 A_4$ gelegene Linie ist.

$$B_1 B_2 B_3 B_4 < \mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4.$$

er Beweis ist ersichtlich auf Figuren (von gerader Seitenzahl) mit ier Seiten übertragbar, und wird die grösste unter den Parallel- die der gegebenen so eingeschrieben sind, dass die Seiten mit den gleiche Winkel bilden, stets die sein, bei welcher die Summe der Seiten gleich der der geraden ist.

Will man sich aber auf den Fall des Vierecks beschränken, so n den Punkt D als O benutzen, wodurch alle vier d gleich wer- d braucht dann bloss eins der Parallelvierecke in die Betrachtung ogen.

§ 25. Wir kommen nun zu dem eigentlichen Thema dieses zweiten Abschnitts, zu dem Nachweise, dass *die erhaltenen Figuren, welche mit den Seiten des gegebenen Polygons gleiche Winkel bilden* (um diese Haupt-Eigenschaft kurz so auszudrücken), *unter den eingeschriebenen Polygonen den kleinsten Umfang haben.*

Diese Winkel-Gleichheit erscheint nothwendig: denn gesetzt, eine eingeschriebene Figur bilde etwa an der Ecke B_2 noch nicht gleiche Winkel, so construire man, unter Festhaltung aller übrigen Ecken, auf A_2A_3 denjenigen Punkt $\mathfrak{B}_2$, der die kleinste Entfernungssumme von B_1, B_3 hat und bei dem also $B_1\mathfrak{B}_2$ und $B_3\mathfrak{B}_2$ mit A_2A_3 gleiche Winkel bilden. Die Verlegung der Ecke B_2 nach einem an $\mathfrak{B}_2$ nähern Punkt verkleinert schon die Summe der beiden Seiten und also den ganzen Umfang. Liegt $\mathfrak{B}_2$ auf A_2A_3 selbst, so wird man in ihn selbst schieben können; im andern Falle aber bis zu der Ecke des gegebenen Polygons, jenseits deren er liegt. Es ergiebt sich dann freilich eine degenerirte Figur, bei welcher die Winkel-Gleichheit nicht erfüllt ist; doch wir werden später sehen, dass wir in gewissen Fällen die Figur kleinsten Umfangs gerade unter derartigen Figuren zu suchen haben (vergl. § 1).

Aber andererseits, wenn wir, von einer beliebigen eingeschriebenen Figur ausgehend, durch diese Verwandlung zu der Figur kleinsten Umfangs gelangen wollen, gerathen wir wieder in einen unübersehbaren Prozess, bei dem jede folgende Operation die durch die vorhergehende erzielte Winkel-Gleichheit wieder zerstört.

§ 26. Diesem Uebelstande hat *Steiner* durch eine wundervolle Methode abgeholfen, die nur handschriftlich oder durch mündliche Mittheilung erhalten ist. Sie findet sich am Schlusse der Anm. 8) am Ende des zweiten Bandes der gesammelten Werke. Sie ist dort jedoch nur für das Dreieck ausgesprochen, und überdies ohne die nothwendige Beschränkung, dass sie für das stumpfwinklige Dreieck nicht gilt. Dass *Steiner* dies übrigens gewusst hat, geht aus $\mathfrak{A}$ No. 64 II 3) hervor.

Die Methode ist folgende: *Man klappe die gegebene Figur von m Seiten cyklisch nach und nach um ihre Seiten um, bis man zu einer Figur gelangt, die der ursprünglichen parallel ist* (congruent und ähnlich gelegen).

Untersuchen wir (was in jener Note nicht geschehen ist), ob das möglich ist.

Die gegebene Figur sei wieder $A_1A_2A_3 \ldots A_m$ (Fig. 4). Wir klappen

sie um $A_1 A_2$ nach $A_1 A_2 A'_3 \dots A'_m$; dann um $A_2 A'_3$ nach $A_2 A'_3 A''_4 \dots A''_1$; u. s. w. Nach zwei Umklappungen (oder, wenn man die Ebene nicht verlassen will, „Symmetrisirungen") erhält man eine Figur, die mit der ursprünglichen congruent ist im engern Sinne (in dem man eigentlich dies Wort allein anwenden sollte, in dem andern Falle das Wort: symmetrisch gebrauchend), d. h. mit ihr, ohne Herausheben aus der Ebene, zur Deckung gebracht werden kann. Aber es findet keine parallele Lage statt; die Schwenkung ist, wie man leicht sieht, um das Doppelte des Winkels erfolgt, den die beiden Seiten bilden, um welche die beiden Umklappungen geschehen sind, und zwar mit dem Drehsinne von der zweiten nach der ersten, in unserm Falle also um $2A_2$.

Ist m ungerade, so bringen 2m Umklappungen eine Schwenkung um

$$2(A_2 + A_4 + A_6 + \cdots + A_{m-1} + A_1 + A_3 + \cdots + A_m),$$

also ***um die doppelte Summe aller Winkel des Polygons*** $2(m-2)\pi$ ***zu Stande. Die Figur ist in der That zur ursprünglichen parallel,*** und im Allgemeinen wird dies nicht eher erreicht.

Ist aber m gerade, so liefern m Umklappungen eine Schwenkung um

$$2(A_2 + A_4 + \cdots + A_m),$$

also um die doppelte Summe der geraden Winkel und bei weiterer Fortsetzung wiederholt sich dies nur. Da diese Summe im Allgemeinen nicht commensurabel zu 2π ist, so ***führt dieser Prozess niemals zu einer parallelen Figur, und nur im Falle der Commensurabilität gelingt es. Dieser findet nun gerade statt bei Polygonen gerader Seitenzahl, welche eingeschriebene Polygone zulassen, mit deren Seiten sie gleiche Winkel bilden.*** Die Differenz der Summen der geraden und der ungeraden Winkel war ein Vielfaches von 2π, also auch jede einzelne der beiden Summen; ***es führen demnach m Umklappungen zum Ziele.***

§ 27. Wird nun im Falle eines ungeraden m die einzige eingeschriebene Figur, im Falle eines geraden m eine der unendlich vielen eingeschriebenen Figuren, welche gleiche Winkel mit den Seiten der gegebenen bilden, ins Auge gefasst, so sieht man leicht, dass, in Folge der Winkel-Gleichheit, diese Figur sich in eine gerade Linie ausstreckt von der doppelten, beziehlich einfachen Länge ihres Umfangs; wofern von der der Originalfigur eingeschriebenen Figur selbst keine Seite mit hinzugenommen wird. Diese gerade Linie hat, wenn $A_1 A_2$ die erste Um-

klappungsaxe ist, und $A_1^{(\mu)} A_2^{(\mu)}$ ($\mu = 2m, m$) ihre letzte zu ihr parallele Lage ist, ihre Endpunkte auf $A_1 A_2$, $A_1^{(\mu)} A_2^{(\mu)}$ und offenbar in entsprechenden Punkten $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_1^{(\mu)}$. Jede andere eingeschriebene Figur muss, weil bei ihr die Winkel-Gleichheit nicht statt hat, in eine gebrochene Linie von der Länge ihres doppelten, bez. einfachen Perimeters übergehen, welche ebenfalls zwei entsprechende Punkte C_1, $C_1^{(\mu)}$ von $A_1 A_2$, $A_1^{(\mu)} A_2^{(\mu)}$ verbindet; da nun $C_1 C_1^{(\mu)} = \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_1^{(\mu)}$, so erkennt man sofort *die Minimal-Eigenschaft als Folge eines Grundsatzes der elementaren Geometrie.* Die Figur 4 zeigt diese Operation am Dreiecke vorgenommen.

§ 28. Aber man überzeugt sich leicht, dass, wenn die Ecken der eingeschriebenen Figuren nicht sämmtlich auf den Seiten der gegebenen Figur selbst liegen, der vorhergehende Beweis unbrauchbar ist, weil dann die ausgestreckte Linie zum Theil hin und zurück durchlaufen wird.

Dies ist z. B. der Fall, *wenn das gegebene Dreieck stumpfwinklig ist oder das gegebene Kreisviereck den Mittelpunkt des Kreises ausschliesst.*

Diese Fälle hat *Steiner* nicht behandelt, so wie auch nicht das *allgemeine Viereck.* Ich theile im Folgenden die Resultate meiner Untersuchungen über diese dem *Steiner*schen Resultate sich nicht subsumirenden Fälle des Dreiecks und Vierecks mit. Der Fall des Dreiecks ist schnell erledigt. Beim rechtwinkligen Dreiecke als Grenzfall des spitzwinkligen liegen die Höhenfusspunkte noch nicht ausserhalb: ihr Dreieck aber ist auf die doppelte Hypotenusen-Höhe zusammengeschrumpft, und wir haben den Satz:

Bei jedem einem rechtwinkligen Dreiecke eingeschriebenen Dreieck ist der Umfang grösser als die doppelte Hypotenusen-Höhe.

Und ein ähnlicher Satz gilt beim stumpfwinkligen Dreieck:

Bei jedem einem stumpfwinkligen Dreiecke eingeschriebenen Dreiecke ist der Umfang grösser als die doppelte Höhe auf der grössten Seite.

Sei ACB das stumpfwinklige Dreieck (Fig. 5), bei C der stumpfe Winkel, und $A'B'C'$ ein ihm eingeschriebenes, so dass A' auf BC liegt etc. Wir ziehen in C die beiden Senkrechten zu den Katheten, CB_1 zu CA, CA_2 zu CB, welche die Seite AB in die Theile AA_2, A_2B_1, B_1B theilen. Je nachdem nun C' in einem der äussern Theile AA_2, B_1B liegt, hat ACB_1, bez. A_2CB, im Falle er im mittelsten liegt, haben beide Dreiecke die Eigenschaft, dass zwei von den drei Punkten A', B', C' auf seinen Seiten selbst sich befinden. Nehmen wir an, dass ACB_1 das geeignete

rechtwinklige Dreieck sei, und A'' sei der Schnitt $(CB_1, B'A')$, so ist Umfang $A'B'C' >$ Umfang $A''B'C' > 2C\mathfrak{C}$, wenn $C\mathfrak{C}$ die beiden Dreiecken gemeinsame Höhe auf AB ist; womit die Behauptung bewiesen ist.

Dieser untern Grenze $2C\mathfrak{C}$ kann man ersichtlich unbegrenzt nahe kommen.

§ 29. Was nun zunächst das *Kreisviereck* anlangt, so sind folgende Eigenschaften leicht zu erkennen:

a) *Schliesst es den Mittelpunkt ein,* so fallen (wie schon erwähnt) alle Fusspunkte der aus dem Diagonalen-Schnitt gefällten Lothe auf die Seiten selbst, und das Viereck dieser vier Fusspunkte und seine (innerhalb des gegebenen Vierecks befindlichen) Parallel-Vierecke sind die eingeschriebenen Vierecke kleinsten Umfangs.

b) *Wird eine Seite Durchmesser,* so fallen die Fusspunkte auf den beiden Nachbar-Seiten in die beiden Endpunkte der dem Durchmesser gegenüberliegenden Seite, die andern auf die Seiten selbst.

c) *Wenn aber der Mittelpunkt ausgeschlossen wird,* dann sind jene Fusspunkte ganz herausgerückt.

Der Fall *b*), als Grenzfall von *a*), schliesst sich dem Satze für *a*) noch an. *Das Fusspunkten-Viereck* hat einen flachen Winkel erhalten und *ist zum Dreieck ausgeartet, dessen Ecken die beiden erwähnten Endpunkte und der Fusspunkt des aus dem Diagonalen-Schnitt auf die grösste Seite gefällten Lothes sind.*

Parallel-Vierecke (oder -Dreiecke) sind nicht möglich.

Jedes dem Vierecke eingeschriebene Viereck hat einen grösseren Umfang als dieses Dreieck.

Dass die Winkel-Gleichheit noch besteht, davon überzeugt man sich leicht; besonders bemerkenswerth ist sie bei der dritten Ecke; so dass der Fusspunkt des Lothes aus dem Diagonalen-Schnitte auf die grösste Seite auf derselben der Punkt der kleinsten Entfernungssumme von den beiden Gegenecken ist.

Dieser Fusspunkt liegt auf der Seite selbst, denn die beiden Nachbarseiten bilden ja mit derselben spitze Winkel.

Endlich im Falle c), wo das Viereck ABCD den Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises K ausschliesst (Fig. 6), *sei CD die Seite, deren Segment grösser als der Halbkreis ist, und G der Punkt auf ihr, für den* $AG+BG$

am kleinsten ist. Dann repräsentirt das Dreieck ABG das eingeschriebene Viereck vom kleinsten Umfange.

Um dies einzusehen, construiren wir den Kreis K_1 durch A, B, der sein Centrum auf CD hat; seien die Schnitte desselben mit CD bez. C_1, D_1, jener näher an C, dieser an D. Beide Punkte müssen zwischen C und D liegen; denn zwei Kreise K, K_1, die sich in A und B schneiden und ihre Centra auf derselben Seite von AB haben, werden von allen sie durchschneidenden Geraden, welche AB nicht zwischen A und B treffen, in zwei Punktpaaren geschnitten, von denen das eine das andere einschliesst. Da nun $\angle CAD > \frac{\pi}{2}$ und $\angle C_1AD_1 = \frac{\pi}{2}$, so kann nur C_1D_1 von CD eingeschlossen werden.

Der Punkt G auf CD, der die kleinste Entfernungssumme von A, B hat, liegt, wegen der spitzen Winkel C und D, zwischen C und D und ist nach Obigem der Fusspunkt des Lothes aus (AC_1, BD_1) auf CD.

Nehmen wir nun zunächst an, dass dem Viereck $ABCD$ ein Viereck $A'B'C'D'$ eingeschrieben sei (A' auf AB, B' auf BC, etc.), bei welchem C' auf CD zwischen C_1, D_1 sich befindet. Sind dann B'', D'' die Schnitte $(A'B', BC_1)$ und $(D'A', AD_1)$, so ist ersichtlich Umfang $A'B'C'D' >$ Umfang $A'B''C'D''$, da z. B. $B''B' + B'C' > B''C'$; letzterer Umfang ist aber nach dem Satze für Fall *b*) grösser als Umfang ABG; also:

$$\text{Umfang } A'B'C'D' > \text{Umfang } ABG.$$

Wenn hingegen C' in einer der Strecken CC_1, DD_1 sich befindet, z. B. in der ersteren, so construiren wir wieder B'' und ersetzen $A'B'C'D'$ durch $A'B''C'D'$ von kleinerem Umfange; sodann aber suchen wir zu B'' und D' den Punkt auf CD, der die kleinste Entfernungssumme von ihnen hat; da der Winkel $BC_1D_1 < \frac{\pi}{2}$ ist, so wird er auf der andern Seite von C_1 liegen als CC_1; wir können also sicher C' über C_1 hinaus in C_1D_1 hinein schieben, etwa bis C_1', und eine kleinere Entfernungssumme von D', B'' erhalten und demnach ein Viereck $A'B''C_1'D'$ mit kleinerem Umfang als $AB''C'D'$, das dem vorigen Fall entspricht; wir haben mithin:

$$\text{Umfang } A'B'C'D' > \text{Umfang } A'B''C'D' > \text{Umfang } A'B''C_1'D' > \text{Umfang } ABG.$$

Damit ist der Beweis erbracht. Auch hier können wir dieser unteren Grenze ersichtlich unbegrenzt nahe kommen.

§ 30. Den Fall des Kreisvierecks haben wir so erledigt; wir wenden uns nun zum *beliebigen Viereck*, das *Steiner* gar nicht in Betracht gezogen hat.

Auf den ersten Blick scheinen wir hier — wie auch schon im Fall *c*) des Kreisvierecks — vor einem Widerspruch zu stehen. Einerseits wissen wir, dass beim allgemeinen Vierecke kein eingeschriebenes Viereck existirt, das der Bedingung der Winkel-Gleichheit Genüge leistet. Andererseits aber hat ein Viereck, das nicht dieser Bedingung genügt, noch nicht den kleinsten Umfang. Die Lösung des Widerspruches geschieht eben dahin, dass eine Ecke des eingeschriebenen Vierecks in eine Ecke des gegebenen fällt, und zwar so, dass eine Verschiebung auf der Seite selbst (denn diese ist ja allein gestattet, nicht nach aussen) die Ecke von dem Punkte auf der Seite, welcher die kleinste Entfernungssumme von den beiden Nachbarecken der eingeschriebenen Figur hat, *entfernt*. Das Viereck degenerirt dann zu einem Dreiecke (oder gar, wie wir sehen, zu einer doppelten Linie). Zu dem Ende kehren wir nochmals zu dem Kreisvierecke des Falls *a*) zurück und suchen unter den unendlich vielen ihm eingeschriebenen Vierecken kleinsten Umfangs die zu Dreiecken degenerirten auf.

Sei $ABCD$ das Viereck (Fig. 7) und seien A', B', C', D' die Fusspunkte der aus dem Diagonalen-Schnitte auf seine Seiten AB, BC, CD, DA gefällten Lothe; so haben wir

$$\angle\, AA'D' + CAD = AD'A' + BAC = \frac{\pi}{2};$$

ferner

$$\angle\, AA'D' = BA'B', \quad AD'A' = DD'C',$$

also auch

$$BA'B' + CAD = BAC + DD'C';$$

demnach ist, wenn

$$BA'B' >, =, < BAC,$$

auch

$$DD'C' >, =, < CAD,$$

und

$$\angle\, A = BAC + CAD <, =, > AA'D' + CAD \text{ oder } \frac{\pi}{2}.$$

Mithin ist, nur wenn $A \geqq \frac{\pi}{2}$ ist, $BA'B' \leqq BAC$, $DD'C' \leqq CAD$ und lassen sich aus dem Punkte A zwei Parallele zu $A'B'$, $D'C'$ ziehen, welche bez. BC, CD selbst treffen. Seien $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ in diesem Falle die Schnittpunkte, so stellt $A\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$ ein zum Dreieck ausgeartetes eingeschriebenes Viereck vom kleinsten Umfange dar. Da das Kreisviereck zwei stumpfe Winkel hat,

so giebt es deren zwei. Sind etwa die Gegenwinkel A, C Rechte, so entartet dieses Dreieck noch weiter in die doppelte Diagonale AC.

Wir gewinnen folgende Resultate:

Jedes Viereck, das einem Vierecke mit zwei gegenüberliegenden rechten Winkeln eingeschrieben ist, hat einen Umfang, welcher grösser oder ebenso gross als die doppelte Diagonale zwischen den Scheiteln dieser beiden Winkel ist. Ferner: *Aus dem Scheitel eines stumpfen (oder rechten) Winkels eines Kreisvierecks, das den Mittelpunkt des Kreises einschliesst, ist es immer möglich einen Strahl ausgehen zu lassen, der nach Reflexion an den beiden gegenüberliegenden Seiten nach dem Scheitel zurückkehrt, und dabei die Seiten selbst trifft.* Und insbesondere: *Wenn A in dem spitzen (oder rechten) Winkel zweier sich in C schneidenden Geraden liegt, und B, D die Fusspunkte der Lothe aus A auf diese Geraden sind, so ist es immer möglich, von A einen Strahl ausgehen zu lassen, der an den beiden Geraden reflectirt nach A zurückkehrt, und zwar so, dass die Reflexionspunkte $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ zwischen B und C, bez. C und D liegen.*

Ueberdies ist der Umfang von $A\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$ gleich $2BD$.

§ 31. Wir wenden uns jetzt zu einem *allgemeinen Viereck $ABCD$*, zunächst aber einem solchen, das einen einzigen stumpfen Winkel A hat. Die Fusspunkte B_1, D_1 der Lothe aus A auf die Seiten BC, CD liegen nothwendig auf diesen Seiten selbst. Zu jedem dem Viereck $ABCD$ eingeschriebenen Vierecke $A'B'C'D'$ können wir, in derselben Weise, wie im Falle *c*) des Kreisvierecks, ein dem Vierecke AB_1CD_1 eingeschriebenes angeben, das kleineren Umfang hat; im Falle die auf BC oder CD gelegene Ecke B', C' in BB_1, bez. DD_1 liegen sollte, ist zu berücksichtigen, dass die Winkel AB_1C, AD_1C nicht stumpf sind.

Winkel B_1AD_1 ist noch stumpf; also lässt sich innerhalb AB_1CD_1 und mithin auch innerhalb $ABCD$ ein solcher „Reflexionszug“ $A\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$, wie er oben beschrieben ist, construiren, der die untere Grenze für den Umfang der AB_1CD_1 und folglich auch der $ABCD$ eingeschriebenen Vierecke ist. Also:

Besitzt ein Viereck $ABCD$ einen einzigen stumpfen Winkel A, so erhält man die untere Grenze für den Umfang aller eingeschriebenen Vierecke in dem stets möglichen im Innern befindlichen Zug $A\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'A$, der von A ausgehend und in $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ an BC, CD reflectirt, nach A zurückkehrt. —

Wir nehmen nun an, das Viereck $ABCD$ habe zwei benachbarte

stumpfe Winkel A, B, die beiden anderen seien spitz (Fig. 8). Es sei $A+C>\pi$, $B+D<\pi$. Wir legen dann durch A, B, C den Kreis; derselbe schliesst folglich D aus. Der zweite Schnitt von CD mit ihm sei D_1. Ziehen wir die Tangente in C nach derjenigen Seite von CA, auf welcher CD liegt, so bildet diese mit CA einen mit B gleichen, also stumpfen Winkel; da nun CD mit CA einen spitzen Winkel bildet ($<BCD$), so fällt CD in jenen stumpfen Winkel; d. h. CD geht von C aus in den Kreis hinein und der Schnitt D_1 liegt zwischen C, D. Ferner ist $BAD_1>\frac{\pi}{2}$, $AD_1C<\frac{\pi}{2}$.

Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Das Kreisviereck $ABCD_1$ schliesst den Mittelpunkt des Kreises ein; dann erhalten wir, wenn wir wieder berücksichtigen, dass AD_1C spitz ist, als untere Grenze für den Umfang aller dem Vierecke $ABCD$ eingeschriebenen Vierecke den Reflexionszug $A\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'A$.

b) Schliesst aber das Kreisviereck den Mittelpunkt des Kreises aus, so ist CD_1 die Seite, über der sich das grösste Segment befindet. Sei G auf ihr der Punkt kleinster Entfernungssumme von A, B (der zwischen C, D_1, also um so mehr zwischen C und D liegt), so ist die untere Grenze der Umfang des Dreiecks ABG.

Der Fall *a*) oder *b*) tritt ein, je nachdem $CAD_1<\frac{\pi}{2}$ oder $>\frac{\pi}{2}$, oder $ACD+\frac{\pi}{2}>$ oder $<B$.

$ACD+\frac{\pi}{2}>B$ trifft natürlich auch im vorigen Falle ein, wo A der einzige stumpfe Winkel war, und dort ist ebenfalls $A+C>\pi$; denn $\angle\, B_1AD_1<BAD$ und ist das Supplement zu C.

In dem Uebergangsfalle zwischen *a*) und *b*), wo CD_1 Durchmesser wird, fällt $\mathfrak{B}'$ nach B und die beiden Minimal-Figuren $A\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'A$ und $ABGA$ vereinigen sich.

§ 32. Wir nehmen jetzt an, dass das Viereck $ABCD$ drei stumpfe (correcter: nicht spitze) Winkel hat: A, B, C (Fig. 9). Die beiden Senkrechten in A und C auf AB, BC fallen in das Viereck hinein und treffen CD, bez. DA selbst in C_2, D_2, und zwar so, dass AC_2C und AD_2C spitz sind. Ihr Schnittpunkt D_1 liegt innerhalb $ABCD$. Die Diagonale BD_1 muss eine der beiden Seiten CD, AD treffen; sie treffe AD in D_3; offenbar ist AD_3D_1 auch spitz. Es sei nun $A'B'C'D'$ wieder ein dem $ABCD$

eingeschriebenes Viereck; $B'C'$ muss nothwendig CD_1 selbst treffen: in C'', und wenn D' in AD_3 liegt, so trifft auch $A'D'$ die Seite AD_1 selbst: in D''. Verbinden wir C'', D'', so ist das $ABCD_1$ eingeschriebene Viereck $A'B'C''D''$ ersichtlich von kleinerem Umfange als $A'B'C'D'$.

Liegt aber D' in DD_3, so kann $A'D'$ die CD_1 treffen, statt AD_1; ist dann C'' der Schnitt $(B'C', CD_1)$, wie vorher, so ersetzen wir wieder zunächst $C''C'+C'D'$ durch $C''D'$, verschieben dann, was wegen des spitzen Winkels AD_3C möglich ist, D' bis jenseits D_3, bis D'_1, so dass $A'D'_1+D'_1C'' < A'D'+D'C''$, und erhalten, weil nun $A'D'_1$ die AD_1 selbst trifft: in D'', in $A'B'C''D''$ ein dem $ABCD_1$ eingeschriebenes Viereck von kleinerem Umfange als $A'B'C'D'$. Da nun $ABCD_1$ zwei rechte Gegenwinkel hat, so ist nach § 30 die untere Grenze für den Umfang aller ihm eingeschriebenen Vierecke die doppelte Diagonale AC; also ergiebt sie sich auch als untere Grenze für die dem gegebenen Vierecke eingeschriebenen Vierecke. $ABCD_1$ hat zwar als Viereck, das den Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises einschliesst, unendlich viele eingeschriebene Vierecke kleinsten Umfangs; aber nur eins von ihnen, das zur doppelten Diagonale AC degenerirte, ist zugleich dem gegebenen eingeschrieben, und für dieses also das einzige Minimum. Aehnliches gilt übrigens auch im ersten Falle und in *a*) des zweiten. —

Das Viereck $ABCD$ habe zwei gegenüberliegende stumpfe (nicht spitze) Winkel A, C, die beiden anderen seien spitze (Fig. 10). Von den vier Winkeln, die durch die Diagonale AC bei A und C entstehen, sind höchstens zwei nicht spitze und liegen dann zu verschiedenen Seiten von AC und an verschiedenen Ecken; folglich muss es mindestens ein Paar ebenso gelegener spitzer Winkel unter diesen Winkeln geben; diese seien CAB und DCA. Die Senkrechten in A, C zu AB, CD fallen dann in die andern Winkel und treffen also CD, bez. AB: in D_1, B_1. In dem Vierecke AB_1CD_1 haben wir zwei rechte Winkel A, C; einer der beiden andern ist spitz: es sei dies AD_1C, der andere AB_1C also stumpf; demnach fällt das Loth CB_2 aus C auf AB ausserhalb AB_1C, aber innerhalb ABC; und Viereck AB_2CD_1 hat nun einen einzigen spitzen Winkel bei D_1. Zu jedem dem $ABCD$ eingeschriebenen Vierecke $A'B'C'D'$ kann man ein dem AB_2CD_1 eingeschriebenes von kleinerem Umfange ermitteln, indem, wenn A' etwa nach BB_2, oder C' nach D_1D fallen sollte, wegen der nicht stumpfen Winkel AB_2C, AD_1C eine Verschiebung über B_2, D_1, unter Verminderung des Um-

fangs, möglich ist. Die untere Grenze für den Umfang der $ABCD$ eingeschriebenen Vierecke ist deshalb die nämliche, wie die für den Umfang der AB_2CD_1 eingeschriebenen, nämlich die doppelte Diagonale AC nach dem vorigen Falle, da in dieselbe jene und diese Vierecke ausarten können.

§ 33. *Demgemäss haben sich drei Formen der Minimal-Figur ergeben:*

1) *Hat das gegebene Viereck $ABCD$ zwei nicht spitze Gegenwinkel A, C, so ist die doppelte Diagonale AC die untere Grenze für den Umfang aller eingeschriebenen Vierecke.*

2) *Es habe keine zwei gleichzeitig nicht spitze Gegenwinkel; so seien A, C die beiden Gegenwinkel, deren Summe π übersteigt, A der stumpfe, C der spitze Winkel davon, D der einzige spitze von den beiden andern Gegenwinkeln, wenn einer von ihnen nicht spitz ist, oder ein beliebiger, wenn sie beide spitz sind.*

a) Ist dann $ACD+\frac{\pi}{2}>B$, so ist die untere Grenze für den Umfang aller eingeschriebenen Vierecke der von A ausgehende an BC, CD in $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ reflectirte nach A zurückkehrende Strahl $A\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'A$.

b) Ist aber $ACD+\frac{\pi}{2}<B$ (was also einen stumpfen Winkel B voraussetzt), dann sei BGA der von B ausgehende, in G an CD nach A reflectirte Strahl; der Umfang des Dreiecks ABG ist die untere Grenze.

Die Reflexionspunkte $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, G befinden sich stets auf den betreffenden Seiten selbst.

III.

§ 34. In $\mathfrak{B}$ No. 3 IV 1) und 2) giebt *Steiner* die beiden Sätze:

1) *Unter allen Dreiecken mit demselben Winkel an der Spitze und demselben Umfange hat das gleichschenklige den grössten Inhalt, die kleinste Grundlinie und somit die grösste Schenkelsumme.*

2) *Unter allen Dreiecken mit demselben Winkel an der Spitze und demselben Unterschied zwischen Schenkelsumme und Grundlinie hat das gleichschenklige den kleinsten Inhalt, die kleinste Grundlinie* (sowie die kleinste Schenkelsumme und den kleinsten Umfang). Bei dem zweiten dieser Sätze begnügt sich *Steiner* mit einem kurzen Verweis auf einen früheren Satz, der mir nicht verständlich ist*).

*) In seinem Manuscript sowohl, als in diesem Journal Bd. 24 schreibt *Steiner* auch in 2) dem gleichschenkligen Dreiecke den grössten Inhalt zu, und befindet sich

Der Herausgeber der „Werke", Herr *Weierstrass,* bestätigt in Anm. 15) das Minimum in 2) durch einen trigonometrischen Beweis.

Ich erlaube mir, hier einen einfachen geometrischen Beweis beider Sätze, der zugleich ihre Beziehung klar legt, mitzutheilen.

Dazu muss zuerst aus *Steiner*s Satz 𝔅 No. 3 III, der unsern Sätzen vorangeht, ein Hilfssatz gefolgert werden.

*Steiner*s Satz ist: Unter allen Dreiecken mit demselben Winkel an der Spitze und demselben Inhalte hat das gleichschenklige die kleinste Grundlinie. Daraus ergiebt sich: Unter allen Dreiecken mit demselben Winkel an der Spitze und derselben Höhe aus diesem hat das gleichschenklige den kleinsten Inhalt und, was daraus folgt, die kleinste Grundlinie.

Denn es seien Δ, Δ', Δ'' drei im Winkel C an der Spitze übereinstimmende Dreiecke, von ihnen die letzten beiden gleichschenklig, c, c', c'' die drei Grundlinien, h, h', h'' die Höhen; und $h = h'$, $\Delta = \Delta''$. *Steiner*s Satz giebt: $c'' < c$, also: $h'' > h$ und demnach auch $> h'$. Nun sind Δ', Δ'' ähnlich, also: $\Delta'' > \Delta'$ und folglich auch: $\Delta > \Delta'$; und $c > c'$.

Um nun 1) und 2) zugleich zu beweisen, lassen wir den Umfang in 1) denselben Werth $2t$ haben, wie den Unterschied in 2), machen auf des gegebenen Winkels C Schenkeln $CD = CE = t$ und construiren den in D und E die Schenkel berührenden Kreis mit dem Centrum M. Wie *Steiner* selbst bemerkt, tangiren die Geraden AB, welche Dreiecke vom Umfange $2t$ abschneiden, den innern Bogen dieses Kreises und diejenigen Geraden $A'B'$, bei denen $CA' + CB' - A'B' = 2t$, den äussern Bogen.

Ersichtlich ist:

$$a) \quad CAB = CDME - 2\,ABM, \quad CA'B' = CDME + 2\,A'B'M;$$

$CDME$ ist fest und die Dreiecke ABM, $A'B'M$ haben constanten Winkel an der Spitze M und constante Höhe, ferner dieselbe Grundlinie wie bez. ABC, $A'B'C$ und werden gleichzeitig mit diesen gleichschenklig; so dass aus a) und dem obigen Hilfssatze unsere beiden Sätze ohne weiteres folgen.

Trigonometrisch kann man die Minimums-, bez. Maximums-Eigenschaft auch so nachweisen. Man hat:

---

dieser Fehler auch schon in No. 19 der Tabelle des Aufsatzes in *Crelles* Journal Bd. 16 S. 86 (Werke Bd. II S. 44); in den „gesammelten Werken" ist er verbessert. Trotz dieser Wiederholung ist er doch wohl nur ein Schreibfehler, da die in 𝔅 No. 3 VI—IX aus IV gezogenen Schlüsse richtig sind.

$$c = \frac{(a+b\pm c)\sin\frac{C}{2}}{\sin\left(A+\frac{C}{2}\right)\pm\sin\frac{C}{2}};$$

bei festem $a+b\pm c$ und C giebt $A+\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}$, d. i. $A=B$ das Minimum von c; ferner:

$$4F = (a+b+c)^2 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A.\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B.\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C,$$
$$4F = (a+b-c)^2 \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A.\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}B.\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C;$$

bei festem C ist aber $\operatorname{tg}\frac{1}{2}A.\operatorname{tg}\frac{1}{2}B$ ein Maximum und $\operatorname{cotg}\frac{1}{2}A.\operatorname{cotg}\frac{1}{2}B$ ein Minimum, wenn $A=B$.

§ 35. Aus dem Satze $\mathfrak{B}$ No. 3 III, den wir eben erwähnten, und dem allgemeineren Satze, dass von zwei im Winkel an der Spitze und dem Inhalte übereinstimmenden Dreiecken das mit der grösseren Differenz der Schenkel die grössere Grundlinie hat, ergiebt sich auch eine Lösung der Aufgabe, welche von *Steiner* in dem in der Anmerkung des vorigen Paragraphen citirten Aufsatze (Werke Bd. II S. 46) unter No. 14 gestellt ist:

Unter den verschiedenen Geraden, welche die Fläche eines gegebenen Dreiecks ABC halbiren, die kleinste und die grösste aufzusuchen.

Man vergleicht bei jedem der drei Dreieckswinkel erst die Halbirenden, welche seine Schenkel verbinden, und dann vergleicht man die drei gefundenen Minima, bez. Maxima unter einander.

Wir wollen annehmen: $\angle A > B > C$; *die kleinste Flächenhalbirende ist dann diejenige, welche von dem kleinsten Winkel C ein gleichschenkliges Dreieck, halb so gross als ABC, abschneidet;* der Schenkel desselben ist die mittlere Proportionale zwischen AC und $\frac{1}{2}BC$; dass dieselbe $< AC$ ist, folgt aus $AB < AC$, $BC < AB+AC$ und also $\frac{1}{2}BC < AC$.

Die grösste der flächenhalbirenden Geraden ist die grösste der drei Transversalen aus den Ecken nach den Mitten der Gegenseiten, d. i. die aus dem kleinsten Winkel C. Denn vergleichen wir irgend zwei dieser Transversalen z. B. AA', CC'; so ist bekanntlich*):

$$2\overline{AA'}^2 = \overline{AB}^2+\overline{AC}^2-\tfrac{1}{2}\overline{BC}^2,$$
$$2\overline{CC'}^2 = \overline{AC}^2+\overline{BC}^2-\tfrac{1}{2}\overline{AB}^2;$$

also

$$4(\overline{CC'}^2-\overline{AA'}^2) = 3(\overline{BC}^2-\overline{AB}^2);$$

mithin $CC' > AA'$ und ebenso $> BB'$.

---

*) *Baltzers* Elem. der Math. Planim. § 14, 18.

§ 36. Ebenso lösen wir die Aufgabe: ***Die kleinste und die grösste umfanghalbirende Linie zu finden.***

Wir benutzen *Steiners* Sätze 𝔅 No. 2, 3:

Von allen Dreiecken mit demselben Winkel an der Spitze und derselben Schenkelsumme hat je das mit der grösseren Schenkeldifferenz die grössere Grundlinie, das gleichschenklige die kleinste.

Wir schneiden vom kleinsten Winkel C ein gleichschenkliges Dreieck ab, dessen Schenkel gleich $\frac{1}{4}$ vom Umfang sind (und daher kürzer als die beiden den Winkel einschliessenden Seiten AC, BC); ***seine Grundlinie ist die kleinste Umfanghalbirende. Die grösste ist wieder die grösste unter den drei Umfanghalbirenden AA_1, BB_1, CC_1, die von einer Ecke ausgehen, d. i. die von C ausgehende.*** Denn man erkennt leicht, dass die drei Punkte A_1, B_1, C_1 zu den Berührungspunkten des eingeschriebenen Kreises symmetrisch liegen je in Bezug auf die Seitenmitte, es ist:

$$AB_1 = BA_1, \quad BC_1 = CB_1, \quad CA_1 = AC_1.$$

Wir haben in den Dreiecken BB_1C und CC_1B demnach $BC = BC$, $CB_1 = BC_1$, aber $\angle B > C$, also $CC_1 > BB_1$ und ebenso $> AA_1$.

AA_1, BB_1, CC_1 laufen in einen Punkt zusammen.

§ 37. In Anm. 25) des zweiten Bandes der „Werke" S. 739 findet sich aus *Steiners* Nachlass die Aufgabe:

Innerhalb eines gegebenen Winkels C ist ein Punkt P gegeben; durch ihn die Gerade zu ziehen, welche vom Winkel das Dreieck vom kleinsten Umfange abschneidet*).

Es seien P', P'' die je auf dem innern Bogen befindlichen Schnitte von CP mit zwei die Schenkel von C tangirenden Kreisen; so verhalten sich CP', CP'' wie die Radien derselben. ***Construiren wir denjenigen beide Schenkel berührenden Kreis K, der durch P geht und zwar so, dass P auf dem innern Bogen liegt,*** so schliessen alle die Schenkel berührenden Kreise, welche grösser als K sind, P so aus, dass sie von ihm auf dem innern Bogen berührende Tangenten erhalten, die kleineren aber schliessen P ein, oder so aus, dass die Tangenten aus P auf dem Aussenbogen berühren; bei jenen ist der Umfang des von den Innentangenten abgeschnittenen Dreiecks dem Radius proportional; also ***giebt die Tangente AB in P an K das Dreieck vom kleinsten Umfange.***

---

*) Die analoge Aufgabe über das Dreieck vom kleinsten Inhalt behandelt *Steiner* 𝔅 No. 3 III Anm.

Die Halbirungslinien der Aussenwinkel A, B (*Steiner* sagt bloss: Winkel) und das Loth auf AB in P laufen in einen Punkt zusammen: den Mittelpunkt von K.

Liegt P auf dem einen Schenkel, so fällt AB mit ihm zusammen, und das Dreieck kleinsten Umfangs hat die Seiten PC, 0, CP.

§ 38. Im Anschlusse hieran stellt *Steiner* die Aufgabe:

„Einem Dreiecke ABC dasjenige umzuschreiben, welches den kleinsten Umfang hat", und scheint (ich kann aus dem ganzen Zusammenhange der in Anm. 25) mitgetheilten *Steiner*schen Notizen nicht anders schliessen) das Dreieck $A'B'C'$ als Lösung zu meinen, bei dem das aus den Halbirungslinien der Aussenwinkel construirte Dreieck so beschaffen ist, dass die Lothe aus dessen Ecken auf die Seiten von $A'B'C'$ die Ecken des gegebenen zu Fusspunkten haben. Und auf den ersten Anblick macht dies auch den Eindruck der Richtigkeit; denn ein umgeschriebenes Dreieck, bei dem jene Eigenschaft nicht an allen drei Seiten statt hat, lässt sich, in Folge der im vorigen Paragraphen behandelten Aufgabe, im Allgemeinen (vergl. jedoch die Schlussbemerkung dieser Nummer) in ein anderes mit geringerem Umfange verwandeln, indem man zwei Seiten festhält und die dritte um die betreffende Ecke in die Linie dreht, welche von dem Winkel der festen Seiten das Dreieck kleinsten Umfanges abschneidet, oder wenigstens auf diese Linie zu dreht.

Damit ist aber nur bewiesen, dass das *Steiner*sche Dreieck auf *diese* Weise, bei welcher bloss eine Seite bewegt wird, nicht kleineren Umfang erhalten kann. Fraglich bleibt, ob es nicht bei gleichzeitiger Bewegung zweier oder aller drei Seiten möglich ist; z. B. wenn eine Seite des *Steiner*schen Dreiecks gedreht ist, so dass der Umfang zugenommen hat, und nun zwei andere Seiten festgehalten werden und durch Drehung der jetzigen dritten Seite der Umfang wieder vermindert wird, so kann ja möglicherweise diese Verkleinerung grösser sein, als jene Vergrösserung.

Nur wenn es möglich wäre, durch eine endliche Zahl der obigen Verwandlungen, die jedesmal den Umfang verkleinern, von einem beliebigen umgeschriebenen Dreiecke zu dem *Steiner*schen Dreiecke zu gelangen, wäre dieses das Dreieck vom kleinsten Umfange.

Thatsächlich ist es nicht dasselbe; sondern *das gegebene Dreieck ist das Minimums-Dreieck,* so wie es auch unter den eingeschriebenen das mit dem grössten Umfange ist. Wir setzen natürlich voraus, dass die Um-

schreibung so geschehen soll, dass das umgeschriebene das gegebene umschliesst (denn andernfalls giebt es Nulldreiecke). Jedes so umgeschriebene Dreieck hat aber ersichtlich grösseren Umfang als das gegebene, und dem letzteren kann man sich offenbar unbegrenzt nähern: man drehe die durch A, B, C gehenden Seiten bis unendlich nahe bez. an AB, BC, CA (oder an AC, BA, CB).

Die Lösung unserer Aufgabe ist also eigentlich selbstverständlich, und ich habe die Sache nur deshalb eingehend besprochen, um an einem eclatanten Beispiele zu zeigen, wie wenig es nützt, eine gewisse Eigenschaft aufgefunden zu haben, ohne welche eine Figur nicht Minimums- (oder Maximums-) Figur sein kann (oder richtiger: sein zu können scheint); wenn es eben nicht möglich ist, durch einen endlichen Prozess, bei welchem jeder Schritt eine Verkleinerung (oder Vergrösserung) bewirkt, von einer beliebigen Figur zu der mit dieser Eigenschaft zu gelangen.

Durch die Beschränkung, dass die Seiten der umgeschriebenen Figur nicht die volle Umdrehung um die Ecken der gegebenen vollziehen dürfen, wird die Eigenschaft illusorisch; die wirkliche Minimums-Figur besitzt sie nicht und braucht sie auch nicht zu besitzen, weil bei ihr (oder, was vielleicht für die Anschauung etwas bequemer ist, einer von ihr unendlich wenig verschiedenen), wenn zwei Seiten festgehalten werden und die dritte nach der Minimumslage zu gedreht wird, diese sofort in das Dreieck hineintritt, was nicht zulässig ist. Also ist bei ihr die Verkleinerungs-Operation, auch ohne dass jene Eigenschaft existirt, nicht ausführbar.

Ich füge eine freilich mit dem Vorhergehenden in keinem Zusammenhange befindliche Notiz hinzu. *Steiner* hat im Abschnitte IV des Aufsatzes in diesem Journale Bd. 55 S. 356 (Werke Bd. II S. 682) ohne Beweis die Anzahlen der Kegelschnitte mitgetheilt, welche durch P gegebene Punkte gehen, T gegebene Tangenten, N gegebene Normalen haben; eigenthümlicherweise bezeichnet er die Lösungen in *allen* Fällen, wo $N=0$ ist, als geometrisch construirbar. Interessant sind ja nur noch die Fälle, wo $N>0$. Es dürfte die Mittheilung doch nicht ohne Werth sein, dass ich mit Hilfe der Methoden der abzählenden Geometrie, wie sie insbesondere Herr *Schubert* in seinem „Kalkül der abzählenden Geometrie" (vgl. für das Folgende insbesondere §§ 20, 22) ausgebildet hat, jene Zahlen gelegentlich berechnet,

was ja nun eine sehr einfache Arbeit ist, und *Steiners* Angaben *bestätigt* gefunden habe. Sehr zu bedauern ist freilich, dass *Steiner* uns nichts hinterlassen hat, woraus wir ersehen könnten, wie er selbst zu jener Zeit schon derartige Abzählungen gemacht hat.

Der „Modul" der Normalen-Bedingung (nach der *Schubert*schen Terminologie) ist $\mu+\nu$, wenn μ, ν die bekannten elementaren Bedingungen des Kegelschnittes sind; also hat man nur die Zahlen $\mu^P\nu^T(\mu+\nu)^N$ zu berechnen.

Analog ist der Modul der Normalen-Bedingung für eine Fläche zweiten Grades, hier einer doppelten Bedingung, $\frac{1}{2}\nu(\mu+\varrho)$. Danach giebt es z. B. in dem durch 4 gegebene Normalen bestimmten Systeme von Flächen zweiten Grades je 86 Flächen, welche durch einen Punkt gehen oder eine Ebene berühren, und 92, welche eine Gerade berühren. Man findet ebenso leicht, dass *in allen Fällen, wo zur Bestimmung einer Fläche zweiten Grades bloss Tangenten und Normalen gegeben sind* (9, 7, 5, 3, 1 Tangenten und 0, 1, 2, 3, 4 Normalen), *die Zahl der Lösungen* 92 *ist.*

Münster i. W., 1883.

Ueber das Minimum des Inhaltes eines Vierecks bei gegebenen Seiten.

(Auszug aus einem Briefwechsel zwischen Herrn *R. Sturm* in Münster i. W. und Herrn *E. Lampe.*)

Münster, den 21. December 1883.

In § 11 meines vorangehenden Aufsatzes sprach ich S. 45 die Ansicht aus, dass ***die untere Grenze für den Inhalt eines gemeinen (sich nicht durchschneidenden) Polygons, dessen Seiten gegeben sind,*** nicht leicht zu ermitteln sein dürfte; während des Druckes hat mich Herr *Lampe* freundlichst darauf aufmerksam gemacht, dass sie wenigstens beim *Viereck* ohne Schwierigkeit zu finden ist. Da das Resultat vielleicht doch wenig bekannt ist, so möge Herrn *Lampe*s Betrachtung hier mitgetheilt werden.

R. Sturm.

Berlin, den 2. December 1883.

Aus der letzten Vorlesung von *Steiner* über diesen Gegenstand weiss ich, dass er hierbei solche Polygone nicht ausschloss, deren Umfänge sich schneiden, die also den Inhalt Null erhalten können. Auch die gewöhnliche analytische Behandlung der Aufgabe für das Viereck weist auf die Nothwendigkeit hin, solche Polygone in Betracht zu ziehen.

Sind nämlich die Seiten des Vierecks ihrer Grösse nach geordnet a, b, c, d ($a \gtreqless b$ etc.) und setzt man die Seiten vorläufig in dieser Reihenfolge zu einem (gemeinen) Vierecke zusammen, so wird, falls $\angle (ab)$ mit x, $\angle (cd)$ mit y bezeichnet wird, der Flächeninhalt F durch die Formel gegeben:

$$(1.)\qquad F = \tfrac{1}{2}ab\sin x + \tfrac{1}{2}cd\sin y;$$

ausserdem besteht zwischen x und y die Relation:

$$(2.)\qquad a^2+b^2-2ab\cos x = c^2+d^2-2cd\cos y.$$

Nach Differentiation von (1.) und (2.) erhält man für Maxima oder Minima des Inhaltes die Bedingungsgleichung:

$$\sin(x+y) = 0.$$

Hieraus folgen mit Rücksicht darauf, dass x und y Viereckswinkel sind, die beiden Möglichkeiten:

$\alpha)$ $x+y = \pi$,

$\beta)$ $x+y = 2\pi$ (oder Null, was geometrisch dasselbe ist.).

Für die Bedingung $\alpha)$ berechnet man aus (1.) und (2.):

$$(3.)\quad 16F^2 = (-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d),$$

für $\beta)$ ebenso:

$$(4.)\quad 16F^2 = (a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(-a+b+c-d).$$

Man zeigt leicht, dass (3.) ein Maximum, (4.) ein Minimum von F giebt; dieses letztere ist natürlich nur dann vorhanden, wenn $b+c \gtreqless a+d$ ist. Das Maximal-Viereck ist das Kreis-Viereck mit concaven Winkeln aus den vier gegebenen Seiten. Das Minimal-Viereck ist (wegen $x+y = 2\pi$) ein Kreis-Viereck, von welchem zwei Seiten sich schneiden, dessen Inhalt also (nach der bekannten Definition des Inhaltes solcher Figuren) gleich der Differenz des Inhaltes der beiden dabei auftretenden Dreiecke ist. Die Form der Ausdrücke in (3.) und (4.) zeigt, dass diese Werthe unabhängig von der Reihenfolge sind, in der man die Seiten zum Vierecke zusammensetzt.

Ein anderes Maximum oder Minimum (im analytischen Sinne) *existirt nicht.*

Geht man von der Figur des Maximal-Inhaltes aus, so bewirkt jede stetige Aenderung der Winkel eine Abnahme des Inhaltes. Existirt das Minimum ($b+c \gtreqless a+d$), so kann man das Viereck stetig bis zu ihm überführen und darüber hinaus zurück bis zum Maximum. Existirt es nicht ($b+c < a+d$), so geht das Viereck durch dasjenige vom Inhalte Null (bei welchem zwei Seiten sich schneiden) in eins von negativem Inhalte über, so dass zuletzt das Kreis-Viereck mit concaven Winkeln auch (negativ) als Minimal-Viereck auftritt.

Offenbar hat *Steiner*, um das Princip der Continuität zu wahren, bei dieser Frage diejenigen Polygone nicht ausgeschlossen, deren Umfänge sich selbst schneiden. Somit ergiebt denn auch die von Ihnen S. 45 unten angeführte Formel das richtige Resultat.

Durch das Princip der Continuität erschliesst man ferner sofort die Antwort auf die von Ihnen in Betreff des Vierecks aufgeworfene Frage.

Als *Grenzfiguren* in Ihrem Sinne, durch welche nämlich die „gemeinen" Vierecke in überschlagene übergehen, treten *Dreiecke* auf, deren Seiten durch *zwei* der gegebenen Viereckseiten und *die Differenz der beiden anderen* gebildet werden.

Ist $b+c > a+d$, so sind solche Dreiecke möglich aus 1) $a-d, b, c$; 2) $a, b-d, c$; 3) $a, b, c-d$. Bildet man die Differenzen der Inhaltsquadrate je zweier von diesen drei Dreiecken, so erweist sich das dritte als das kleinste; sein Inhalt ist also die von Ihnen gewünschte *untere Grenze:*

$$(5.) \quad 16F^2 = (a+b+c-d)(-a+b+c-d)(a-b+c-d)(a+b-c+d).$$

Ist $b+c < a+d$, so haben die möglichen drei Dreiecke die Seiten 1) $a-d, b, c$; 2) $a-c, b, d$; 3) $a-b, c, d$. Das letztere erweist sich als das kleinste, mithin sein Inhalt in diesem Falle als *untere Grenze:*

$$(6.) \quad 16F^2 = (-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a-b-c+d)(a-b+c-d).$$

Ist $b+c = a+d$, so folgt aus (5.) und (6.) die von Ihnen für diesen Fall bereits angegebene Grenze Null.

Es ist mir nicht wahrscheinlich, dass die von Ihnen aufgeworfene Frage nach der unteren Grenze des Inhaltes für „gemeine" Polygone im Allgemeinen zu interessanteren Ergebnissen führen kann, da man, wie Sie sehen, im Falle des Vierecks nur zu Grenzfällen gelangt, in denen die Vierecke zu Dreiecken werden.

E. Lampe.

Wir erhalten also als untere Grenze des Inhaltes aller aus vier gegebenen Seiten a, b, c, d (in beliebiger Reihenfolge) construirbaren gemeinen Vierecke den Inhalt des Dreiecks aus $a-b, c, d$ oder aus $c-d, a, b$, je nachdem $a+d$ grösser oder kleiner als $b+c$ ist. Im Falle $a+d = b+c$ ist die untere Grenze Null.

Und in ähnlicher Weise findet man, wenn man sich noch specieller auf *die Vierecke ohne convexe Winkel* beschränkt, in den beiden Fällen als untere Grenze den Inhalt des Dreiecks aus $a, d, b+c$, bezw. aus $b, c, a+d$; auch hier ist im Falle $a+d = b+c$ die untere Grenze Null.

R. Sturm.

Ueber Gruppen von Thetacharakteristiken.

(Von Herrn *G. Frobenius* in Zürich.)

Unter den Thetafunctionen k^{ten} Grades von ϱ Variabeln, welche bei Vermehrung der Argumente um simultane Perioden mit den nämlichen Exponentialfactoren multiplicirt werden, sind genau k^ϱ linear unabhängig. Darunter giebt es auch solche, welche bereits den k^{ten} Theil einiger der ursprünglichen Perioden zu Perioden haben. Die Anzahl der linearunabhängigen unter diesen ist kleiner als k^ϱ und wird gleich 1 für die Functionen, welche Thetafunctionen ersten Grades mit den kleineren Perioden sind, also aus den Thetafunctionen ersten Grades mit den gegebenen Perioden durch eine Transformation k^{ten} Grades entstehen.

In der folgenden Arbeit beschränke ich mich (§§ 4 und 5) auf die Betrachtung von Thetafunctionen *zweiten* Grades, deren zweites logarithmisches Differential ungeändert bleibt, wenn das Argument um gewisse *halbe* Perioden vermehrt wird, nachdem ich zur Vorbereitung (§§ 1—3) die aus den Thetacharakteristiken gebildeten *Gruppen* untersucht habe. Mit Hülfe dieser Functionen gelangt man zu einer schärferen Einsicht in das Wesen der Formeln, welche die Herren *Stahl* (dieses Journal Bd. 88), *Nöther* (Math. Ann. Bd. 16) und *Prym* (Untersuchungen über die *Riemann*sche Thetaformel, Leipzig 1882) auf anderen Wegen gefunden haben. Ich bediene mich derselben Bezeichnungen wie in meiner Arbeit „Ueber das Additionstheorem der Thetafunctionen mehrerer Variabeln" (dieses Journal Bd. 89), die ich der Kürze halber mit *T.* citiren werde.

§ 1.

In der folgenden Untersuchung sind zwei Charakteristiken immer als gleich bezeichnet, wenn sie mod. 2 congruent sind. Alle Combinationen von γ unabhängigen Charakteristiken $R_1, R_2, \dots R_\gamma$ bilden nebst O eine *Gruppe* $\mathfrak{R}$ von $c = 2^\gamma$ Charakteristiken. Die Zahl γ heisst der *Rang*, die

Zahl c die *Ordnung* der Gruppe (dieses Journal Bd. 86, S. 219). Das System der γ Charakteristiken R_λ oder irgend ein anderes System von γ unabhängigen Charakteristiken der Gruppe heisst eine *Basis* von $\mathfrak{R}$. Allgemeiner nenne ich die 2^γ wesentlichen Combinationen von $\gamma+1$ wesentlich unabhängigen Charakteristiken $C, C_1, \dots C_\gamma$ ein *vollständiges System* $\mathfrak{C}$ vom Range γ und der Ordnung c und irgend $\gamma+1$ wesentlich unabhängige Charakteristiken desselben eine Basis von $\mathfrak{C}$. (Vgl. *Prym*, l. c. S. 86). Damit ein vollständiges System eine Gruppe sei, ist nothwendig und hinreichend, dass es die Charakteristik O enthalte. Zählt man zu allen Charakteristiken eines vollständigen Systems eine bestimmte Charakteristik H hinzu, so erhält man wieder ein vollständiges System, das ich mit $H\mathfrak{C}$ bezeichne. Die $2^{2\varrho-\gamma}$ verschiedenen vollständigen Systeme, die auf diese Art aus einem erhalten werden, bilden einen Complex vollständiger Systeme. Unter denselben befindet sich nur eine einzige Gruppe, die sich ergiebt, wenn man für H irgend eine in $\mathfrak{C}$ enthaltene Charakteristik wählt, und die aus allen Summen einer geraden Anzahl der Basischarakteristiken $C, C_1, \dots C_\gamma$ besteht. Sie soll die dem vollständigen Systeme $\mathfrak{C}$ entsprechende Gruppe genannt werden.

Zwei Charakteristiken A und B heissen *syzygetisch* oder *azygetisch*, je nachdem $|A, B| \equiv 0$ oder 1 ist. Um von den gegenseitigen Beziehungen der Charakteristiken einer Gruppe $\mathfrak{R}$ eine genauere Vorstellung zu gewinnnen, untersuche man zunächst, ob es in $\mathfrak{R}$ ausser O noch andere Charakteristiken P giebt, die mit allen Charakteristiken $R_0, R_1, \dots R_{c-1}$ von $\mathfrak{R}$ syzygetisch sind, also den c Congruenzen

$$(1.) \quad |P, R_\lambda| \equiv 0 \qquad (\lambda = 0, 1, \dots c-1)$$

genügen. Dazu reicht es aus, dass P die γ unabhängigen Congruenzen

$$|P, R_\varkappa| \equiv 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \dots \gamma)$$

befriedigt. Sind P und P' zwei ihnen genügende Charakteristiken, so ist auch PP' eine solche. Demnach bilden alle Charakteristiken P eine Gruppe $\mathfrak{P}$, welche ich die *syzygetische Untergruppe* von $\mathfrak{R}$ nenne. Sind $P_0, P_1, \dots P_{a-1}$ die $a = 2^\alpha$ Charakteristiken derselben, so besteht nach (1.) zwischen je zwei derselben die Beziehung

$$(2.) \quad |P_\varkappa, P_\lambda| \equiv 0.$$

Zwei Charakteristiken A und B heissen mod. $\mathfrak{P}$ *äquivalent*, wenn AB in $\mathfrak{P}$ enthalten ist. Sind A, A', B, B' vier Charakteristiken von $\mathfrak{R}$, und ist $A \equiv A'$ und $B \equiv B'$ (mod. $\mathfrak{P}$), so ist nach (1.) und (2.):

$$|A, B| \equiv |A', B'|.$$

Ist $a < c$, so giebt es in $\mathfrak{R}$ mindestens zwei azygetische Charakteristiken Q_1 und Q_2. Ist dann P irgend eine Charakteristik von $\mathfrak{P}$, so ist PQ_1Q_2 sowohl mit Q_1 als auch mit Q_2 azygetisch. Man untersuche nun, ob es in $\mathfrak{R}$ eine Charakteristik Q_3 giebt, die mit Q_1 und Q_2 azygetisch ist und nicht äquivalent Q_1Q_2 (mod. $\mathfrak{P}$) ist; sodann eine Charakteristik Q_4, die mit Q_1, Q_2 und Q_3 azygetisch ist; ferner eine Charakteristik Q_5, die mit Q_1, Q_2, Q_3 und Q_4 azygetisch ist und nicht ihrer Summe mod. $\mathfrak{P}$ äquivalent ist u. s. w. Setzt man dies Verfahren so weit als möglich fort, so erhält man β Charakteristiken $Q_1, Q_2, \dots Q_\beta$ der Gruppe $\mathfrak{R}$, die folgende Eigenschaften haben: I. Je zwei derselben sind azygetisch,

$$(3.) \quad |Q_\lambda, Q_\mu| \equiv 1 \qquad (\lambda \lesseqgtr \mu).$$

II. $Q_1Q_2 \dots Q_{2\lambda+1}$ ist nicht in $\mathfrak{P}$ enthalten. III. Es giebt in $\mathfrak{R}$ keine mit $Q_1, \dots Q_\beta$ azygetische Charakteristik, ausser

$$Q = Q_1Q_2 \dots Q_\beta,$$

wenn β gerade ist.

Diese Charakteristiken sind (mod. $\mathfrak{P}$) unabhängig, d. h. keine Combination derselben ist in $\mathfrak{P}$ enthalten. Denn sei R eine Combination von $\varkappa$ unter ihnen und zunächst $\varkappa < \beta$. Ist dann Q_λ unter jenen $\varkappa$ Charakteristiken enthalten, Q_μ aber nicht, so ist $|R, Q_\lambda| \equiv \varkappa - 1$ und $|R, Q_\mu| \equiv \varkappa$, also $|R, Q_\lambda Q_\mu| \equiv 1$, und mithin ist R nicht in $\mathfrak{P}$ enthalten. Ferner ist $R = Q_1Q_2 \dots Q_\beta$, wenn β ungerade ist, zufolge der Eigenschaft II., und wenn β gerade ist, zufolge der Congruenz $|R, Q_1| \equiv 1$ nicht in $\mathfrak{P}$ enthalten.

Wenn es in $\mathfrak{R}$ eine Charakteristik R giebt, die sich nicht aus $Q_1, Q_2, \dots Q_\beta$ und den Charakteristiken von $\mathfrak{P}$ zusammensetzen lässt, so sei etwa

$$|R, Q_1| \equiv 0, \dots \; |R, Q_\varkappa| \equiv 0, \; |R, Q_{\varkappa+1}| \equiv 1, \dots \; |R, Q_\beta| \equiv 1.$$

Dann genügen $S = RQ_1 \dots Q_\varkappa$ und $T = RQ_{\varkappa+1} \dots Q_\beta$ den Congruenzen

$$|S, Q_\lambda| \equiv \varkappa - 1, \quad |T, Q_\lambda| \equiv \beta - \varkappa \qquad (\lambda = 1, 2, \dots \beta).$$

Der Eigenschaft III. zufolge sind daher $\varkappa - 1$ und $\beta - \varkappa$ gerade, also β ungerade. Jede der etwa vorhandenen Charakteristiken R lässt sich also durch Hinzufügung einiger der Charakteristiken Q_λ so abändern, dass sie den Congruenzen

$$(4.) \quad |R, Q_\lambda| \equiv 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \dots \beta)$$

genügt. Bilden $P_1, \dots P_\alpha$ eine Basis von $\mathfrak{P}$, so kann man folglich eine

Anzahl den Gleichungen (4.) genügender Charakteristiken $R_1, \dots R_\delta$ so bestimmen, dass sie zusammen mit $P_1, \dots P_\alpha, Q_1, \dots Q_\beta$ eine Basis von $\mathfrak{R}$ bilden. Die Charakteristik $Q = Q_1 \dots Q_\beta$ genügt dann nach (1.) den Congruenzen

$$|Q, P_\lambda| \equiv 0, \qquad (\lambda = 1, 2, \dots \alpha)$$

nach (4.) den Congruenzen

$$|Q, R_\lambda| \equiv 0, \qquad (\lambda = 1, 2, \dots \delta)$$

und weil β ungerade ist, nach (3.) den Congruenzen

$$|Q, Q_\lambda| \equiv 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \dots \beta)$$

und mithin auch den Congruenzen $|Q, R| \equiv 0$, wo R irgend eine Charakteristik von $\mathfrak{R}$ ist. Demnach ist Q in der Gruppe $\mathfrak{P}$ enthalten, im Widerspruch mit der Eigenschaft II. Folglich muss $\delta = 0$ sein, und $P_1, \dots P_\alpha$, $Q_1, \dots Q_\beta$ bilden eine Basis von $\mathfrak{R}$. Ferner muss β gerade sein, weil sonst Q mit allen Charakteristiken einer Basis von $\mathfrak{R}$ syzygetisch und mithin in $\mathfrak{P}$ enthalten wäre. Es ergiebt sich also der Satz:

I. ***Die Differenz zwischen dem Rang einer Gruppe und dem ihrer syzygetischen Untergruppe ist stets eine gerade Zahl.***

Ich will daher β durch 2β ersetzen. Jede Gruppe hat demnach eine Basis, deren Charakteristiken den Congruenzen

$$(5.) \quad |P_\varkappa, P_\lambda| \equiv 0, \quad |P_\varkappa, Q_\lambda| \equiv 0, \quad |Q_\varkappa, Q_\lambda| \equiv 1$$

genügen, und welche ich eine ***normale Basis*** nennen will. Ist z. B. $\mathfrak{R}$ die aus allen $2^{2\varrho}$ Charakteristiken gebildete Gruppe, so besteht $\mathfrak{P}$ nach *T.* S. 191 nur aus der Charakteristik O. Daher giebt es 2ϱ unabhängige Charakteristiken, von denen je zwei azygetisch sind.

Da die $\alpha + 2\beta$ Charakteristiken

$$(6.) \quad P_1, \dots P_\alpha, \quad Q_1, \dots Q_{2\beta}$$

unabhängig sind, so kann man eine Charakteristik $X = Q_{2\beta+1}$ finden, welche den Congruenzen

$$|P_1, X| \equiv 1, \quad |P_\varkappa, X| \equiv 0, \quad |Q_\lambda, X| \equiv 1 \qquad (\varkappa = 2, \dots \alpha;\ \lambda = 1, \dots 2\beta)$$

genügt. Dann befriedigt $Q_{2\beta+1} P_1 = Q_{2\beta+2}$ dieselben Congruenzen, und die $\alpha + 2\beta + 1$ Charakteristiken $P_2, \dots P_\alpha, Q_1, \dots Q_{2\beta+2}$ sind unabhängig. Denn bestände zwischen ihnen eine Relation, so könnten in derselben $Q_{2\beta+1}$ und $Q_{2\beta+2}$ nicht beide fehlen, weil die Charakteristiken (6.) unabhängig sind, und aus demselben Grunde nicht beide zugleich vorkommen, da $Q_{2\beta+1} Q_{2\beta+2} = P_1$ ist. Käme aber nur eine von ihnen vor, so wäre diese eine Combination

der Charakteristiken (6.), also, wie alle diese Combinationen, mit P_1 syzygetisch, wider die Voraussetzung.

In derselben Weise kann man P_2 in eine Summe von zwei azygetischen Charakteristiken $Q_{2\beta+3}$ und $Q_{2\beta+4}$ zerlegen, die den Congruenzen

$$|P_2, X| \equiv 1, \quad |P_\varkappa, X| \equiv 0, \quad |Q_\lambda, X| \equiv 1 \qquad (\varkappa = 3, \dots \alpha;\ \lambda = 1, \dots 2\beta+2)$$

genügen. Indem man so fortfährt, erhält man den Satz:

II. *Jede Gruppe hat eine Basis*

$$Q_1, Q_2, \dots Q_{2\beta}, \quad P_1 = Q_{2\beta+1}Q_{2\beta+2}, \quad P_2 = Q_{2\beta+3}Q_{2\beta+4}, \dots P_\alpha = Q_{2\beta+2\alpha-1}Q_{2\beta+2\alpha},$$

wo** $Q_1, \dots Q_{2\beta+2\alpha}$ **unabhängige Charakteristiken sind, von denen je zwei azygetisch sind.

Drei Charakteristiken A, B, C heissen syzygetisch oder azygetisch, je nachdem $|A, B, C| \equiv 0$ oder 1 ist. Wenn die Charakteristiken zweier Systeme $A, A_1, A_2, \dots$ und $B, B_1, B_2, \dots$ einander paarweise entsprechen (A_α und B_α), und wenn für je drei Paare entsprechender Charakteristiken

$$|A_\alpha, A_\beta, A_\gamma| \equiv |B_\alpha, B_\beta, B_\gamma|$$

ist, und wenn die wesentlichen Relationen zwischen den Charakteristiken des einen Systems die nämlichen sind, wie die zwischen denen des andern, so heissen die beiden Systeme *äquivalent* (*T.* Einleitung). Da $|O, A, B| = |A, B|$ ist, so reducirt sich die erste Bedingung, falls in beiden Systemen die Charakteristiken O und O einander entsprechen, auf die Congruenzen $|A_\alpha, A_\beta| \equiv |B_\alpha, B_\beta|$ zwischen den unabhängigen Charakteristiken beider Systeme. Sei nun A_λ die Charakteristik, in welcher $\mu_\lambda = 1$, $\nu_\lambda = 0$, B_λ die, in welcher $\mu_\lambda = 0$, $\nu_\lambda = 1$ und beide Mal alle andern Zahlen $\mu_\varkappa$ und $\nu_\varkappa$ Null sind. Setzt man dann

$$Q_1 = B_1, \quad Q_2 = A_1B_1, \quad Q_3 = A_1B_2, \quad Q_4 = A_1A_2B_2,$$

allgemein

$$Q_{2\lambda-1} = A_1 \dots A_{\lambda-1}B_\lambda, \quad Q_{2\lambda} = A_1 \dots A_\lambda B_\lambda, \qquad (\lambda = 1, 2, \dots \beta)$$

ferner

$$P_1 = A_{\beta+1}, \dots P_\alpha = A_{\beta+\alpha},$$

so bestehen zwischen diesen Charakteristiken die Beziehungen (5.). Bildet man die Gruppe, deren Basis diese Charakteristiken bilden, so erhält man den Satz:

III. *Zu jeder Gruppe von Charakteristiken giebt es eine äquivalente Gruppe, in welcher der Charakteristik O wieder O entspricht, und welche aus allen Charakteristiken besteht, in denen $\mu_1, \dots \mu_{\alpha+\beta}, \nu_1, \dots \nu_\beta$ die Werthe* 0 *und* 1 *haben, dagegen $\mu_{\alpha+\beta+1}, \dots \mu_\varrho, \nu_{\beta+1}, \dots \nu_\varrho$ gleich Null sind.*

§ 2.

Da $P_1, \dots P_\alpha, Q_1, \dots Q_{2\beta}$ unabhängig sind, so haben die $\alpha+2\beta$ Congruenzen

$$|X, P_\varkappa| \equiv 0, \quad |X, Q_\lambda| \equiv 0$$

$2^{2\varrho-\alpha-2\beta}$ unabhängige Lösungen. Zu ihnen gehören die 2^α Charakteristiken von $\mathfrak{P}$, und mithin ist $2^{2\varrho-\alpha-2\beta} \geqq 2^\alpha$ oder

$$(1.) \quad \alpha+\beta \leqq \varrho.$$

Addirt man zu allen Charakteristiken von $\mathfrak{R}$ eine willkürliche Charakteristik A, so erhält man das vollständige System $\mathfrak{A} = A\mathfrak{R}$. Ist g die Anzahl der geraden und h die der ungeraden Charakteristiken desselben, so ist $g+h = 2^{\alpha+2\beta}$ und $g-h = \Sigma(W)$, wo W alle Charakteristiken von $\mathfrak{A}$ durchläuft. Ist $AQ_\lambda = A_\alpha$, so ist jede solche Charakteristik W das Product aus einer wesentlichen Combination V der Charakteristiken $A, A_1, \dots A_{2\beta}$ und irgend einer Combination U der Charakteristiken von $\mathfrak{P}$. Da AV in $\mathfrak{R}$ enthalten ist, so ist nach (1.) § 1

$$|U, AV| \equiv 0,$$

also

$$(W) = (UV) = (U)(V)(U, V) = (U)(U, A)(V)$$

und folglich

$$\Sigma(W) = (\Sigma(U)(U, A))(\Sigma(V)).$$

Nun ist aber

$$\Sigma(U)(U, A) = (1+(P_1)(P_1, A)) \dots (1+(P_\alpha)(P_\alpha, A)) = 2^\alpha\varepsilon,$$

wo $\varepsilon = 1$ ist, wenn für $\lambda = 1, 2, \dots \alpha$ $(P_\lambda) = (P_\lambda, A)$ oder $(AP_\lambda) = (A)$ ist, dagegen $\varepsilon = 0$ ist, wenn dies nicht der Fall ist. Da ferner nach (3.) § 1 je drei der Charakteristiken $A, A_1, \dots A_{2\beta}$ azygetisch sind, so ist nach *T.* S. 212

$$(AA_1 \dots A_{2\lambda}) = (A)(A_1) \dots (A_{2\lambda})(-1)^\lambda$$

und daher

$$2i\Sigma(V) = (1+i(A))(1+i(A_1))\dots(1+i(A_{2\beta}))-(1-i(A))(1-i(A_1))\dots(1-i(A_{2\beta})),$$

oder wenn ν der Charakteristiken A_λ ungerade sind, gleich

$$(1-i)^\nu(1+i)^{2\beta+1-\nu}-(1+i)^\nu(1-i)^{2\beta+1-\nu},$$

und mithin

$$\dot{\Sigma}(V) = (-1)^{\frac{(\beta-\nu)(\beta-\nu-1)}{2}} 2^\beta.$$

Folglich ist

$$(2.)\qquad g-h = \varepsilon(-1)^{\frac{(\beta-\nu)(\beta-\nu-1)}{2}}\,2^{\alpha+\beta}.$$

In dieser Formel ist $\varepsilon = 1$, wenn alle Charakteristiken des Systems $\mathfrak{A}$, die *irgend* einer von ihnen mod. $\mathfrak{P}$ äquivalent sind, denselben Charakter haben, sonst $\varepsilon = 0$.

Sei $\gamma = \alpha+2\beta$ und $B, B_1, \dots B_\gamma$ irgend eine Basis von $\mathfrak{A}$, und sei f die Anzahl der Lösungen der Congruenzen

$$(3.)\qquad (XB_\lambda) = (B_\lambda). \qquad\qquad (\lambda = 0, 1, \dots \gamma)$$

Dann ist

$$2^{\gamma+1}f = \sum_{\alpha}(1+(B)(RB))(1+(B_1)(RB_1))\dots(1+(B_\gamma)(RB_\gamma)),$$

wo R alle Charakteristiken durchläuft. Entwickelt man das Product, so ist zunächst $\Sigma 1 = 2^{2\varrho}$, ferner

$$\sum_{R}(B_\varkappa)(RB_\varkappa)(B_\lambda)(RB_\lambda)(B_\mu)(RB_\mu)\dots = \Sigma(R)^{\xi}(R, B_\varkappa B_\lambda B_\mu\dots),$$

wo ξ die Anzahl der Charakteristiken $B_\varkappa, B_\lambda, B_\mu\dots$ bezeichnet. Ist ξ gerade, so ist $B_\varkappa B_\lambda B_\mu\dots$ nicht gleich O, und daher die Summe gleich Null. Ist ξ ungerade, so ist sie gleich

$$(B_\varkappa B_\lambda B_\mu\dots)\sum_{R}(RB_\varkappa B_\lambda B_\mu\dots) = (B_\varkappa B_\lambda B_\mu\dots)\,2^{\varrho}.$$

Daher ist

$$2^{\gamma+1}f = 2^{2\varrho}+2^{\varrho}\Sigma(W),$$

wo W alle wesentlichen Combinationen von $B, B_1, \dots B_\gamma$, d. h. alle Charakteristiken von $\mathfrak{A}$ durchläuft, oder

$$2^{\alpha+2\beta+1}f = 2^{2\varrho}+2^{\varrho+\alpha+\beta}\varepsilon(-1)^{\frac{(\beta-\nu)(\beta-\nu-1)}{2}}.$$

Ist $\varepsilon = 1$ und $\alpha+\beta = \varrho$, so ist

$$f = 2^{\varrho-\beta-1}(1+(-1)^{\frac{(\beta-\nu)(\beta-\nu-1)}{2}}).$$

Da den Gleichungen (3.) stets die Charakteristik $X = O$ genügt, so ist $f \geqq 1$. Mithin muss in diesem Falle $(\beta-\nu)(\beta-\nu-1)$ durch 4 theilbar sein, und folglich ist $g-h = +2^{\varrho}$. Daher ergiebt sich der (für die Theorie der linearen Transformation wichtige) Satz:

IV. *Ist g die Anzahl der geraden und h die der ungeraden Charakteristiken eines vollständigen Systems, so liegt $g-h$ zwischen den Grenzen $+2^{\varrho}$ und $-2^{\varrho-1}$ und ist stets eine mit* 1, 0 *oder* -1 *multiplicirte Potenz von* 2, *deren Exponent die halbe Summe des Ranges der dem System entsprechenden Gruppe und des Ranges ihrer syzygetischen Untergruppe ist.*

Ich habe *T.* S. 196 gezeigt, dass die 2^ϱ Charakteristiken eines *Göpel*schen Systems entweder alle gerade, oder zur Hälfte gerade und zur Hälfte ungerade sind. Im letzteren Falle bilden die ungeraden Charakteristiken für sich ein vollständiges System, in dem $g=0$, $h=2^{\varrho-1}$, also $g-h=-2^{\varrho-1}$ ist. Im ersteren Falle ist für das gesammte System $g=2^\varrho$, $h=0$, also $g-h=+2^\varrho$. Die beiden oben für $g-h$ gefundenen Grenzen sind also genau. Da

$$2^{\gamma+1}f = 2^{2\varrho}+2^\varrho(g-h)$$

ist, so liegt die Anzahl der Lösungen der Congruenzen (3.) zwischen $2^{2\varrho-\gamma}$ und $2^{2\varrho-\gamma-2}$.

§ 3.

Gegeben sei eine Gruppe $\mathfrak{P}$ von $n=2^\nu$ Charakteristiken $P_0, P_1, \dots P_{n-1}$, von denen je zwei syzygetisch sind. Wir bestimmen dann alle Charakteristiken, die mit jeder Charakteristik von $\mathfrak{P}$ syzygetisch sind. Bilden $P_1, \dots P_\nu$ eine Basis von $\mathfrak{P}$, so ist dazu nothwendig und hinreichend, dass eine solche Charakteristik den ν unabhängigen Congruenzen

$$|Y, P_\lambda| \equiv 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \dots \nu)$$

genügt. Ihre Anzahl ist daher $2^{2\varrho-\nu}$ und sie bilden eine Gruppe, von der $\mathfrak{P}$ eine Untergruppe ist. Betrachtet man also zwei Lösungen nicht als verschieden, wenn sie mod. $\mathfrak{P}$ äquivalent sind, so ist die Anzahl der verschiedenen Lösungen $2^{2\varrho-2\nu}$, oder wenn man

$$(1.) \qquad \varrho = \nu+\sigma$$

setzt, $2^{2\sigma}$. Sind Q und R zwei dieser Lösungen, und ist

$$Q' \equiv Q, \quad R' \equiv R \text{ (mod. } \mathfrak{P}),$$

so ist

$$|Q, R| \equiv |Q', R'|.$$

Zählt man zu allen $2^{2\sigma}$ Lösungen eine Charakteristik A hinzu, so erhält man ein vollständiges System $\mathfrak{A}$, dessen Charakteristiken den Congruenzen

$$(2.) \qquad (X, P_\lambda) = (A, P_\lambda) \qquad (\lambda = 0, 1, \dots n-1)$$

genügen. Sind B, C, D irgend drei derselben und B', C', D' ihnen mod. $\mathfrak{P}$ äquivalent, so ist

$$|B, C, D| \equiv |B', C', D'|.$$

Setzt man $(A, P_\lambda) = \varepsilon_\lambda$, so ist

$$(3.)\quad \varepsilon_\gamma = \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta, \quad \text{wenn } P_\gamma = P_\alpha P_\beta$$

ist. Dagegen können $\varepsilon_1, \dots \varepsilon_\nu$ willkürlich gleich $+1$ oder -1 angenommen werden. Denn man kann immer A so bestimmen, dass es den ν unabhängigen Congruenzen

$$(A, P_\lambda) = \varepsilon_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \dots \nu)$$

genügt. Das vollständige System $\mathfrak{A}$ wird dann von allen Lösungen der Congruenzen

$$(4.)\quad (X, P_\lambda) = \varepsilon_\lambda \qquad (\lambda = 0, 1, \dots n-1)$$

gebildet. Unter den so erhaltenen vollständigen Systemen ist besonders das bemerkenswerth, in welchem $\varepsilon_\lambda = (P_\lambda)$ ist. Da $(P_\alpha, P_\beta) = +1$, also $(P_\alpha P_\beta) = (P_\alpha)(P_\beta)$ ist, so ist diese Annahme mit den Relationen (3.) verträglich. Aus den Gleichungen

$$(X, P_\lambda) = (P_\lambda) \quad \text{oder} \quad (X P_\lambda) = (X)$$

folgt, dass alle Charakteristiken dieses Systems $\mathfrak{A}$, die einer unter ihnen mod. $\mathfrak{P}$ äquivalent sind, denselben Charakter haben.

Sind unter den mod. $\mathfrak{P}$ verschiedenen Charakteristiken eines solchen Systems $\mathfrak{A}$ g gerade und h ungerade, so ist $g+h = 2^{2\sigma}$ und

$$2^{2\nu}(g-h) = \sum_R (R)(1+(R, P_1)(P_1))\dots(1+(R, P_\nu)(P_\nu)),$$

wo R alle Charakteristiken durchläuft. Irgend ein Glied des entwickelten Productes hat die Form

$$(R)(R, P_\alpha)(P_\alpha)(R, P_\beta)(P_\beta)(R, P_\gamma)(P_\gamma)\dots = (RP_\alpha P_\beta P_\gamma \dots).$$

Da

$$\sum_R (RP_\alpha P_\beta P_\gamma \dots) = 2^\varrho$$

und die Anzahl der Glieder des entwickelten Productes 2^ν ist, so ist folglich

$$2^{2\nu}(g-h) = 2^{\varrho+\nu}$$

oder

$$(5.)\quad g-h = 2^\sigma,$$

also

$$(6.)\quad g = 2^{\sigma-1}(2^\sigma+1), \quad h = 2^{\sigma-1}(2^\sigma-1).$$

Ebenso gross ist die Anzahl der σ-reihigen Charakteristiken, die gerade oder ungerade sind.

Durchläuft S die mod. $\mathfrak{P}$ verschiedenen Charakteristiken von $\mathfrak{A}$, so ist also

$$(7.)\quad \Sigma(S) = 2^\sigma.$$

Durchlaufe ferner P die Charakteristiken von $\mathfrak{P}$ und sei

$$f = \sum_{P,S}(H, PS),$$

wo H irgend eine Charakteristik ist. Dann ist

$$2^\nu f = \sum_R (H, R)(1+(R, P_1)(P_1))\dots(1+(R, P_\nu)(P_\nu)).$$

Irgend ein Glied des entwickelten Productes ist

$$(R, HP_\alpha P_\beta P_\gamma \dots)(P_\alpha)(P_\beta)(P_\gamma)\dots.$$

Nun ist aber

$$(P_\alpha)(P_\beta)(P_\gamma)\dots = (P_\alpha P_\beta P_\gamma \dots)$$

und

$$\Sigma(R, HP_\alpha P_\beta P_\gamma \dots) = 2^{2\varrho},$$

wenn

$$H = P_\alpha P_\beta P_\gamma \dots,$$

sonst aber gleich Null. Daher ist $f = 0$, wenn H nicht in $\mathfrak{P}$ enthalten ist, sonst aber $f = 2^{2\varrho-\nu}(H)$. Gehört H der dem System $\mathfrak{A}$ entsprechenden Gruppe an, ist also H (mod. $\mathfrak{P}$) der Summe einer geraden Anzahl der Charakteristiken von $\mathfrak{A}$ äquivalent, so ist $(H, P) = 1$. Mithin ist

$$(8.) \quad \sum_S (H, S) = 0, \quad \sum_S (P, S) = 2^{2\sigma}(P),$$

wenn H nicht in $\mathfrak{P}$ enthalten ist.

Besteht die Gruppe $\mathfrak{P}$ nur aus der Charakteristik O, so gehen die Formeln (7.) und (8.) in die Formeln *T.* S. 191, (10.) und (11.) über. Alle daselbst entwickelten Eigenschaften der Charakteristikensysteme sind dort aber aus diesen beiden Sätzen abgeleitet worden, und lassen sich daher auf die mod. $\mathfrak{P}$ betrachteten Charakteristiken von $\mathfrak{A}$ übertragen. Speciell giebt es in $\mathfrak{A}$ *Fundamentalsysteme* von $2\sigma+2$ Charakteristiken, deren Summe O (d. h. in $\mathfrak{P}$ enthalten) ist, und von denen je drei azygetisch sind, und über die Anzahl dieser Systeme bei vorgeschriebenen Charakteren gelten die *T.* § 5 entwickelten Sätze.

Für $\sigma = 1$ bilden die $2^{2\sigma} = 4$ Charakteristiken von $\mathfrak{A}$, von denen 1 ungerade und 3 gerade sind, ein Fundamentalsystem. Für $\sigma = 2$ bilden die 6 ungeraden Charakteristiken, die sich unter den 16 Charakteristiken von $\mathfrak{A}$ befinden, ein Fundamentalsystem, d. h. die Summe von je drei derselben ist gerade. Für $\sigma = 3$ befinden sich in einem Fundamentalsystem $A, A_1, \dots A_7$ entweder 3 oder 7 ungerade. Die Summe G dieser ungeraden Charakteristiken ist gerade, dagegen sind, wenn α und β verschieden sind, die 28 Charakteristiken $GA_\alpha A_\beta$ sämmtlich ungerade.

§ 4.

V. ***Ist $\varphi(u)$ eine Thetafunction zweiten Grades, welche sich bei Vermehrung des Arguments um ganze Perioden ebenso ändert wie $\vartheta^2[A](u)$, ausserdem aber die halben Perioden P und Q zu Perioden hat, so sind die denselben entsprechenden Charakteristiken syzygetisch.***

Unter einer Periode einer Thetafunction verstehe ich hier ein Grössensystem, welches für das zweite logarithmische Differential eine Periode (im gewöhnlichen Sinne) ist. Nach der Voraussetzung ist, wenn

$$P = \begin{pmatrix} \nu_1 \dots \nu_\varrho \\ \mu_1 \dots \mu_\varrho \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \nu'_1 \dots \nu'_\varrho \\ \mu'_1 \dots \mu'_\varrho \end{pmatrix}$$

ist,

$$\varphi(u+2P) = e^{-4\pi i \Sigma \nu_\alpha u_\alpha - 2\pi i \Sigma \tau_{\alpha\beta}\nu_\alpha \nu_\beta}\varphi(u),$$

$$\varphi(u+P) = c e^{\Sigma a_\alpha u_\alpha}\varphi(u),$$

wo c, a_α Constanten sind. Ersetzt man in der letzten Gleichung u durch $u+P$, so erhält man

$$\varphi(u+2P) = c^2 e^{2\Sigma a_\alpha u_\alpha + \frac{1}{2}\Sigma a_\alpha \mu_\alpha + \frac{1}{2}\Sigma \tau_{\alpha\beta} a_\alpha \nu_\beta},$$

und daher ist

$$a_\alpha = -2\pi i \nu_\alpha, \quad c = \sqrt{P} e^{-\frac{i\pi}{2}\Sigma \tau_{\alpha\beta}\nu_\alpha \nu_\beta},$$

wo $\sqrt{P}$ eine der beiden Quadratwurzeln aus (P) bedeutet. Demnach ist

$$\varphi(u+P) = \sqrt{P} e^{-2\pi i \Sigma \nu_\alpha u_\alpha - \frac{i\pi}{2}\Sigma \tau_{\alpha\beta}\nu_\alpha \nu_\beta}\varphi(u),$$

$$\varphi(u+Q) = \sqrt{Q} e^{-2\pi i \Sigma \nu'_\alpha u_\alpha - \frac{i\pi}{2}\Sigma \tau_{\alpha\beta}\nu'_\alpha \nu'_\beta}\varphi(u),$$

$$\varphi(u+PQ) = \sqrt{PQ} e^{-2\pi i \Sigma(\nu_\alpha + \nu'_\alpha)u - \frac{i\pi}{2}\Sigma \tau_{\alpha\beta}(\nu_\alpha + \nu'_\alpha)(\nu_\beta + \nu'_\beta)}\varphi(u).$$

Vermehrt man in der ersten Gleichung u um Q, so findet man

$$\varphi(u+PQ) = \left(\frac{P}{Q}\right)\sqrt{P}\sqrt{Q} e^{-2\pi i \Sigma(\nu_\alpha + \nu'_\alpha)u - \frac{i\pi}{2}\Sigma \tau_{\alpha\beta}(\nu_\alpha + \nu'_\alpha)(\nu_\beta + \nu'_\beta)}\varphi(u).$$

Durch Vertauschung von P und Q ergiebt sich daraus

$$\left(\frac{P}{Q}\right) = \left(\frac{Q}{P}\right) \quad \text{oder} \quad (P, Q) = +1.$$

Ferner folgt aus den beiden letzten Gleichungen

$$\sqrt{PQ} = \sqrt{P}\sqrt{Q}\binom{P}{Q}.$$

Quadrirt man dieselbe, so erhält man $(PQ) = (P)(Q)$ oder $(P, Q) = 1$*).

Wenn also eine Thetafunction zweiten Grades gewisse halbe Perioden zu Perioden hat, so bilden die entsprechenden Charakteristiken eine Gruppe, von deren Elementen je zwei syzygetisch sind. Ist $\mathfrak{P}$ eine Gruppe von derselben Art, wie im vorigen Paragraphen, so verstehe ich unter $\sqrt{P_\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, \dots \nu)$ eine beliebige der beiden Wurzeln aus (P_α) und unter

$$\sqrt{P_\alpha P_\beta P_\gamma \dots} \text{ den Ausdruck } \sqrt{P_\alpha}\sqrt{P_\beta}\sqrt{P_\gamma}\dots\binom{P_\alpha}{P_\beta}\binom{P_\alpha}{P_\gamma}\binom{P_\beta}{P_\gamma}\dots$$

Nach *T.* S. 198 ist dann auch, wenn α und β irgend zwei der Indices von von 0 bis $n-1$ bezeichnen,

$$(1.) \qquad \sqrt{P_\alpha P_\beta} = \sqrt{P_\alpha}\sqrt{P_\beta}\binom{P_\alpha}{P_\beta}.$$

Speciell ist, wenn $P_0 = O$ ist, $\sqrt{P_0} = +1$. Ist $\sqrt{P_\lambda}$ $(\lambda = 0, 1, \dots n-1)$ ein den Bedingungen (1.) genügendes System der Wurzeln und $\varepsilon_\lambda = \pm 1$, so genügt ihnen auch $\varepsilon_\lambda \sqrt{P_\lambda}$, falls

$$(2.) \qquad \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta = \varepsilon_\gamma, \quad \text{wenn} \quad P_\alpha P_\beta = P_\gamma.$$

Man kann also, wenn A eine beliebige Charakteristik ist, ε_λ gleich (A, P_λ) oder $\binom{P_\lambda}{A}$ oder (P_λ) setzen. Das Product $\vartheta[A](u+v)\vartheta[A](u-v)$ bezeichne ich (*T.* S. 193) zur Abkürzung mit $\vartheta[A](u+v)(u-v)$ oder noch kürzer mit $\vartheta[A](u, v)$. Ich betrachte nun die Summe

$$(3.) \qquad \sum_\lambda \binom{P_\lambda}{A}\sqrt{P_\lambda}\,\vartheta[AP_\lambda](u, v) = \varphi[A](u, v).$$

Dieselbe ist eine Thetafunction zweiten Grades von u (und von v). Ist

$$P_\varkappa = \binom{\nu_1 \dots \nu_\varrho}{\mu_1 \dots \mu_\varrho},$$

und vermehrt man u um die entsprechende halbe Periode (*T.* S. 192), so erhält man

$$\varphi[A](u+P_\varkappa, v) = \chi_\varkappa \sum_\lambda \binom{P_\lambda}{A}\binom{P_\varkappa}{P_\lambda A}\sqrt{P_\lambda}\,\vartheta[AP_\lambda P_\varkappa](u, v),$$

wo

---

*) Sind P und Q azygetisch, so muss eine Thetafunction, die P und Q zu Perioden haben soll, mindestens vom vierten Grade sein.

$$\chi_\varkappa = e^{-i\pi\Sigma\mu_\alpha\nu_\alpha - 2\pi i\Sigma\nu_\alpha u_\alpha - \frac{i\pi}{2}\tau_{\alpha\beta}\nu_\alpha\nu_\beta}$$

ist, also nur von u und $P_\varkappa$, aber nicht von v, A, der Gruppe $\mathfrak{P}$, und dem Vorzeichen der $\sqrt{P_\lambda}$ abhängt. Ersetzt man in der letzten Summe P_λ durch $P_\lambda P_\varkappa$, so wird dadurch, weil $\mathfrak{P}$ eine Gruppe ist, nur die Reihenfolge der Summanden eine andere, und man erhält

$$\chi_\varkappa \sum_\lambda \binom{P_\lambda}{A}\binom{P_\varkappa}{P_\varkappa P_\lambda}\sqrt{P_\varkappa P_\lambda}\,\vartheta[AP_\lambda](u,v)$$

oder nach (1.)

$$\chi_\varkappa(P_\varkappa)\sqrt{P_\varkappa}\sum_\lambda \binom{P_\lambda}{A}\sqrt{P_\lambda}\,\vartheta[AP_\lambda](u,v).$$

Demnach ist

$$(4.)\qquad \varphi[A](u+P_\varkappa, v) = \chi_\varkappa(P_\varkappa)\sqrt{P_\varkappa}\,\varphi[A](u,v).$$

Sei jetzt $\varphi(u)$ irgend eine Thetafunction zweiten Grades von u, welche sich bei Vermehrung von u um ganze Perioden so ändert, dass $\varphi(u):\vartheta^2[A](u)$ ungeändert bleibt, ausserdem aber bei Vermehrung um die halben Perioden der Gruppe $\mathfrak{P}$ so, dass $\varphi(u):\varphi[A](u,v)$ in sich selbst übergeht. Dieselbe genügt also den Gleichungen

$$\varphi(u+P_\varkappa) = \chi_\varkappa(P_\varkappa)\sqrt{P_\varkappa}\,\varphi(u) \qquad (\varkappa = 0, 1, \dots n-1).$$

Zu den ν unabhängigen Charakteristiken $P_1, \dots P_\nu$ kann man $\varrho-\nu=\sigma$ unabhängige Charakteristiken $Q_1, \dots Q_\sigma$ so bestimmen, dass je zwei dieser ϱ Charakteristiken syzygetisch sind (*T.* § 2.). Sind dann Q_0, $Q_1 \dots Q_{s-1}$ die $s=2^\sigma$ Combinationen von $Q_1 \dots Q_\sigma$, so bilden die 2^ϱ Charakteristiken $P_\alpha Q_\beta(\alpha = 0, 1, \dots n-1;\ \beta = 0, 1, \dots s-1)$ eine *Göpel*sche Gruppe. Daher sind die 2^ϱ Functionen $\vartheta[P_\alpha Q_\beta](u,v)$ linear unabhängig, und mithin lässt sich $\varphi(u)$ aus ihnen linear zusammensetzen

$$\varphi(u) = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta}\,\vartheta[P_\alpha Q_\beta](u,v),$$

wo die Coefficienten $c_{\alpha\beta}$ von u unabhängig sind. Vermehrt man u um $P_\varkappa$, so erhält man

$$\varphi(u) = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta}\binom{P_\varkappa}{P_\alpha Q_\beta}\sqrt{P_\varkappa}\,\vartheta[P_\alpha P_\varkappa Q_\beta](u,v),$$

und indem man alle diese Gleichungen zusammenzählt,

$$s\varphi(u) = \sum_{\alpha,\beta,\varkappa} c_{\alpha\beta}\binom{P_\varkappa}{P_\alpha Q_\beta}\sqrt{P_\varkappa}\,\vartheta[P_\alpha P_\varkappa Q_\beta](u,v).$$

Ersetzt man $P_\varkappa$ durch $P_\varkappa P_\alpha$, so findet man

$$s\varphi(u) = \sum_{\alpha,\beta,\varkappa} c_{\alpha\beta}\binom{P_\alpha P_\varkappa}{Q_\beta}(P_\alpha)\sqrt{P_\alpha}\sqrt{P_\varkappa}\,\vartheta[P_\varkappa Q_\beta](u,\,v),$$

oder wenn man

$$\sum_\alpha c_{\alpha\beta}\binom{P_\alpha}{P_\alpha Q_\beta}\sqrt{P_\alpha} = s\,C_\beta$$

setzt,

$$\varphi(u) = \sum_\beta C_\beta\Big(\sum_\varkappa\binom{P_\varkappa}{Q_\beta}\sqrt{P_\varkappa}\,\vartheta[Q_\beta P_\varkappa](u,\,v)\Big)$$

oder

$$\varphi(u) = \sum_\beta C_\beta\,\varphi[Q_\beta](u,\,v).$$

Die s Functionen $\varphi[Q_\beta](u, v)$ der Variabeln u sind von einander unabhängig. Denn eine lineare Gleichung zwischen ihnen wäre eine solche zwischen den 2^ϱ Functionen $\vartheta[P_\alpha Q_\beta](u, v)$. Demnach lassen sich alle Functionen $\varphi(u)$ von den oben angegebenen Eigenschaften aus s unter ihnen, die von einander unabhängig sind, linear zusammensetzen, und folglich besteht zwischen je $s+1$ dieser Functionen eine lineare Gleichung mit constanten Coefficienten.

§ 5.

Ist $\mathfrak{R}$ irgend eine Gruppe von $m = 2^\mu$ Charakteristiken $R_0, R_1, R_2, \ldots$, so bilden die $2^{2\varrho-\mu}$ Lösungen $S_0, S_1, S_2, \ldots$ der m Congruenzen

$$|R_\varkappa,\, X| \equiv 0$$

ebenfalls eine Gruppe $\mathfrak{S}$, welche die der Gruppe $\mathfrak{R}$ *adjungirte Gruppe* heisst (*Prym*, l. c. S. 87). Die den Gruppen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ gemeinsamen Charakteristiken bilden die syzygetische Untergruppe von $\mathfrak{R}$ sowohl wie von $\mathfrak{S}$. Sind A und B zwei beliebige Charakteristiken, so heissen dann $\mathfrak{A} = A\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{B} = B\mathfrak{S}$ *adjungirte vollständige Systeme*. Dieselben sind dadurch charakterisirt, dass jede Summe einer geraden Anzahl der Charakteristiken $A, A_1, A_2, \ldots$ von $\mathfrak{A}$ mit jeder Summe einer geraden Anzahl der Charakteristiken $B, B_1, B_2, \ldots$ von $\mathfrak{B}$ syzygetisch ist, also speciell

$$|A_\alpha A_\beta,\, B_\gamma B_\delta| \equiv 0$$

ist, und dass sich ihre Rangzahlen zu 2ϱ ergänzen. Für zwei solche vollständigen Systeme hat Herr *Prym* (l. c. S. 87) die Relation entwickelt

$$(1.)\quad \begin{cases} \quad 2^{\varrho-\mu}\sum(BA_\lambda)\vartheta[A_\lambda](u,\,v)\vartheta[A_\lambda](u',\,v') \\ = (AB)\sum(AB_\lambda)\vartheta[B_\lambda](u,\,v')\vartheta[B_\lambda](u',\,v). \end{cases}$$

Ist $\mathfrak{P}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{R}$, deren $n = 2^\nu$ Charakteristiken $P_0, P_1, \dots P_{n-1}$ mit jeder Charakteristik von $\mathfrak{R}$ syzygetisch sind, so ist $\mathfrak{P}$ auch eine Untergruppe von $\mathfrak{S}$ mit derselben Eigenschaft. Wählt man ferner A und B so, dass

$$|AB,\ P_\lambda| \equiv 0 \qquad (\lambda = 0, 1, \dots n-1)$$

ist, so ist auch für je zwei Charakteristiken von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$

$$(2.) \qquad |A_\alpha,\ P_\lambda| \equiv |B_\beta,\ P_\lambda|.$$

Durchläuft $A_\alpha (\alpha = 0, 1, \dots 2^{\mu-\nu}-1)$ und $B_\alpha (\alpha = 0, 1, \dots 2^{2\varrho-\mu-\nu}-1)$ nur die mod. $\mathfrak{P}$ verschiedenen Charakteristiken von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, so sind $A_\alpha P_\lambda$ und $B_\alpha P_\lambda$ alle Charakteristiken dieser beiden Systeme, und demnach lautet die Formel (1.) nunmehr

$$2^{\varrho-\mu} \sum_{\alpha,\lambda} (BA_\alpha P_\lambda) \vartheta[A_\alpha P_\lambda](u, v) \vartheta[A_\alpha P_\lambda](u', v')$$
$$= (AB) \sum_{\alpha,\lambda} (AB_\alpha P_\lambda) \vartheta[B_\alpha P_\lambda](u, v') \vartheta[B_\alpha P_\lambda](u', v).$$

Vermehrt man u' um $P_\varkappa$, so erhält man

$$2^{\varrho-\mu} \sum_{\alpha,\lambda} (BA_\alpha P_\lambda) \binom{P_\varkappa}{A_\alpha P_\lambda} \vartheta[A_\alpha P_\lambda](u, v) \vartheta[A_\alpha P_\lambda P_\varkappa](u', v')$$
$$= (AB) \sum_{\alpha,\lambda} (AB_\alpha P_\lambda) \binom{P_\varkappa}{B_\alpha P_\lambda} \vartheta[B_\alpha P_\lambda](u, v') \vartheta[B_\alpha P_\lambda P_\varkappa](u', v).$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $\sqrt{P_\varkappa}$, summirt nach $\varkappa$ von 0 bis $n-1$ und ersetzt dann $P_\varkappa$ durch $P_\varkappa P_\lambda$, so findet man

$$2^{\varrho-\mu} \sum_\alpha (BA_\alpha) \Big[\sum_\lambda (BA_\alpha,\ P_\lambda) \binom{P_\lambda}{A_\alpha} \sqrt{P_\lambda}\, \vartheta[A_\alpha P_\lambda](u, v) \Big] \Big[\sum_\varkappa \binom{P_\varkappa}{A_\alpha} \sqrt{P_\varkappa}\, \vartheta[A_\alpha P_\varkappa](u', v') \Big]$$
$$= (AB) \sum_\alpha (AB_\alpha) \Big[\sum_\lambda (AB_\alpha,\ P_\lambda) \binom{P_\lambda}{B_\alpha} \sqrt{P_\lambda}\, \vartheta[B_\alpha P_\lambda](u, v') \Big] \Big[\sum_\varkappa \binom{P_\varkappa}{B_\alpha} \sqrt{P_\varkappa}\, \vartheta[B_\alpha P_\varkappa](u', v) \Big].$$

Nach (2.) ist $(BA_\alpha,\ P_\lambda) = +1$ und $(AB_\alpha,\ P_\lambda) = +1$. Ich ersetze ferner μ durch $\mu+\nu$, bezeichne also im Folgenden mit μ nur die Anzahl der mod. $\mathfrak{P}$ unabhängigen Charakteristiken von $\mathfrak{R}$. Dann ist

$$(3.) \qquad \begin{cases} 2^{\sigma-\mu} \sum_\alpha (BA_\alpha) \varphi[A_\alpha](u, v) \varphi[A_\alpha](u', v') \\ = (AB) \sum_\alpha (AB_\alpha) \varphi[B_\alpha](u, v') \varphi[B_\alpha](u', v). \end{cases}$$

Speciell ergiebt sich für $\mu = 0$ (und Abänderung der Bezeichnung)

$$(4.) \qquad 2^\sigma \varphi[A](u, v) \varphi[A](u', v') = \sum_\alpha (AA_\alpha) \varphi[A_\alpha](u, v') \varphi[A_\alpha](u', v).$$

Hier bedeutet A irgend eine Charakteristik, und A_α durchläuft das System

der $2^{2\sigma}$ mod. $\mathfrak{P}$ verschiedenen Charakteristiken, welche für alle Werthe von α und λ den Congruenzen $|A_\alpha, P_\lambda| \equiv |A, P_\lambda|$ genügen, also ein System, wie es in § 3 untersucht ist. Für $\sigma = \varrho$ geht diese Formel in die über, welche Herr ***Prym*** die ***Riemann**sche **Thetaformel*** genannt hat. In ähnlicher Weise, wie aus derselben die Gesammtheit der Thetarelationen abgeleitet werden kann, lässt sich die Formel (4.) benutzen, um die Relationen zwischen den Functionen $\varphi[A_\alpha](u, v)$ zu gewinnen, und es geht daraus hervor, dass diese von ähnlicher Beschaffenheit sind, wie die Relationen zwischen den Thetafunctionen von σ Variabeln.

§ 6.

Für $\sigma = 0$ ist die Gruppe $\mathfrak{P}$ der 2^ϱ Charakteristiken P_λ eine ***Göpel**sche* Gruppe. Setzt man

$$\Sigma \sqrt{P_\lambda}\, \vartheta[AP_\lambda](u, v) = \varphi(u, v),$$

so besteht nach § 4 zwischen $\varphi(u, v)$ und $\varphi(u, v')$ eine lineare Relation $\varphi(u, v) = c\varphi(u, v')$, wo c von u unabhängig ist, und mithin ist (vgl. *T.* S. 200)

$$(1.) \qquad \varphi(u, v)\varphi(u', v') = \varphi(u, v')\varphi(u', v).$$

Für $\sigma = 1$ kann man nach § 3 zu der Gruppe $\mathfrak{P}$ der $2^{\varrho-1} = n$ Charakteristiken P_λ stets eine und mod. $\mathfrak{P}$ nur eine Charakteristik A so bestimmen, dass die n Charakteristiken AP_λ sämmtlich ungerade werden (vgl. *T.* S. 196). Nach § 4 besteht dann, wenn

$$\varphi(u, v) = \Sigma \sqrt{P_\lambda}\, \vartheta[AP_\lambda](u, v) = -\varphi(v, u)$$

gesetzt wird, zwischen den drei Functionen $\varphi(u, v)$, $\varphi(u, v')$ und $\varphi(u, v'')$ eine lineare Relation, deren Coefficienten von u unabhängig sind. Die Verhältnisse derselben findet man, indem man der Reihe nach $u = v, v', v''$ setzt, und erhält so die Formel

$$(2.) \qquad \varphi(u, v)\varphi(v', v'') + \varphi(u, v')\varphi(v'', v) + \varphi(u, v'')\varphi(v, v') = 0.$$

Giebt man in dieser Gleichung den $\sqrt{P_\lambda}$ alle möglichen Werthe und summirt die so erhaltenen Relationen, so findet man nach *T.* S. 200:

$$(3.) \qquad \begin{cases} \sum\limits_\lambda (P_\lambda)\, [\vartheta[AP_\lambda](u+v)\,(u-v)\,(v'+v'')(v'-v'') \\ \quad + \vartheta[AP_\lambda](u+v')(u-v')(v''+v)\,(v''-v) \\ \quad + \vartheta[AP_\lambda](u+v'')(u-v'')(v+v')\,(v-v')] = 0. \end{cases}$$

Für $\sigma = 2$ giebt es sechs mod. $\mathfrak{P}$ verschiedene ungerade Charakteristiken $A_1, \dots A_6$, für deren jede auch die $n = 2^{\varrho-2}$ äquivalenten Charak-

teristiken $A_\alpha P_\lambda$ sämmtlich ungerade sind (§ 3). Die Summe von drei verschiedenen unter ihnen ist gerade und die Summe aller sechs äquivalent O. Ist

$$(4.)\quad A = A_1 A_2 A_3 \equiv A_4 A_5 A_6,$$

so bilden AP_λ, A_1P_λ, A_2P_λ, A_3P_λ ein vollständiges System vom Range ϱ und AP_λ, A_4P_λ, A_5P_λ, A_6P_λ ein adjungirtes System. Nach Formel (3.) § 5 ist daher

$$\sum_\alpha{}_0^3 (AA_\alpha)\varphi[A_\alpha](u,v)\varphi[A_\alpha](u',v')$$
$$= \varphi[A](u,v')\varphi[A](u',v)+\sum_\alpha{}_4^6 (AA_\alpha)\varphi[A_\alpha](u,v')\varphi[A_\alpha](u',v).$$

Setzt man $v = u'$, so verschwinden die Functionen $\varphi[A_\alpha](u',v)$ $(\alpha = 4, 5, 6)$, und man erhält (in abgeänderter Bezeichnung)

$$(5.)\quad \varphi[A](w,w)\varphi[A](u,v) = \sum_\alpha{}_0^3 (A, A_\alpha)\varphi[A_\alpha](u,w)\varphi[A_\alpha](v,w).$$

Um ein System von Charakteristiken zu construiren, wie es hier vorausgesetzt wird, nehme man ein beliebiges Fundamentalsystem von $2\varrho+2$ Charakteristiken $H_1, \dots H_6$, $R_1, \dots R_{\varrho-2}$, $S_1, \dots S_{\varrho-2}$ und bezeichne mit K die Summe aller ungeraden Charakteristiken desselben. Ist $R_\lambda S_\lambda = P_\lambda$, so bilde man die Gruppe $\mathfrak{P}$, deren Basis $P_1, \dots P_{\varrho-2}$ bilden. Setzt man dann $KR_1 \dots R_{\varrho-2} = G$, so sind $GH_\alpha = A_\alpha$ sechs ungerade Charakteristiken, und die Summen von je drei derselben, die ich A_7, A_8, $\dots A_{16}$ nennen will, die zehn dazu gehörigen geraden Charakteristiken.

Für $\varrho = 2$ geht die Formel (5.) in das bekannte *Weierstrass*sche Additionstheorem für die hyperelliptischen Functionen über. (*Königsberger*, dieses Journal Bd. 64, S. 27). Wählt man in derselben an Stelle der drei ungeraden Charakteristiken A_1, A_2, A_3 die drei anderen A_4, A_5, A_6, so bleibt nach (4.) die Charakteristik A ungeändert. Daher kann man aus den beiden Formeln die Differenz

$$\varphi[A](w,w)\varphi[A](u,v)-\varphi[A](u,w)\varphi[A](v,w)$$

eliminiren und erhält

$$\sum_\alpha{}_1^3 (A, A_\alpha)\varphi[A_\alpha](u,w)\varphi[A_\alpha](v,w) = \sum_\alpha{}_4^6 (A, A_\alpha)\varphi[A_\alpha](u,w)\varphi[A_\alpha](v,w).$$

Aus der Gleichung

$$(A_\alpha, A_\beta, A_\gamma) = (A_\alpha, A_\beta)(A_\alpha, A_\gamma)(A_\beta, A_\gamma) = -1$$

folgt

$$(A, A_2) = -(A, A_1)(A_1, A_2), \quad (A, A_4) = (A, A_1)(A_1, A_4).$$

Demnach kann man die obige Formel auf die Gestalt

$$(6.)\quad \sum_\alpha {}_1^6 \varepsilon_\alpha \varphi[A_\alpha](u,w)\varphi[A_\alpha](v,w) = 0$$

bringen, wo die Verhältnisse der Grössen ε_α durch die Gleichungen

$$(7.)\quad \varepsilon_\alpha^2 = 1,\quad \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta = -(A_\alpha A_\beta) \qquad (\alpha \neq \beta)$$

bestimmt sind. Noch einfacher gelangt man zu dieser Relation mittelst der Formel (4.), § 5

$$4\varphi[A_1](u,v)\varphi[A_1](u',v') = \sum_\alpha {}_1^{16}(A_1 A_\alpha)\varphi[A_\alpha](u,v')\varphi[A_\alpha](u',v).$$

Vertauscht man u' mit v und subtrahirt die neue Gleichung von der ursprünglichen, so heben sich rechts die zehn Glieder, in denen A_α gerade ist, und man erhält

$$2(\varphi[A_1](u,v)\varphi[A_1](u',v')-\varphi[A_1](u,u')\varphi[A_1](v,v'))$$
$$= \sum_\alpha {}_1^6 (A_1 A_\alpha)\varphi[A_\alpha](u,v')\varphi[A_\alpha](u',v).$$

Setzt man hier $v = v'$, so findet man die Formel (6.). Giebt man den $\sqrt{P_\lambda}$ alle möglichen Werthe und summirt die erhaltenen Gleichungen, so ergiebt sich die von Herrn *Prym* (l. c. S. 106) entwickelte Formel

$$(8.)\quad \sum_\alpha {}_1^6 \sum_\lambda {}_0^{n-1} (\varepsilon_\alpha)(P_\lambda)\vartheta[A_\alpha P_\lambda](u,w)\vartheta[A_\alpha P_\lambda](v,w) = 0.$$

Für $\sigma = 3$ besteht $\mathfrak{P}$ aus $2^{\varrho-3} = n$ Charakteristiken. Sei, wie am Ende des § 3 $A, A_1, \dots A_7$ ein Fundamentalsystem von acht Charakteristiken und G die Summe aller ungeraden unter ihnen. Nach § 4 besteht zwischen den neun Functionen $\varphi[G](u,v)$, $\varphi[A_\alpha](u,w)$ eine lineare Relation

$$c\varphi[G](u,v) = \sum_\alpha {}_0^7 c_\alpha \varphi[A_\alpha](u,w).$$

Setzt man $u = w + GA_\beta$, so verschwinden rechts alle Glieder mit Ausnahme von einem, und man erhält unter Berücksichtigung der Beziehungen $(A_\beta, P_\lambda) = (P_\lambda)$ und $(G, P_\lambda) = (P_\lambda)$

$$c(G, A_\beta)\varphi[A_\beta](v,w) = c_\beta \varphi[G](w,w),$$

und mithin (*T.* S. 218, (6.))

$$(9.)\quad \varphi[G](w,w)\varphi[G](u,v) = \sum_\alpha (G, A_\alpha)\varphi[A_\alpha](u,w)\varphi[A_\alpha](v,w).$$

Daraus ergiebt sich wieder durch Summation über alle Werthe der $\sqrt{P_\lambda}$ (*T.* S. 219, (9.))

$$(10.)\quad \begin{cases} \sum_\lambda (P_\lambda)\vartheta[GP_\lambda](0)(2w)(u+v)(u-v) \\ = \sum_{\alpha,\lambda} (G, A_\alpha)(P_\lambda)\vartheta[A_\alpha P_\lambda](u+w)(u-w)(v+w)(v-w). \end{cases}$$

Um das eben betrachtete System von Charakteristiken herzustellen, nehme

man (vgl. *Stahl,* dieses Journal, Bd. 88) ein Fundamentalsystem $R_1, \dots R_{\varrho-3}$, $S_1, \dots S_{\varrho-3}$, H_0, $H_1, \dots H_7$, in dem K die Summe aller ungeraden Charakteristiken sei, setze $R_\lambda S_\lambda = P_\lambda$ und wähle $P_1, \dots P_{\varrho-3}$ als Basis der Gruppe $\mathfrak{P}$. Ist dann

$$KR_1 \dots R_{\varrho-3} = G, \qquad GH_0H_\lambda = A_\lambda,$$

so sind die Charakteristiken GP_λ alle gerade, die Charakteristiken $GA_\alpha A_\beta P_\lambda$ $(\alpha \neq \beta)$ alle ungerade, und es ist

$$(A_\alpha, P_\lambda) = (P_\lambda),$$

also sind die oben geforderten Bedingungen sämmtlich erfüllt.

Zürich, April 1883.

Ueber Thetafunctionen mehrerer Variabeln.

(Von Herrn *G. Frobenius* in Zürich.)

Wie in meinen Arbeiten ***Ueber das Additionstheorem der Thetafunctionen mehrerer Variabeln*** (dieses Journal Bd. 89) und ***Ueber Gruppen von Thetacharakteristiken*** (dieser Band S. 81), die ich der Kürze halber im Folgenden mit *T.* und *U.* citiren werde, bezeichne ich das System der ϱ Variabeln $v^{(1)}, v^{(2)}, \dots v^{(\varrho)}$ einer Thetafunction mit einem Buchstaben v und das System der halben Perioden

$$\tfrac{1}{2}\mu_1+\tfrac{1}{2}\sum_\beta \tau_{1\beta}\nu_\beta,\quad \tfrac{1}{2}\mu_2+\tfrac{1}{2}\sum_\beta \tau_{2\beta}\nu_\beta,\quad \dots\quad \tfrac{1}{2}\mu_\varrho+\tfrac{1}{2}\sum_\beta \tau_{\varrho\beta}\nu_\beta$$

mit einem Buchstaben R. Die diesem System entsprechende Charakteristik bezeichne ich ebenfalls mit

$$R = \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \dots & \nu_\varrho \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_\varrho \end{pmatrix},$$

so dass also

$$\vartheta[R](v) = \Sigma e^{2\pi i \Sigma (v^{(\alpha)}+\frac{1}{2}\mu_\alpha)(n_\alpha+\frac{1}{2}\nu_\alpha)+i\pi\Sigma\tau_{\alpha\beta}(n_\alpha+\frac{1}{2}\nu_\alpha)(n_\beta+\frac{1}{2}\nu_\beta)}$$

ist. Ist $r = 2^\varrho$, sind $A, B, C, \dots$ die r^2 verschiedenen Charakteristiken, $x_A, x_B, x_C, \dots$ ebenso viele Parameter und $u_0, \dots u_{r-1}, v_0, \dots v_{r-1}$ $2r$ unabhängige Variabelnsysteme, so zerfällt die Determinante r^{ten} Grades

$$|\sum_R x_R \vartheta[R](u_\alpha+v_\beta)\vartheta[R](u_\alpha-v_\beta)| \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \dots r-1),$$

wo R alle r^2 Charakteristiken durchläuft, in zwei Factoren, von denen der eine nur von den Variabeln u_α und v_β, der andere nur von den Variabeln x_R abhängt. Der letztere ist eine ganze, ganzzahlige homogene Function r^{ten} Grades von r^2 Variabeln x_R, deren Eigenschaften mit denen der Charakteristiken in der engsten Beziehung stehen. Die Untersuchung dieser Function bildet den Hauptinhalt der folgenden Arbeit.

§ 1.

Die Anzahl der linear unabhängigen Thetafunctionen zweiten Grades von ϱ Variabeln, welche bei Vermehrung der Argumente um simultane

Perioden mit den nämlichen Exponentialfactoren multiplicirt werden, ist

$$(1.)\qquad r = 2^\rho.$$

Setzt man, wenn $\vartheta(u)$ irgend eine der r^2 Thetafunctionen ersten Grades ist,

$$\vartheta(u+v)\vartheta(u-v) = \vartheta(u, v),$$

so besteht daher, wenn $m > r$ ist, zwischen den m Functionen

$$\vartheta(u, v_\beta) \qquad (\beta = 0, 1, \dots m-1)$$

mindestens eine Relation $\Sigma c_\beta \vartheta(u, v_\beta) = 0$, deren Coefficienten c_β von u unabhängig sind. Setzt man in derselben für u der Reihe nach die m Werthsysteme $u_0, u_1, \dots u_{m-1}$ ein, so erhält man m Gleichungen, aus denen folgt, dass die Determinante m^{ten} Grades

$$(2.)\qquad |\vartheta(u_\alpha, v_\beta)| = 0 \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \dots m-1;\ m > r)$$

ist. Ist $\vartheta(u)$ eine ungerade Function, so ist $\vartheta(u, v) = -\vartheta(v, u)$. Folglich ist die Determinante (2.) für $u_\alpha = v_\alpha$ eine alternirende, also, wenn m gerade ist, das Quadrat einer *Pfaff*schen Function. Ich bezeichne, wenn $t_{\alpha\beta} = -t_{\beta\alpha}$, $t_{\alpha\alpha} = 0$ ist, mit $|t_{\alpha\beta}|^{\frac{1}{2}}$ diejenige Quadratwurzel aus der Determinante paaren Grades $|t_{\alpha\beta}|$, in deren Entwicklung das Glied $t_{12}\, t_{34} \dots t_{m-1,m}$ den Coefficienten $+1$ hat. Dann ist

$$(3.)\qquad |\vartheta(u_\alpha, u_\beta)|^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Diese Formel ist für den Fall $m = r+2$ von Herrn *Weierstrass* (Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1882, S. 505.) angegeben worden.

Die Determinante r^{ten} Grades

$$(4.)\qquad |\vartheta[A](u_\alpha, v_\beta)| \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \dots r-1)$$

ist für unbestimmte Werthe der $2r$ Variabelnsysteme u_α, v_β von Null verschieden. Um dies zu zeigen, betrachte ich n Charakteristiken $P_0, P_1, \dots P_{n-1}$, die eine *Göpel*sche Gruppe $\mathfrak{P}$ bilden (*T.* § 2), und setze in jener Determinante

$$u_\alpha = u + P_\alpha,\quad v_\beta = v + P_\beta.$$

Dann geht sie, abgesehen von einem (nicht verschwindenden) Exponentialfactor in

$$(5.)\qquad \left|\binom{P_\alpha P_\beta}{P_\beta}\vartheta[AP_\alpha P_\beta](u, v)\right|$$

über. Ich definire die Wurzeln $\sqrt{P_\lambda}$ aus den Charakteren (P_λ) in derselben Weise, wie *T.* § 2, S. 198, also so, dass

$$(6.)\qquad \sqrt{P_\alpha P_\beta} = \sqrt{P_\alpha}\sqrt{P_\beta}\binom{P_\alpha}{P_\beta}$$

ist. Ist $\varepsilon_\lambda = \pm 1$ $(\lambda = 0, 1, \dots r-1)$ und

$$(7.)\qquad \varepsilon_\gamma = \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta, \quad \text{wenn} \quad P_\gamma = P_\alpha P_\beta$$

ist, so stellt $\varepsilon_\lambda \sqrt{P_\lambda}$ alle r jenen Bedingungen genügenden Systeme der Wurzeln dar, falls $\sqrt{P_\lambda}$ eins unter ihnen ist. Nun giebt es aber stets r Charakteristiken, die den r Bedingungen $(P_\lambda, X) = \varepsilon_\lambda$, unter denen nur ϱ unabhängig sind, Genüge leisten. Dieselben werden aus einer unter ihnen erhalten, indem man zu ihr alle Charakteristiken von $\mathfrak{P}$ addirt, oder sind einander (mod. $\mathfrak{P}$) äquivalent (*U.* § 1). Sind also $Q_0, Q_1, \dots Q_{r-1}$ die r (mod. $\mathfrak{P}$) verschiedenen Charakteristiken, so stellt

$$(8.)\qquad P_\lambda^{(\varkappa)} = (Q_\varkappa, P_\lambda)\sqrt{P_\lambda} \qquad (\lambda = 0, 1, \dots r-1)$$

für die verschiedenen Werthe von $\varkappa$ alle r Systeme der Wurzeln dar. Da nach *T.* S. 201

$$(9.)\qquad \sum_\alpha (Q_\alpha, P_\varkappa P_\lambda) = r \quad \text{oder} \quad 0$$

ist, je nachdem $P_\varkappa = P_\lambda$ ist oder nicht, so ist die Determinante r^{ten} Grades $|P_\lambda^{(\varkappa)}|$ von Null verschieden.

Setzt man mit derselben die Determinante (5.) zusammen, so erhält man die aus den Elementen

$$\Sigma \binom{P_\lambda P_\beta}{P_\beta} P_\lambda^{(\alpha)} \vartheta[A P_\lambda P_\beta](u, v)$$

gebildete Determinante r^{ten} Grades. Ersetzt man (vergl. *T.* S. 199) in dieser Summe P_λ durch $P_\lambda P_\beta$, so findet man

$$P_\beta^{(\alpha)} \sum_\lambda P_\lambda^{(\alpha)} \vartheta[A P_\lambda](u, v).$$

Mithin ist jene Determinante gleich

$$|P_\beta^{(\alpha)}| . \prod_\alpha \Big(\sum_\lambda P_\lambda^{(\alpha)} \vartheta[A P_\lambda](u, v) \Big),$$

und, wenn man mit P, wie *T.* S. 205, ein über die r verschiedenen Werthsysteme der Wurzeln $\sqrt{P_\lambda}$ erstrecktes Product bezeichnet, so ist folglich

$$(10.)\qquad \left| \binom{P_\alpha P_\beta}{P_\beta} \vartheta[A P_\alpha P_\beta](u, v) \right| = \mathrm{P}\Big(\sum_\lambda \sqrt{P_\lambda}\, \vartheta[A P_\lambda](u, v) \Big).$$

Nun ist aber, weil zwischen den r^2 Thetafunctionen ersten Grades keine Relation besteht,

$$\Sigma \sqrt{P_\lambda}\, \vartheta[A P_\lambda](u, v)$$

für unbestimmte Werthe u, v von Null verschieden (*T.* S. 199) und zwar auch dann, wenn die Parameter $\tau_{\alpha\beta}$ irgend welche bestimmte *endliche* Werthe haben. Ferner ist auch für $u = v$ der Ausdruck

$$\Sigma \sqrt{P_\lambda}\, \vartheta[A P_\lambda](u, u)$$

von Null verschieden, weil die Grössen $\vartheta[AP_\lambda](0)$ (für unbestimmte Werthe der Parameter $\tau_{\alpha\beta}$) nicht sämmtlich verschwinden können (*T.* S. 196). Daraus folgt, dass nicht nur die Determinante (4.), sondern auch die specielleren Determinanten

$$|\vartheta[A](u_\alpha, u_\beta)| \quad \text{und} \quad |\vartheta[AP_\alpha](u, v_\beta)|$$

von Null verschieden sind.

Folglich sind die r Functionen $\vartheta[A](u, v_\beta)$ der Variabeln u für willkürliche Werthe der Constanten $v, v_1, \dots v_{r-1}$ von einander unabhängig, und daher lässt sich jede andere Thetafunction zweiten Grades $\varphi(u)$ auf die Form

$$\varphi(u) = \Sigma c_\beta \vartheta[A](u, v_\beta)$$

bringen. Soll sie nun für die Werthe $u = u_1, u_2, \dots u_{r-1}$ verschwinden, so muss

$$\sum_\beta c_\beta \vartheta[A](u_\alpha, v_\beta) = 0$$

sein, und mithin ist

$$\varphi(u) = c\,|\vartheta[A](u_\alpha, v_\beta)|,$$

wo c von u unabhängig ist. Ist C eine ungerade Charakteristik, so ist die *Pfaff*sche Function

$$|\vartheta[C](u_\alpha, u_\beta)|^{\frac{1}{2}}$$

eine solche Function. Daher ist der Quotient

$$|\vartheta[C](u_\alpha, v_\beta)| : |\vartheta[C](u_\alpha, u_\beta)|^{\frac{1}{2}}$$

von u unabhängig. In derselben Weise ergiebt sich aber, dass er auch von $u_1, u_2, \dots u_{r-1}$ unabhängig ist. Um ihn zu bestimmen, kann man also $u = v, \dots u_{r-1} = v_{r-1}$ setzen und erhält so die Formel

$$(11.) \qquad |\vartheta[C](u_\alpha, v_\beta)| = |\vartheta[C](u_\alpha, u_\beta)|^{\frac{1}{2}}.|\vartheta[C](v_\alpha, v_\beta)|^{\frac{1}{2}}.$$

Vermehrt man die Argumente u_α alle um dieselbe halbe Periode AC, so ergiebt sich

$$|\vartheta[A](u_\alpha, v_\beta)| = (A, C)^{\frac{r}{2}} |\vartheta[C](u_\alpha, u_\beta)|^{\frac{1}{2}}.|\vartheta[C](v_\alpha, v_\beta)|^{\frac{1}{2}}.$$

Daher hat, wenn $\varrho > 1$ ist,

$$(12.) \qquad |\vartheta[A](u_\alpha, v_\beta)| = |\vartheta[B](u_\alpha, v_\beta)| \qquad (\varrho > 1)$$

für alle Charakteristiken denselben Werth. Dagegen findet man für $\varrho = 1$ durch zweimalige Anwendung der obigen Formel

$$(13.) \qquad |\vartheta[A](u_\alpha, v_\beta)| = -(AB)|\vartheta[B](u_\alpha, v_\beta)| \qquad (\varrho = 1)$$

vorausgesetzt, dass A und B verschieden sind. Aus den Relationen (10.) und (12.) ergiebt sich noch die Folgerung, dass der Ausdruck

$$(14.)\quad \mathrm{P}(\sum_\lambda \sqrt{P_\lambda}\vartheta[AP_\lambda](u,v)) = \mathrm{P}(\sum_\lambda \sqrt{P_\lambda}\vartheta[BP_\lambda](u,v))$$

von der Charakteristik A unabhängig ist.

§ 2.

Ist $A, B, C, \dots$ ein gegebenes System von Charakteristiken, und R irgend eine derselben, und sind $x_A, x_B, x_C, \dots$ unabhängige Veränderliche, so ergiebt sich, wie oben, dass die Determinante

$$(1.)\quad |\sum_R x_R \vartheta[R](u_\alpha, v_\beta)| = 0$$

ist, falls ihr Grad $> r$ ist. Dagegen ist die Determinante r^{ten} Grades

$$(2.)\quad |\sum_R x_R \vartheta[R](u_\alpha, v_\beta)| \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \dots r-1)$$

eine Thetafunction zweiten Grades von u, die für $u = u_1, u_2, \dots u_{r-1}$ verschwindet. Mithin ist der Quotient

$$|\Sigma x_R \vartheta[R](u_\alpha, v_\beta)| : |\vartheta[A](u_\alpha, v_\beta)|$$

von u und ebenso von $u_1, \dots u_{r-1}, v, v_1, \dots v_{r-1}$ unabhängig. Demnach zerfällt der Ausdruck (2.) in drei Factoren, von denen der eine nur die Variabeln u_α, der andere nur die Variabeln v_β und der dritte nur die Variabeln x_R enthält. Den letzten bezeichne ich mit $F(x_A, x_B, x_C, \dots)$ oder auch kurz mit $F[x_R]$. Durchläuft R alle r^2 Charakteristiken, so ist F eine ganze homogene Function r^{ten} Grades von r^2 Variabeln x_R, und aus dieser allgemeinen Form erhält man alle speciellen Functionen F, indem man einige der Variabeln gleich Null setzt.

Da die Function

$$(3.)\quad F[x_R] = |\sum_R x_R \vartheta[R](u_\alpha, v_\beta)| : |\vartheta[A](u_\alpha, v_\beta)|$$

von den Variabeln u_α und v_β unabhängig ist, so kann man u_α mit v_α $(\alpha = 0, 1, \dots r-1)$ vertauschen. Vertauscht man zugleich in den Determinanten die Zeilen mit den Colonnen, so findet man, weil

$$\vartheta[R](v, u) = (R)\vartheta[R](u, v)$$

ist,

$$(4.)\quad F[x_R] = F[(R)x_R].$$

Wenn also $kx_A x_B x_C \dots$ irgend ein Glied von F ist, so muss

$$(A)(B)(C)\dots = 1$$

sein. Vermehrt man in (3.) die Variabeln u_α, v_β alle um die halbe Periode L, so erhält man

$$F[x_R] = |\Sigma x_R(L, R)\vartheta[R](u_\alpha, v_\beta)| : |\vartheta[A](u_\alpha, v_\beta)|,$$

und mithin ist

$$F[x_R] = F[(L, R)x_R].$$

Ist also $kx_A x_B x_C \dots$ irgend ein Glied von F, so ist $(L, ABC\dots) = 1$. Diese Gleichung kann aber (*T.* S. 191) nur dann für jede Charakteristik L bestehen, wenn $ABC\dots = O$ ist.

I. ***In jedem Gliede von $F[x_R]$ ist die Summe der Charakteristiken, welche die Indices der Variabeln bilden, gleich O, und das Product ihrer Charaktere gleich ± 1.***

Ist daher $\varepsilon_A \varepsilon_B \varepsilon_C \dots = 1$, falls $ABC\dots = O$ ist, so ist

$$F[x_R] = F[\varepsilon_R x_R].$$

Diesen Bedingungen genügt $\varepsilon_R = \binom{L}{R}$ oder $\binom{R}{L}$. Für $\varrho = 1$ ist F eine quadratische Function von vier Variabeln x_A, x_B, x_C, x_D, welche nach dem letzten Satze die Producte $x_R x_S$ nicht enthalten kann. Die Quadrate x_R^2 ergeben sich aus Formel (13.) § 1, und mithin ist

$$(5.)\quad F[x_R] = x_A^2 - (AB)x_B^2 - (AC)x_C^2 - (AD)x_D^2 \qquad (\varrho = 1).$$

In diesem Falle hängt das Vorzeichen der durch die Gleichung (3.) definirten Function F von der Wahl der Charakteristik A ab. Ist aber, wie von jetzt an stets vorausgesetzt wird, $\varrho > 1$, so ist F nach Formel (12.) § 1 auch von der Wahl von A unabhängig.

Vermehrt man in der Gleichung (3.) die Variabeln u_α alle um dieselbe halbe Periode A, so erhält man

$$F[x_R] = \left|\Sigma x_R \binom{A}{R} \vartheta[AR](u_\alpha, v_\beta)\right| : \left|\vartheta[O](u_\alpha, v_\beta)\right|,$$

also nach Formel (12.) § 1, und weil F ungeändert bleibt, wenn man x_R durch $\binom{A}{R}x_R$ ersetzt,

$$F[x_R] = |\Sigma x_{AR}\vartheta[R](u_\alpha, v_\beta)| : |\vartheta[A](u_\alpha, v_\beta)|,$$

und folglich

$$(6.)\quad F[x_R] = F[x_{AR}].$$

§ 3.

Wir betrachten zunächst den Fall, wo R nicht alle r^2 Charakteristiken, sondern nur ein *vollständiges System* $\mathfrak{A}$ (*U.* § 1) von r Charakteristiken $A, A_1, \dots A_{r-1}$ durchläuft. Ist $AA_\lambda = Q_\lambda$, und setzt man in der Gleichung

$$(1.)\quad F[x_R] = |\sum_\lambda x_{A_\lambda}\vartheta[A_\lambda](u_\alpha, v_\beta)| : |\vartheta[A](u_\alpha, v_\beta)|$$

$v_\beta = v + Q_\beta$, so erhält man

$$F = \left|\sum_\lambda \binom{Q_\lambda}{Q_\beta} x_{AQ_\lambda} \vartheta[AQ_\lambda Q_\beta](u_\alpha, v)\right| : \left|\vartheta[A_\beta](u_\alpha, v)\right|.$$

Es lässt sich zeigen, worauf ich hier nicht näher eingehen will, dass zwischen den r Functionen $\vartheta[A_\beta](u, v)$ $(\beta = 0, 1, \dots r-1)$ der Variabeln v (für unbestimmte Werthe der Parameter $\tau_{\alpha\beta}$) keine lineare Gleichung mit constanten Coefficienten besteht, dass also die Determinante $|\vartheta[A_\beta](u_\alpha, v)|$ von Null verschieden ist. Für den Fall, dass $\mathfrak{A}$ ein *Göpel*sches System ist, den ich hauptsächlich im Folgenden brauche, habe ich den Beweis dafür oben gegeben.

Die r Charakteristiken Q_λ bilden eine *Gruppe*. Ersetzt man daher in der Determinante, die den Zähler von F bildet, Q_λ durch $Q_\lambda Q_\beta$, so wird dadurch in jeder Summe nur die Reihenfolge der Summanden geändert. Mithin ist jene Determinante gleich

$$\left|\sum_\lambda \binom{Q_\lambda Q_\beta}{Q_\beta} x_{AQ_\lambda Q_\beta} \vartheta[AQ_\lambda](u_\alpha, v)\right| = \left|\binom{Q_\alpha Q_\beta}{Q_\beta} x_{AQ_\alpha Q_\beta}\right| \left|\vartheta[A_\beta](u_\alpha, v)\right|,$$

und folglich ist

$$(2.) \qquad F[x_R] = \left|\binom{Q_\alpha Q_\beta}{Q_\beta} x_{AQ_\alpha Q_\beta}\right|.$$

In dem speciellen Falle, wo die Charakteristiken $Q_\lambda = P_\lambda$ eine *Göpel*sche Gruppe bilden, erhält man durch Zusammensetzung der in § 1 definirten Determinante $|P_\beta^{(\alpha)}|$ mit (2.) eine Determinante, deren Elemente gleich

$$\sum_\lambda P_\lambda^{(\alpha)} \binom{P_\lambda P_\beta}{P_\beta} x_{AP_\lambda P_\beta}$$

sind, oder wenn man P_λ durch $P_\lambda P_\beta$ ersetzt, gleich

$$P_\beta^{(\alpha)} \sum_\lambda P_\lambda^{(\alpha)} x_{AP_\lambda}.$$

Mithin ist

$$(3.) \qquad F[x_R] = \mathrm{P}\left(\sum_\lambda \sqrt{P_\lambda}\, x_{A_\lambda}\right).$$

Setzt man einige der Variabeln Null, so erkennt man, dass $F[x_R]$ stets in lineare Factoren zerfällt, wenn je drei der von R durchlaufenen Charakteristiken syzygetisch sind (*U.* § 1).

Setzt man die Variabeln Null bis auf zwei, A und $AP = B$, so erhält man

$$(4.) \qquad F(x_A, x_B) = (x_A^2 - (AB) x_B^2)^{\frac{r}{2}}.$$

In dieser Formel sind A und B zwei ganz beliebige (verschiedene) Charakteristiken. Für $v_\alpha = u_\alpha$ ist also

$$|x\vartheta[A](u_\alpha,u_\beta)+y\vartheta[B](u_\alpha,u_\beta)| = (x^2-(AB)y^2)^{\frac{r}{2}}|\vartheta[A](u_\alpha,u_\beta)|.$$

Sind A und B beide ungerade, so sind die Determinanten auf beiden Seiten dieser Gleichung alternirende, und mithin ergiebt sich durch Ausziehung der Quadratwurzel

$$|x\vartheta[A](u_\alpha,u_\beta)+y\vartheta[B](u_\alpha,u_\beta)|^{\frac{1}{2}} = (x^2-(AB)y^2)^{\frac{r}{4}}|\vartheta[A](u_\alpha,u_\beta)|^{\frac{1}{2}}.$$

Das Vorzeichen bestimmt man durch Vergleichung der Coefficienten von $x^{\frac{r}{2}}$. Durch Vergleichung der Coefficienten von $y^{\frac{r}{2}}$ findet man, dass, falls $\varrho>2$ ist, die *Pfaff*sche Function

$$(5.)\qquad |\vartheta[A](u_\alpha,u_\beta)|^{\frac{1}{2}} = |\vartheta[B](u_\alpha,u_\beta)|^{\frac{1}{2}} \qquad (\varrho>2)$$

für alle ungeraden Charakteristiken denselben Werth hat. Dagegen ist

$$(6.)\qquad |\vartheta[A](u_\alpha,u_\beta)|^{\frac{1}{2}} = -(AB)|\vartheta[B](u_\alpha,u_\beta)|^{\frac{1}{2}} \qquad (\varrho=2)$$

oder anders ausgedrückt:

II. *Sind A_α ($\alpha=0,1,\dots 5$) für $\varrho=2$ die sechs ungeraden Charakteristiken, so kann man die Verhältnisse der sechs Zahlen ε_α so bestimmen, dass*

$$\varepsilon_\alpha^2=1,\qquad \varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta=-(A_\alpha A_\beta) \qquad (\alpha \gtrless \beta)$$

ist. Dann hat der Ausdruck

$$\begin{aligned}\varepsilon_\alpha(\vartheta[A_\alpha](u+u')\,(u-u')\,(u''+u''')(u''-u''')\\ +\vartheta[A_\alpha](u+u'')\,(u-u'')(u'''+u')\,(u'''-u')\\ +\vartheta[A_\alpha](u+u''')(u-u''')\,(u'+u'')\,(u'-u''))\end{aligned}$$

für alle sechs ungeraden Charakteristiken denselben Werth.

Durchläuft R für $\varrho=2$ alle Charakteristiken, so hat in der Function $F[x_R]$ das Glied x_R^4 nach (12.) § 1 den Coefficienten 1, das Glied $x_R^2x_S^2$, falls R und S verschieden sind, nach (4.) den Coefficienten $-2(RS)$ und das Glied $x_Rx_Sx_Tx_{RST}$, falls R, S, T drei verschiedene syzygetische Charakteristiken sind, nach (3.) den Coefficienten

$$8\binom{R}{S}\binom{S}{T}\binom{T}{R}(RST).$$

Dem Satze I. zufolge kommen aber in F nur Glieder von einer der drei Formen x_R^4, $x_R^2x_S^2$ und $x_Rx_Sx_Tx_{RST}$ vor, und bei der letzten Form ist

$$(R)(S)(T)(RST)=1 \quad\text{oder}\quad (R,S,T)=+1,$$

d. h. R, S, T sind syzygetisch. Mithin ist

$$(7.)\qquad F[x_R] = \Sigma x_R^4-2\Sigma(RS)x_R^2x_S^2+8\Sigma\binom{R}{S}\binom{S}{T}\binom{T}{R}(RST)x_Rx_Sx_Tx_{RST} \qquad (\varrho=2).$$

§ 4.

Durchläuft R alle r^2 Charakteristiken, so ist $F[x_R]$ bis auf einen von den Variabeln x_R unabhängigen Factor gleich der Determinante r^{ten} Grades

$$\left|\sum_R x_R \vartheta[R](u_\xi, v_\eta)\right| \qquad (\xi, \eta = 0, 1, \dots r-1).$$

Jener Factor muss so gewählt werden, dass der Coefficient von x_0^r in F gleich 1 wird. Bilden $P_0, P_1, \dots P_{r-1}$ eine *Göpel*sche Gruppe $\mathfrak{P}$ und sind $Q_0, Q_1, \dots Q_{r-1}$ r (mod. $\mathfrak{P}$) verschiedene Charakteristiken, so kann jede Charakteristik R, und zwar nur in einer Weise, auf die Form $P_\lambda Q_\gamma$ $(\lambda, \gamma = 0, 1, \dots r-1)$ gebracht werden, und mithin ist

$$\sum_R x_R \vartheta[R](u, v) = \sum_{\lambda, \gamma} x_{P_\lambda Q_\gamma} \vartheta[P_\lambda Q_\gamma](u, v).$$

Nun ist

$$(1.) \qquad \sum_\alpha (Q_\alpha, P_\varkappa P_\lambda) = r \quad \text{oder} \quad 0,$$

je nachdem $\varkappa = \lambda$ ist oder nicht (*T.* S. 201), und folglich ist

$$r \sum_{\lambda, \gamma} x_{P_\lambda Q_\gamma} \vartheta[P_\lambda Q_\gamma](u, v) = \sum_{\varkappa, \lambda, \gamma} x_{P_\lambda Q_\gamma} \vartheta[P_\varkappa Q_\gamma](u, v) \left(\sum_\alpha (Q_\alpha, P_\varkappa P_\lambda) \binom{P_\varkappa P_\lambda}{Q_\gamma} (P_\lambda) \sqrt{P_\varkappa} \sqrt{P_\lambda}\right).$$

Die Summe $Q_\gamma Q_\alpha$ kann man auf die Form $Q_\beta P'_\beta$ bringen, wo P'_β in der Gruppe $\mathfrak{P}$ enthalten ist, und wenn man dem Index γ (für einen bestimmten Werth von α) die Werthe von 0 bis $r-1$ ertheilt, so durchläuft β dieselben Werthe, nur in einer andern Reihenfolge. $P'_0, P'_1, \dots P'_{r-1}$ sind irgend r verschiedene oder gleiche Charakteristiken aus der Gruppe $\mathfrak{P}$. Ich führe nun in der obigen Summe für γ den neuen Summationsbuchstaben β ein, indem ich $Q_\gamma = Q_\alpha Q_\beta P'_\beta$ setze. Dann geht sie über in

$$\sum_{\varkappa, \lambda, \alpha, \beta} \binom{Q_\alpha}{P_\varkappa P_\lambda} \binom{P_\varkappa P_\lambda}{Q_\beta P'_\beta} (P_\lambda) \sqrt{P_\varkappa} \sqrt{P_\lambda} x_{P_\lambda P'_\beta Q_\alpha Q_\beta} \vartheta[P_\varkappa P'_\beta Q_\alpha Q_\beta](u, v),$$

oder wenn man $P_\varkappa$ durch $P_\varkappa P'_\beta$ und P_λ durch $P_\lambda P'_\beta$ ersetzt, in

$$\sum_{\varkappa, \lambda, \alpha, \beta} \binom{Q_\alpha}{P_\varkappa P_\lambda} \binom{P_\varkappa P_\lambda}{Q_\beta} (P_\lambda) \sqrt{P_\varkappa} \sqrt{P_\lambda} x_{P_\lambda Q_\alpha Q_\beta} \vartheta[P_\varkappa Q_\alpha Q_\beta](u, v).$$

Setzt man also

$$\binom{Q_\alpha Q_\beta}{Q_\beta} \sum_\lambda \binom{Q_\alpha}{P_\lambda} \binom{P_\lambda}{Q_\beta} (P_\lambda) \sqrt{P_\lambda} x_{P_\lambda Q_\alpha Q_\beta} = X_{\alpha\beta},$$

so ist

$$\sum_R x_R \vartheta[R](u, v) = \sum_{\alpha, \beta} X_{\alpha\beta} \left(\sum_\varkappa \binom{Q_\alpha}{P_\varkappa} \binom{P_\varkappa Q_\alpha Q_\beta}{Q_\beta} \sqrt{P_\varkappa} \vartheta[P_\varkappa Q_\alpha Q_\beta](u, v)\right).$$

Nun ist aber (*T.* S. 200)

$$(2.)\quad \begin{cases} (\sum \sqrt{P_\varkappa}\vartheta[P_\varkappa](u,v))(\sum\sqrt{P_\varkappa}\vartheta[P_\varkappa](a,b)) \\ = (\sum\sqrt{P_\varkappa}\vartheta[P_\varkappa](u,b))(\sum\sqrt{P_\varkappa}\vartheta[P_\varkappa](a,v)).\end{cases}$$

Vermehrt man in dieser Gleichung u um Q_α und v um Q_β, so erhält man

$$(3.)\quad \begin{cases} \left(\sum_\varkappa \binom{Q_\alpha}{P_\varkappa}\binom{P_\varkappa Q_\alpha Q_\beta}{Q_\beta}\sqrt{P_\varkappa}\vartheta[P_\varkappa Q_\alpha Q_\beta](u,v)\right)\left(\sum_\varkappa\sqrt{P_\varkappa}\vartheta[P_\varkappa](a,b)\right) \\ = \left(\sum_\varkappa\binom{Q_\alpha}{P_\varkappa}\sqrt{P_\varkappa}\vartheta[P_\varkappa Q_\alpha](u,b)\right)\left(\sum_\varkappa\binom{P_\varkappa Q_\beta}{Q_\beta}\sqrt{P_\varkappa}\vartheta[P_\varkappa Q_\beta](a,v)\right),\end{cases}$$

folglich

$$(\sum\sqrt{P_\varkappa}\vartheta[P_\varkappa](a,b))(\sum_R x_R\vartheta[R](u_\xi,v_\eta))$$
$$= \sum_{\alpha,\beta}\left(\sum_\varkappa\binom{Q_\alpha}{P_\varkappa}\sqrt{P_\varkappa}\vartheta[P_\varkappa Q_\alpha](u_\xi,b)\right)X_{\alpha\beta}\left(\sum_\varkappa\binom{P_\varkappa Q_\beta}{Q_\beta}\sqrt{P_\varkappa}\vartheta[P_\varkappa Q_\beta](a,v_\eta)\right),$$

also nach dem Multiplicationstheorem der Determinanten

$$(\sum\sqrt{P_\varkappa}\vartheta[P_\varkappa](a,b))^r\,|\sum_R\vartheta x_R[R](u_\xi,v_\eta)|$$
$$= \left|\sum_\varkappa\binom{Q_\alpha}{P_\varkappa}\sqrt{P_\varkappa}\vartheta[P_\varkappa Q_\alpha](u_\beta,b)\right|.\left|X_{\alpha\beta}\right|.\left|\sum_\varkappa\binom{P_\varkappa Q_\beta}{Q_\beta}\sqrt{P_\varkappa}\vartheta[P_\varkappa Q_\beta](a,v_\alpha)\right|.$$

Mithin ist, bis auf einen constanten Factor $F=|X_{\alpha\beta}|$. Ist $P_0=O$, so ist $P_\lambda Q_\alpha Q_\beta$ stets und nur dann gleich O, wenn $\lambda=0$ und $\alpha=\beta$ ist. Die letzte Gleichung ist daher, weil $x_0^r=\prod_\alpha x_{P_0 Q_\alpha Q_\alpha}$ in der Determinante den Factor 1 hat, genau richtig. In der erhaltenen Formel kann man den Wurzeln $\sqrt{P_\lambda}$ beliebige den Bedingungen (6.) § 1 genügende Werthe ertheilen, also z. B. $\sqrt{P_\lambda}$ durch $(P_\lambda)\sqrt{P_\lambda}$ ersetzen. Nach Gleichung (6.) § 2 ist folglich, wenn A eine beliebige Charakteristik ist,

$$(4.)\quad F[x_R] = \left|\binom{Q_\alpha Q_\beta}{Q_\beta}\sum_\lambda\binom{Q_\alpha}{P_\lambda}\binom{P_\lambda}{Q_\beta}\sqrt{P_\lambda}\,x_{AP_\lambda Q_\alpha Q_\beta}\right| \qquad (\alpha,\beta=0,1,\dots r-1).$$

Die Coefficienten dieser Function sind ganze, ganzzahlige Functionen von $\sqrt{P_1},\dots\sqrt{P_\varrho}$, die ungeändert bleiben, wenn die Vorzeichen dieser Wurzeln umgekehrt werden, und mithin ganze Zahlen. Zu demselben Resultat gelangt man, indem man $P_0, P_1, \dots P_{r-1}$ gerade annimmt, z. B. indem man dafür alle Charakteristiken wählt, in denen $\mu_1,\dots\mu_\varrho$ verschwinden. Demnach sind die Coefficienten von F auch von den Parametern $\tau_{\alpha\beta}$ unabhängig (wie auch mittelst der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, denen die Thetafunction genügt, leicht direct gezeigt werden kann). Speciell bleibt F ungeändert, wenn man die Parameter $\tau_{\alpha\beta}$ durch solche anderen

Parameter $\bar{\tau}_{\alpha\beta}$ ersetzt, welche aus ihnen durch eine lineare Transformation hervorgehen. Verbindet man mit diesem Resultate die Formel (6.) § 2, so ergiebt sich nach *T.* S. 187 und *U.* § 1 der Satz:

III. ***Durchläuft R alle r^2 Charakteristiken in der Reihenfolge $R_0, R_1, R_2, \dots$ und S dieselben in der Reihenfolge $S_0, S_1, S_2, \dots$, und sind diese beiden Systeme von Charakteristiken, wenn R_α und S_α als entsprechend betrachtet werden, äquivalent, so ist $F[x_S] = F[\varepsilon_R x_R]$, wo ε_R eine vierte Einheitswurzel ist.***

Nach Formel (4.) ist $F = |X_{\alpha\beta}|$, wenn

$$X_{\alpha\beta} = \binom{Q_\alpha Q_\beta}{Q_\beta} \sum_\lambda \binom{Q_\alpha}{P_\lambda}\binom{P_\lambda}{Q_\beta} \sqrt{P_\lambda}\, x_{P_\lambda Q_\alpha Q_\beta}$$

gesetzt wird. Ich will voraussetzen, dass die Charakteristiken Q_γ nicht nur mod. $\mathfrak{P}$, sondern auch an und für sich eine Gruppe bilden. Ist $P_1, \dots P_\varrho$ eine Basis von $\mathfrak{P}$, und wählt man $Q_1, \dots Q_\varrho$ so, dass sie zusammen mit $P_1, \dots P_\varrho$ 2ϱ unabhängige Charakteristiken sind, so bilden die Combinationen $Q_0, Q_1, \dots Q_{r-1}$ jener ϱ Charakteristiken eine Gruppe von der verlangten Beschaffenheit. Sind nun μ und ν zwei bestimmte der Indices von 0 bis $r-1$, und multiplicirt man die obige Gleichung mit $\binom{Q_\alpha Q_\beta}{Q_\beta}(Q_\alpha, P_\mu)$, giebt dann den Indices α, β alle Werthe, die der Bedingung $Q_\alpha Q_\beta = Q_\nu$ genügen, und addirt die r so erhaltenen Gleichungen, so findet man

$$\sum \binom{Q_\nu}{Q_\beta}(Q_\alpha, P_\mu) X_{\alpha\beta} = \sum_\lambda \binom{P_\lambda}{Q_\nu} \sqrt{P_\lambda}\, x_{P_\lambda Q_\nu} \big(\sum_\alpha (Q_\alpha, P_\lambda P_\mu)\big)$$

oder nach (1.)

$$r\binom{P_\mu}{Q_\nu}\sqrt{P_\mu}\, x_{P_\mu Q_\nu} = \sum \binom{Q_\nu}{Q_\beta}(Q_\alpha, P_\mu) X_{\alpha\beta}.$$

Die Variabeln x_R und $X_{\alpha\beta}$ lassen sich also gegenseitig linear durch einander ausdrücken. Da nun die Determinante $|X_{\alpha\beta}|$, falls ihre Elemente unabhängige Variabeln sind, unzerlegbar ist, so lässt sich auch die Function $F[x_R]$ der r^2 Variabeln x_R nicht in Factoren zerlegen.

Durchläuft R nur die ungeraden Charakteristiken, und setzt man in der Formel (3.) § 2 $v_\alpha = u_\alpha$, so erhält man

$$F[x_R] = |\sum_R x_R \vartheta[R](u_\alpha, u_\beta)| : |\vartheta[C](u_\alpha, u_\beta)|.$$

Ist C ebenfalls ungerade, so sind Zähler und Nenner alternirende Determinanten und mithin ist

$$(5.)\qquad \sqrt{F[x_R]} = |\sum_R x_R \vartheta[R](u_\alpha, u_\beta)|^{\frac{1}{2}} : |\vartheta[C](u_\alpha, u_\beta)|^{\frac{1}{2}}$$

eine rationale Function der Variabeln x_R, die ich mit $H[x_R]$ bezeichnen will. Allgemeiner ist $F[x_R]$ das Quadrat einer rationalen Function, wenn eine Charakteristik A existirt, für welche die Charakteristiken AR sämmtlich ungerade sind. Für $\varrho = 2$ ergiebt sich aus (7.) § 3, falls man die in Satz II. angewendeten Bezeichnungen benutzt

$$(6.)\qquad H[x_R] = \Sigma \varepsilon_R x_R^2 = \pm(x_A^2 - (AA_1)x_{A_1}^2 - \cdots - (AA_5)x_{A_5}^2) \qquad (\varrho = 2),$$

und dieselbe Formel gilt, wenn $A, A_1, \ldots A_5$ irgend ein Fundamentalsystem bilden (*T.* S. 209). Ist $\varrho > 2$, so hat $|\vartheta[C](u_\alpha, u_\beta)|^{\frac{1}{2}}$ nach (5.) § 3 für alle ungeraden Charakteristiken denselben Werth, und man kann daher das Vorzeichen von H fixiren, indem man festsetzt, dass in dieser Function $x_R^{\frac{r}{2}}$ den Coefficienten $+1$ habe. Indem man alle u_α um dieselbe halbe Periode L vermehrt, findet man, wie in § 2, dass, wenn $kx_A x_B x_C \ldots$ irgend ein Glied von H ist, $ABC \ldots = O$ sein muss. Für $\varrho = 3$ kann daher H nur Glieder von einer der drei Formen x_R^4, $x_R^2 x_S^2$ und $x_R x_S x_T x_{RST}$ enthalten, und weil R, S, T und RST ungerade sind, so müssen im letzten Falle R, S, T drei syzygetische Charakteristiken sein. Die Coefficienten dieser Glieder ergeben sich aus der Formel (3.) § 3, und mithin ist

$$(7.)\qquad H[x_R] = \Sigma x_R^4 - 2\Sigma(RS)x_R^2 x_S^2 + 8\Sigma\binom{R}{S}\binom{S}{T}\binom{T}{R}(RST)x_R x_S x_T x_{RST} \qquad (\varrho = 3).$$

Um allgemein H zu bestimmen, setze ich in Formel (4.) $x_R = 0$, falls R gerade ist. Ausserdem wähle ich A so, dass die Charakteristiken AP_λ alle gerade sind (*T.* S. 198). Ist dann

$$X_{\alpha\beta} = \binom{Q_\alpha Q_\beta}{Q_\beta}\sum_\lambda\binom{Q_\alpha}{AP_\lambda}\binom{AP_\lambda}{Q_\beta}\sqrt{P_\lambda}\, x_{AP_\lambda Q_\alpha Q_\beta},$$

so ist

$$X_{\beta\alpha} = \binom{Q_\alpha Q_\beta}{Q_\beta}\sum_\lambda\binom{Q_\alpha}{AP_\lambda}\binom{AP_\lambda}{Q_\beta}(AP_\lambda Q_\alpha Q_\beta)\, x_{AP_\lambda Q_\alpha Q_\beta}.$$

Wenn nun $x_{AP_\lambda Q_\alpha Q_\beta}$ nicht Null ist, so ist $(AP_\lambda Q_\alpha Q_\beta) = -1$, und mithin ist $X_{\beta\alpha} = -X_{\alpha\beta}$. Folglich ist die Determinante $|X_{\alpha\beta}|$ eine alternirende und

$$(8.)\qquad \sqrt{\Pi(A, Q_\alpha)}\, H[x_R] = \left|\binom{Q_\alpha Q_\beta}{Q_\beta}\sum_\lambda\binom{Q_\alpha}{AP_\lambda}\binom{AP_\lambda}{Q_\beta}\sqrt{P_\lambda}\, x_{AP_\lambda Q_\alpha Q_\beta}\right|^{\frac{1}{2}}.$$

§ 5.

Ist

$$X_{\alpha\beta} = \binom{Q_\alpha Q_\beta}{Q_\beta} \sum_\varkappa \binom{Q_\alpha}{P_\varkappa} \binom{P_\varkappa}{Q_\beta} (P_\varkappa) \sqrt{P_\varkappa}\, x_{P_\varkappa Q_\alpha Q_\beta},$$

$$Y_{\alpha\beta} = \binom{Q_\alpha Q_\beta}{Q_\beta} \sum_\lambda \binom{Q_\alpha}{P_\lambda} \binom{P_\lambda}{Q_\beta} \sqrt{P_\lambda}\, y_{P_\lambda Q_\alpha Q_\beta},$$

so ist

$$F[x_R] = X_{\alpha\beta}. \quad F[y_R] = Y_{\alpha\beta}.$$

Daher ist

$$F[x_R].F[y_R] = Z_{\alpha\beta},$$

wenn man setzt

$$Z_{\alpha\beta} = \sum_\gamma X_{\gamma\alpha} Y_{\gamma\beta} = \sum_{\varkappa,\lambda,\gamma} \binom{Q_\gamma}{Q_\alpha Q_\beta P_\varkappa P_\lambda} \binom{Q_\alpha P_\varkappa}{Q_\alpha} \binom{Q_\beta P_\lambda}{Q_\beta} (P_\varkappa) \sqrt{P_\varkappa} \sqrt{P_\lambda}\, x_{P_\varkappa Q_\gamma Q_\alpha}\, y_{P_\lambda Q_\gamma Q_\beta}.$$

Ersetzt man P_λ durch $P_\lambda P_\varkappa$, so erhält man

$$Z_{\alpha\beta} = \sum_{\varkappa,\lambda,\gamma} \binom{Q_\gamma}{Q_\alpha Q_\beta P_\lambda} \binom{Q_\alpha P_\varkappa}{Q_\alpha} \binom{Q_\beta P_\lambda P_\varkappa}{Q_\beta} \binom{P_\varkappa}{P_\lambda} \sqrt{P_\lambda}\, x_{P_\varkappa Q_\gamma Q_\alpha}\, y_{P_\varkappa P_\lambda Q_\gamma Q_\beta}.$$

Ersetzt man ferner, wie im § 4, Q_γ durch $Q_\gamma Q_\alpha P'_\gamma$ und dann $P_\varkappa$ durch $P_\varkappa P'_\gamma$, so findet man

$$Z_{\alpha\beta} = \binom{Q_\alpha Q_\beta}{Q_\beta} \sum_\lambda \binom{Q_\alpha}{P_\lambda} \binom{P_\lambda}{Q_\beta} \sqrt{P_\lambda}\, z_{P_\lambda Q_\alpha Q_\beta},$$

wo

$$z_{P_\lambda Q_\alpha Q_\beta} = \sum_{\varkappa,\gamma} \binom{P_\varkappa Q_\gamma}{P_\lambda Q_\alpha Q_\beta} x_{P_\varkappa Q_\gamma}\, y_{P_\varkappa Q_\gamma P_\lambda Q_\alpha Q_\beta}$$

ist. Daraus folgt:

IV. *Ist*

$$(1.) \qquad z_S = \sum_R \binom{R}{S} x_R y_{RS},$$

so ist

$$(2.) \qquad F[z_R] = F[x_R].F[y_R].$$

Ist speciell $x_R = y_R$, so ist

$$z_S = \sum_R \binom{R}{S} x_R x_{RS}.$$

Ersetzt man R durch RS und addirt die neue Gleichung zur ursprünglichen, so erhält man

$$2 z_S = (1+(S)) \sum_R \binom{R}{S} x_R x_{RS},$$

und demnach ist $z_S = 0$, wenn S ungerade ist. Durchläuft also S nur die geraden, R aber alle Charakteristiken, so ist

$$(3.)\quad F[z_S] = F[x_R]^2, \quad \text{wenn} \quad z_S = \sum_R \binom{R}{S} x_R x_{RS}$$

ist. Kennt man also $F[x_S]$, so kann man mittelst dieser Formel die allgemeine Function $F[x_R]$ finden.

Die Formeln (2.) und (3.) bleiben auch richtig, wenn R und S nur die Charakteristiken einer gegebenen Gruppe $\mathfrak{R}$ durchlaufen. Um dies einzusehen, braucht man nur x_R und y_R gleich Null zu setzen, wenn R nicht der Gruppe $\mathfrak{R}$ angehört, und zu bedenken, dass, falls S eine Charakteristik von $\mathfrak{R}$ ist, $S\mathfrak{R} = \mathfrak{R}$ ist, dass aber, falls S nicht in $\mathfrak{R}$ enthalten ist, das System $S\mathfrak{R}$ mit der Gruppe $\mathfrak{R}$ keine Charakteristik gemeinsam hat.

§ 6.

Gegeben sei ein System $\mathfrak{A}$ von Charakteristiken $A, B, C, \dots$, von denen je drei azygetisch sind, also der Bedingung

$$(A, B, C) = (AB)(AC)(BC) = -1$$

genügen (*T.* S. 189; *U.* § 1). Ist $\varepsilon_A = \pm 1$, und, falls B von A verschieden ist, $\varepsilon_B = -(AB)\varepsilon_A$, so ist $\varepsilon_B \varepsilon_C = (AB)(AC) = -(BC)$, also allgemein, wenn A und B irgend zwei verschiedene Charakteristiken von $\mathfrak{A}$ sind,

$$(1.)\quad \varepsilon_A \varepsilon_A = 1, \quad \varepsilon_A \varepsilon_B = -(AB).$$

Gehört R dem System $\mathfrak{A}$ nicht an, so sei $\varepsilon_R = 0$. Um $F(x_A, x_B, x_C, \dots)$ zu berechnen, setze ich in der Formel

$$F[x_R] = \left| \binom{Q_\alpha Q_\beta}{Q_\beta} \sum_\varkappa \binom{Q_\alpha}{P_\varkappa} \binom{P_\varkappa}{Q_\beta} (P_\varkappa) \sqrt{P_\varkappa}\, x_{P_\varkappa Q_\alpha Q_\beta} \right|$$

$x_R = 0$, falls R nicht in $\mathfrak{A}$ enthalten ist*). Multiplicirt man F mit

$$G = \left| \binom{Q_\alpha Q_\beta}{Q_\beta} \sum_\lambda \binom{Q_\alpha}{P_\lambda} \binom{P_\lambda}{Q_\beta} \sqrt{P_\lambda}\, \varepsilon_{P_\lambda Q_\alpha Q_\beta} x_{P_\lambda Q_\alpha Q_\beta} \right|,$$

so erhält man $F.G = |Z_{\alpha\beta}|$, wo

$$Z_{\alpha\beta} = \sum_{\varkappa,\lambda,\gamma} \binom{Q_\gamma}{Q_\alpha Q_\beta P_\varkappa P_\lambda} \binom{Q_\alpha P_\varkappa}{Q_\alpha} \binom{Q_\beta P_\lambda}{Q_\beta} (P_\varkappa) \sqrt{P_\varkappa} \sqrt{P_\lambda}\, \varepsilon_{P_\lambda Q_\gamma Q_\beta} x_{P_\varkappa Q_\gamma Q_\alpha} x_{P_\lambda Q_\gamma Q_\beta}.$$

---

*) Ertheilt man in dem Ausdruck $P_\varkappa Q_\alpha Q_\beta$ dem $\varkappa$ drei verschiedene Werthe, so erhält man drei syzygetische Charakteristiken. Daher besteht kein Element der obigen Determinante aus mehr als zwei Gliedern, und man kann, wenn $A, B, C, \dots$ gegeben sind, die Charakteristiken P_λ und Q_γ immer so wählen, dass jedes Element, das nicht verschwindet, nur eine der Variabeln $x_A, x_B, x_C, \dots$ enthält.

Wie in § 4 nehme ich an, dass die Charakteristiken Q_γ für sich eine Gruppe bilden. Ersetzt man dann Q_γ durch $Q_\gamma Q_\alpha Q_\beta$, vertauscht $\varkappa$ mit λ, und addirt den so erhaltenen Ausdruck von $Z_{\alpha\beta}$ zu dem ursprünglichen, so erhält man

$$2Z_{\alpha\beta} = \sum_{\varkappa,\lambda,\gamma} \left(\begin{matrix} Q_\gamma \\ Q_\alpha Q_\beta P_\varkappa P_\lambda \end{matrix}\right)\left(\begin{matrix} Q_\alpha P_\varkappa \\ Q_\alpha \end{matrix}\right)\left(\begin{matrix} Q_\beta P_\lambda \\ Q_\beta \end{matrix}\right)(P_\varkappa)\sqrt{P_\varkappa}\sqrt{P_\lambda}\,\varepsilon_{P_\lambda Q_\gamma Q_\beta}\, x_{P_\varkappa Q_\gamma Q_\alpha}\, x_{P_\lambda Q_\gamma Q_\beta}$$
$$\cdot[1+(Q_\alpha Q_\beta P_\varkappa P_\lambda)\varepsilon_{P_\varkappa Q_\gamma Q_\alpha}\varepsilon_{P_\lambda Q_\gamma Q_\beta}].$$

Ist eine der beiden Charakteristiken $P_\varkappa Q_\gamma Q_\alpha$ und $P_\lambda Q_\gamma Q_\beta$ nicht in $\mathfrak{A}$ enthalten, so ist $x_{P_\varkappa Q_\gamma Q_\alpha} x_{P_\lambda Q_\gamma Q_\beta} = 0$. Gehören sie aber beide dem Systeme $\mathfrak{A}$ an, so hat $1+(Q_\alpha Q_\beta P_\varkappa P_\lambda)\varepsilon_{P_\varkappa Q_\gamma Q_\alpha}\varepsilon_{P_\lambda Q_\gamma Q_\beta}$, falls sie von einander verschieden sind, nach (1.) den Werth Null, falls sie aber einander gleich sind, den Werth 2. Der letztere Fall tritt nur ein, wenn $\alpha = \beta$ und $\varkappa = \lambda$ ist. Ist also α von β verschieden, so ist $Z_{\alpha\beta} = 0$. Ist aber $\alpha = \beta$, so bleiben von der Summe $2Z_{\alpha\alpha}$ nur die Glieder übrig, in denen $\varkappa = \lambda$ ist, und mithin ist

$$Z_{\alpha\alpha} = \sum_R \varepsilon_R x_R^2 = Z.$$

Folglich ist $FG = Z^r$ und daher, weil Z nicht in Factoren zerlegbar ist, und x_A^r in F den Coefficienten 1 hat,

$$(2.) \qquad F[x_R] = (\sum_R \varepsilon_R x_R^2)^{\frac{r}{2}}$$

oder

$$(3.) \qquad F(x_A, x_B, x_C, \ldots) = (x_A^2-(AB)x_B^2-(AC)x_C^2-\cdots)^{\frac{r}{2}}.$$

Ist umgekehrt F für irgend ein System $\mathfrak{A}$ von Charakteristiken eine Potenz einer quadratischen Function

$$F = (\Sigma k_{AB} x_A x_B)^{\frac{r}{2}},$$

so ergiebt sich, indem man alle Variabeln bis auf zwei gleich Null setzt,

$$F(x_A, x_B) = (k_{AA}x_A^2 + k_{BB}x_B^2 + 2k_{AB}x_A x_B)^{\frac{r}{2}},$$

also nach (4.) § 3

$$k_{AB} = 0 \quad \text{und} \quad k_{BB} = -(AB)k_{AA}.$$

Ist C eine dritte Charakteristik von $\mathfrak{A}$, so ist ebenso

$$k_{CC} = -(BC)k_{BB} \quad \text{und} \quad k_{AA} = -(CA)k_{CC},$$

und mithin

$$(BC)(CA)(AB) = -1.$$

Daher sind je drei Charakteristiken von $\mathfrak{A}$ azygetisch.

Zerfällt dagegen F für ein System $\mathfrak{A}$ von Charakteristiken $A, B, C, \dots$ in lineare Factoren, so ist auch die Function dreier Variabeln $F(x_A, x_B, x_C)$ ein Product von linearen Factoren. Daher können A, B, C nicht azygetisch sein, weil $x_A^2-(AB)x_B^2-(AC)x_C^2$ unzerlegbar ist. In Verbindung mit Formel (3.) § 3 folgt daraus:

V. ***Damit $F[x_R]$ für ein System von Charakteristiken in lineare Factoren zerfalle, ist nothwendig und hinreichend, dass je drei der gegebenen Charakteristiken syzygetisch sind.***

Damit $F[x_R]$ für ein System von Charakteristiken eine Potenz einer quadratischen Function sei, ist nothwendig und hinreichend, dass je drei der gegebenen Charakteristiken azygetisch sind.

§ 7.

Für die weitere Untersuchung der Function F erweist es sich als nothwendig, die bisher entwickelte Theorie zu verallgemeinern. Bilden $P_0, P_1, \dots P_{n-1}$ eine Gruppe $\mathfrak{P}$ von $n = 2^\nu$ Charakteristiken, von denen je zwei syzygetisch sind, und werden die Wurzeln $\sqrt{P_\varkappa}$ in der nämlichen Art gewählt wie in § 1, so hat (*U.* § 4) die Function

$$(1.)\qquad \varphi[A](u,v) = \sum_\varkappa \binom{P_\varkappa}{A}\sqrt{P_\varkappa}\,\vartheta[AP_\varkappa](u,v)$$

die Eigenschaften

$$(2.)\qquad \varphi[A](u+P_\lambda, v) = \chi_\lambda(u)(P_\lambda)\sqrt{P_\lambda}\,\varphi[A](u,v),$$

$$(3.)\qquad \varphi[A](u, v+P_\lambda) = \chi_\lambda(v)(A,P_\lambda)\sqrt{P_\lambda}\,\varphi[A](u,v),$$

wo

$$\chi_\lambda(u) = e^{-i\pi\Sigma\mu_\alpha\nu_\alpha - 2\pi i\Sigma\nu_\alpha u_\alpha - \frac{i\pi}{2}\Sigma\tau_{\alpha\beta}\nu_\alpha\nu_\beta}$$

ist, wenn

$$P_\lambda = \binom{\nu_1 \dots \nu_\varrho}{\mu_1 \dots \mu_\varrho}$$

ist. Setzt man

$$(4.)\qquad \nu+\sigma = \varrho,\quad 2^\sigma = s,$$

so besteht zwischen je $s+1$ Thetafunctionen zweiten Grades von u, welche sich bei Vermehrung des Arguments um die halben Perioden der Gruppe $\mathfrak{P}$ in derselben Weise ändern wie $\varphi[A](u,v)$, eine lineare Relation, und daraus ergiebt sich, wie in § 1,

$$(5.)\qquad |\varphi[A](u_\xi, v_\eta)| = 0 \qquad (\xi, \eta = 0, 1, \ldots m-1;\ m > s).$$

Ist aber $m = s$, so zeigt man, wie in § 1, dass die Determinante $|\varphi[A](u_\xi, v_\eta)|$ von Null verschieden ist. Ist $\sigma > 0$, so kann man (*U.* § 3) die Charakteristik C so bestimmen, dass die n Charakteristiken $CP_\varkappa$ sämmtlich ungerade sind. Dann ergiebt sich, wie in § 1, die Formel

$$(6.)\quad |\varphi[C](u_\xi, v_\eta)| = |\varphi[C](u_\xi, u_\eta)|^{\frac{1}{2}} . |\varphi[C](v_\xi, v_\eta)|^{\frac{1}{2}} \qquad (\xi, \eta = 0, 1, \ldots s-1).$$

Vermehrt man die Variabeln u_ξ alle um AC und ersetzt $\sqrt{P_\varkappa}$ durch $(AC, P_\varkappa)\sqrt{P_\varkappa}$, so folgt daraus, dass die Determinante s^{ten} Grades $|\varphi[A](u_\xi, v_\eta)|$ in das Product einer Function der Variabeln u_ξ und einer Function der Variabeln v_η zerfällt. Nach Formel (2.) § 4 gilt dieser Satz auch für $\sigma = 0$.

Seien $A, B, C, \ldots$ mehrere Charakteristiken, von denen je zwei den Bedingungen

$$(7.)\qquad (A, P_\varkappa) = (B, P_\varkappa) \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots n-1)$$

genügen. Ist R irgend eine dieser Charakteristiken, so ist der Quotient

$$(8.)\qquad G[z_R] = |\sum_R z_R \varphi[R](u_\xi, v_\eta)| : |\varphi[A](u_\xi, v_\eta)|$$

eine ganze Function s^{ten} Grades der Variabeln $z_A, z_B, z_C, \ldots$, die von den Variabeln u_ξ und v_η unabhängig ist. (Die Bedingungen (7.) sind der Formel (3.) zufolge nothwendig. Sind sie nicht erfüllt, so ist jener Quotient nur von den Variabeln u_ξ, aber nicht von den Variabeln v_η unabhängig.)

Bilden $P_1, \ldots P_\nu$ eine Basis von $\mathfrak{P}$, so kann man σ Charakteristiken $R_1, \ldots R_\sigma$ so bestimmen, dass sie mit jenen zusammen $\nu + \sigma = \varrho$ unabhängige Charakteristiken bilden, von denen je zwei syzygetisch sind (*T.* S. 193). Sind dann $R_0, R_1, \ldots R_{s-1}$ die s Combinationen von $R_1, \ldots R_\sigma$, so bilden die $r = ns$ Charakteristiken $P_\varkappa R_\lambda$ eine *Göpel*sche Gruppe. Ist A eine beliebige Charakteristik, durchläuft R in (8.) die Charakteristiken AR_λ (die den Bedingungen (7.) genügen), und setzt man in jener Formel $u_\xi = u + R_\xi$, so erhält man, wie in § 3,

$$G = \left|\sum_\lambda \left(\begin{matrix} R_\xi \\ R_\lambda \end{matrix}\right) z_{AR_\lambda} \varphi[AR_\lambda R_\xi](u, v_\eta)\right| : |\varphi[AR_\xi](u, v_\eta)|$$

$$= \left|\sum_\lambda \left(\begin{matrix} R_\xi \\ R_\lambda R_\xi \end{matrix}\right) z_{AR_\lambda R_\xi} \varphi[AR_\lambda](u, v_\eta)\right| : |\varphi[AR_\xi](u, v_\eta)|,$$

also

$$(9.)\qquad G[z_R] = \left|\left(\begin{matrix} R_\alpha \\ R_\alpha R_\beta \end{matrix}\right) z_{AR_\alpha R_\beta}\right| = P(\sum_\lambda \sqrt{R_\lambda}\, z_{AR_\lambda}).$$

Setzt man die Variabeln z_R bis auf zwei gleich Null, so ist folglich

$$(10.)\quad G(z_A, z_R) = (z_A^2-(AB)z_R^2)^{\frac{s}{2}}.$$

In dieser Formel sind A und B irgend zwei den Bedingungen (7.) genügende Charakteristiken, deren Summe nicht in $\mathfrak{P}$ enthalten ist. Vergleicht man in derselben die Coefficienten von z_R^s, so findet man

$$(11.)\quad |\varphi[A](u_\xi, v_\eta)| = |\varphi[B](u_\xi, v_\eta)| \qquad (\sigma>1),$$

dagegen

$$(12.)\quad |\varphi[A](u_\xi, v_\eta)| = -(AB)|\varphi[B](u_\xi, v_\eta)| \qquad (\sigma=1).$$

Die n Congruenzen

$$(13.)\quad |U, P_\varkappa| \equiv 0 \qquad (\varkappa=0,1,\dots n-1),$$

von denen ν unabhängig sind, haben $2^{2\varrho-\nu}$ Lösungen, die eine Gruppe $\mathfrak{U}$ bilden, und von denen $2\varrho-\nu$ unabhängig sind. Zu diesen gehören die ϱ Charakteristiken $P_1, \dots P_\nu, R_1, \dots R_\sigma$, also haben sie ausserdem noch $\varrho-\nu=\sigma$ Lösungen $S_1, \dots S_\sigma$, die unter einander und von jenen unabhängig sind. Sind dann $S_0, S_1, \dots S_{s-1}$ die Combinationen von $S_1, \dots S_\sigma$, jede um eine beliebige der Charakteristiken R_λ vermehrt, so stellt der Ausdruck

$$U = S_\alpha P_\varkappa R_\lambda \qquad (\alpha, \lambda=0,1,\dots s-1;\ \varkappa=0,1,\dots n-1)$$

alle Lösungen der Congruenzen (13.) dar, und die s^2 Charakteristiken $S_\alpha R_\lambda$ bilden eine Gruppe $\mathfrak{V}$. Durchläuft V diese Gruppe, so soll der Quotient der beiden Determinanten s^{ten} Grades

$$(14.)\quad G[z_V] = |\Sigma z_V\varphi[V](u_\xi, v_\eta)| : |\varphi[O](u_\xi, v_\eta)|$$

bestimmt werden. Zu dem Zwecke berechne ich zunächst die Summe

$$f = \sum_\alpha (S_\alpha, R_\lambda).$$

Da $(P_\beta R_\gamma, R_\lambda)=1$ ist, so ist

$$rf = \sum_{\alpha,\beta,\gamma}(S_\alpha P_\beta R_\gamma, R_\lambda) = \sum_U (U, R_\lambda),$$

wo U alle Lösungen der Congruenzen (13.) durchläuft. Mithin ist

$$rnf = \sum_T (T, R_\lambda)(1+(T, P_1))\dots(1+(T, P_\nu)),$$

wo T alle r^2 Charakteristiken durchläuft. Entwickelt man das Product, so ist irgend eine Theilsumme

$$\sum_T (T, R_\lambda P_\alpha P_\beta P_\gamma\dots) = 0,$$

ausser wenn $R_\lambda P_\alpha P_\beta P_\gamma \dots = O$ ist, und dann ist jene Summe gleich r^2. Dieser Fall tritt nur ein, wenn $R_\lambda = O$ ist, da $R_1, \dots R_\sigma, P_1, \dots P_\nu$ von einander unabhängig sind und R_λ eine Combination von $R_1, \dots R_\sigma$ ist. Demnach ist im Allgemeinen $f = 0$, wenn aber $R_\lambda = O$ ist, $f = s$. Da die Charakteristiken $R_0, R_1, \dots R_{s-1}$ eine Gruppe bilden, so ist folglich

$$(15.)\qquad \sum_\alpha (S_\alpha, R_\varkappa R_\lambda) = s \quad \text{oder} \quad 0,$$

je nachdem $\varkappa = \lambda$ ist, oder nicht.

Da ferner die r Charakteristiken $P_\varkappa R_\lambda$ eine *Göpel*sche Gruppe bilden, so ist nach (2.) § 4

$$\Big(\sum_{\varkappa,\lambda}\Big(\frac{P_\varkappa}{R_\lambda}\Big)\sqrt{P_\varkappa}\sqrt{R_\lambda}\,\vartheta[P_\varkappa R_\lambda](u,v)\Big)\Big(\sum_{\varkappa,\lambda}\Big(\frac{P_\varkappa}{R_\lambda}\Big)\sqrt{P_\varkappa}\sqrt{R_\lambda}\,\vartheta[P_\varkappa R_\lambda](a,b)\Big)$$
$$= \Big(\sum_{\varkappa,\lambda}\Big(\frac{P_\varkappa}{R_\lambda}\Big)\sqrt{P_\varkappa}\sqrt{R_\lambda}\,\vartheta[P_\varkappa R_\lambda](u,b)\Big)\Big(\sum_{\varkappa,\lambda}\Big(\frac{P_\varkappa}{R_\lambda}\Big)\sqrt{P_\varkappa}\sqrt{R_\lambda}\,\vartheta[P_\varkappa R_\lambda](a,v)\Big).$$

Vermehrt man u um S_α und v um S_β, so erhält man

$$\Big(\sum_{\varkappa,\lambda}\Big(\frac{P_\varkappa}{R_\lambda}\Big)\Big(\frac{S_\alpha}{P_\varkappa R_\lambda}\Big)\Big(\frac{P_\varkappa R_\lambda S_\alpha S_\beta}{S_\beta}\Big)\sqrt{P_\varkappa}\sqrt{R_\lambda}\,\vartheta[P_\varkappa R_\lambda S_\alpha S_\beta](u,v)\Big)\Big(\sum_{\varkappa,\lambda}\Big(\frac{P_\varkappa}{R_\lambda}\Big)\sqrt{P_\varkappa}\sqrt{R_\lambda}\,\vartheta[P_\varkappa R_\lambda](a,b)\Big)$$
$$= \Big(\sum_{\varkappa,\lambda}\Big(\frac{P_\varkappa}{R_\lambda}\Big)\Big(\frac{S_\alpha}{P_\varkappa R_\lambda}\Big)\sqrt{P_\varkappa}\sqrt{R_\lambda}\,\vartheta[P_\varkappa R_\lambda S_\alpha](u,b)\Big)\Big(\sum_{\varkappa,\lambda}\Big(\frac{P_\varkappa}{R_\lambda}\Big)\Big(\frac{P_\varkappa R_\lambda S_\beta}{S_\beta}\Big)\sqrt{P_\varkappa}\sqrt{R_\lambda}\,\vartheta[P_\varkappa R_\lambda S_\beta](a,v)\Big)$$

und mithin

$$(16.)\quad \begin{cases} \Big(\sum\Big(\frac{S_\alpha}{R_\lambda}\Big)\Big(\frac{R_\lambda S_\alpha S_\beta}{S_\beta}\Big)\sqrt{R_\lambda}\,\varphi[R_\lambda S_\alpha S_\beta](u,v)\Big)\Big(\sum\sqrt{R_\lambda}\,\varphi[R_\lambda](a,b)\Big) \\ = \Big(\sum\Big(\frac{S_\alpha}{R_\lambda}\Big)\sqrt{R_\lambda}\,\varphi[R_\lambda S_\alpha](u,b)\Big)\Big(\sum\Big(\frac{R_\lambda S_\beta}{S_\beta}\Big)\sqrt{R_\lambda}\,\varphi[R_\lambda S_\beta](a,v)\Big). \end{cases}$$

In ähnlicher Weise wie in § 4 aus den Gleichungen (1.) und (3.) die Formel (4.) abgeleitet wurde, ergiebt sich hier aus den Gleichungen (15.) und (16.) die Relation

$$(17.)\qquad G[\mathfrak{z}_\nu] = \Big|\Big(\frac{S_\alpha S_\beta}{S_\beta}\Big)\sum_\lambda\Big(\frac{S_\alpha}{R_\lambda}\Big)\Big(\frac{R_\lambda}{S_\beta}\Big)\sqrt{R_\lambda}\,Z_{R_\lambda s_\alpha s_\beta}\Big|.$$

Dieser Ausdruck hängt nicht von den Vorzeichen der Wurzeln $\sqrt{R_\lambda}$ ab. Besonders bemerkenswerth ist aber, dass er auch von den Vorzeichen der Wurzeln $\sqrt{P_\varkappa}$ unabhängig ist. Dies würde nicht der Fall sein, wenn $S_0, S_1, \dots S_{s-1}$ nur in irgend einer Art so gewählt worden wären, dass der Ausdruck $S_\alpha P_\varkappa R_\lambda$ alle Lösungen der Congruenzen (13.) darstellt, sondern findet nur Statt, weil die Charakteristiken $S_\alpha R_\varkappa$ an und für sich (und nicht nur mod. $\mathfrak{P}$) eine Gruppe bilden.

Sei A eine beliebige Charakteristik und durchlaufe S die Charakte-

ristiken $AS_\alpha R_\varkappa$, d. h. ein System (mod. $\mathfrak{P}$) verschiedener Lösungen der Congruenzen

$$(18.)\qquad (S, P_\varkappa) = (A, P_\varkappa) \qquad (\varkappa = 0, 1, \dots n-1),$$

die so gewählt sind, dass sie ein vollständiges System bilden. Vermehrt man dann in der Formel

$$\left|\sum_V z_V \varphi[V](u_\xi, v_\eta)\right| = \left|\binom{S_\alpha S_\beta}{S_\beta}\sum_\lambda \binom{S_\alpha}{R_\lambda}\binom{R_\lambda}{S_\beta}\sqrt{R_\lambda}\, z_{R_\lambda s_\alpha s_\beta}\right| \cdot |\varphi[O](u_\xi, v_\eta)|$$

die Variabeln u_ξ alle um A und ersetzt $\sqrt{P_\varkappa}$ durch $(A, P_\varkappa)\sqrt{P_\varkappa}$ und $\sqrt{R_\lambda}$ durch $\binom{A}{R_\lambda}\sqrt{R_\lambda}$ und z_V durch $\binom{A}{V} z_{AV}$, so erhält man

$$\left|\sum_V z_{AV}\varphi[AV](u_\xi, v_\eta)\right| = \left|\binom{S_\alpha S_\beta}{S_\beta}\sum_\lambda \binom{S_\alpha}{R_\lambda}\binom{R_\lambda}{S_\beta}\sqrt{R_\lambda}\, z_{AR_\lambda s_\alpha s_\beta}\right| \cdot |\varphi[A](u_\xi, v_\eta)|$$

und mithin, weil $AV = S$ ist,

$$(19.)\qquad G[z_S] = \left|\binom{S_\alpha S_\beta}{S_\beta}\sum_\lambda \binom{S_\alpha}{R_\lambda}\binom{R_\lambda}{S_\beta}\sqrt{R_\lambda}\, z_{AR_\lambda s_\alpha s_\beta}\right|.$$

§ 8.

Nimmt man in der Formel (4.) § 4 für die r Charakteristiken P_μ ($\mu = 0, 1, \dots r-1$) die im vorigen Paragraphen definirten $ns = r$ Charakteristiken $P_\varkappa R_\lambda$ ($\varkappa = 0, 1, \dots n-1$; $\lambda = 0, 1, \dots s-1$), und ersetzt man $\sqrt{P_\varkappa}$ durch $\binom{P_\varkappa}{A}\sqrt{P_\varkappa}$, so erhält man

$$F[x_R] = \left|\binom{Q_\alpha Q_\beta}{Q_\beta}\sum_{\varkappa,\lambda}\binom{Q_\alpha}{P_\varkappa R_\lambda}\binom{P_\varkappa R_\lambda}{Q_\beta}\binom{P_\varkappa}{AR_\lambda}\sqrt{P_\varkappa}\sqrt{R_\lambda}\, x_{AP_\varkappa R_\lambda Q_\alpha Q_\beta}\right| \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \dots r-1).$$

Wählt man die Charakteristiken S_α, wie im vorigen Paragraphen, so bilden die ns^2 verschiedenen Charakteristiken $U = S_\alpha P_\varkappa R_\lambda$ ($\alpha, \lambda = 0, 1, \dots s-1$; $\varkappa = 0, 1, \dots n-1$) eine Gruppe $\mathfrak{U}$. Sind also T_γ ($\gamma = 0, 1, \dots n-1$) $n = r^2 : ns^2$ (mod. $\mathfrak{U}$) verschiedene Charakteristiken, so stellt der Ausdruck $S_\alpha T_\gamma P_\varkappa R_\lambda$ alle r^2 Charakteristiken dar, und daher kann man für die r Charakteristiken Q_α ($\alpha = 0, 1, \dots r-1$) die sn Charakteristiken $S_\alpha T_\gamma$ ($\alpha = 0, 1, \dots s-1$; $\gamma = 0, 1, \dots n-1$) wählen. Folglich ist

$$F[x_R] = \left|\binom{S_\alpha S_\beta T_\gamma T_\delta}{S_\beta T_\delta}\sum_{\varkappa,\lambda}\binom{S_\alpha T_\gamma}{P_\varkappa R_\lambda}\binom{P_\varkappa R_\lambda}{S_\beta T_\delta}\binom{P_\varkappa}{AR_\lambda}\sqrt{P}\sqrt{R_\lambda}\, x_{AP_\varkappa R_\lambda s_\alpha s_\beta T_\gamma T_\delta}\right|.$$

Die Zeilen dieser Determinante bildet man, indem man α die Werthe von 0 bis $s-1$ und γ die von 0 bis $n-1$ beilegt, die Colonnen, indem man β die Werthe von 0 bis $s-1$ und δ die von 0 bis $n-1$ ertheilt.

Ich will nun F für den Fall berechnen, wo R nicht alle r^2 Charakteristiken durchläuft, sondern nur die ns^2 Lösungen der Congruenzen

$$(1.)\qquad (R,P_\varkappa) = (A,P_\varkappa) \qquad\qquad (\varkappa = 0,1,\dots n-1).$$

Zu dem Zwecke setze ich $x_{AU}=0$, wenn U nicht den Congruenzen $(U,P_\varkappa)=1$ genügt, also nicht in der Form $U=S_\alpha P_\varkappa R_\lambda$ dargestellt werden kann. Da die Charakteristiken T_γ (mod. $\mathfrak{U}$) verschieden sind, so ist $T_\gamma T_\delta$ nur dann in $\mathfrak{U}$ enthalten, wenn $\gamma=\delta$ ist. Mithin ist $x_{AP_\varkappa R_\lambda S_\alpha S_\beta T_\gamma T_\delta}=0$, ausser wenn $\gamma=\delta$ ist. Folglich ist die obige Determinante r^{ten} Grades ein Product von n Determinanten s^{ten} Grades, deren γ^{te}

$$G_\gamma = \left|\binom{S_\alpha S_\beta}{S_\beta T_\gamma}\sum_{\varkappa,\lambda}\binom{S_\alpha T_\gamma}{P_\varkappa R_\lambda}\binom{P_\varkappa R_\lambda}{S_\beta T_\gamma}\binom{P_\varkappa}{A R_\lambda}\sqrt{P_\varkappa}\sqrt{R_\lambda}\,x_{AP_\varkappa R_\lambda S_\alpha S_\beta}\right| \qquad (\alpha,\beta=0,1,\dots s-1)$$

ist. Aus den Elementen der α^{ten} Zeile kann man den Factor $\binom{S_\alpha}{T_\gamma}$, aus denen der β^{ten} Colonne den Factor $\binom{S_\beta}{T_\gamma}$ herausnehmen. Da ferner $(P_\varkappa, S_\alpha)=1$, also $\binom{S_\alpha}{P_\varkappa}=\binom{P_\varkappa}{S_\alpha}$ ist, so ist

$$G_\gamma = \left|\binom{S_\alpha S_\beta}{S_\beta}\sum_{\varkappa,\lambda}\binom{P_\varkappa}{A S_\alpha S_\beta R_\lambda}(P_\varkappa, T_\gamma)\sqrt{P_\varkappa}\binom{S_\alpha}{R_\lambda}\binom{R_\lambda}{S_\beta}(R_\lambda, T_\gamma)\sqrt{R_\lambda}\,x_{AP_\varkappa R_\lambda S_\alpha S_\beta}\right|.$$

Setzt man also, falls S irgend eine der Charakteristiken $AS_\alpha R_\lambda$ des vollständigen Systems $A\mathfrak{V}$ ist,

$$z_S^{(\gamma)} = \sum_\varkappa\binom{P_\varkappa}{S}(P_\varkappa, T_\gamma)\sqrt{P_\varkappa}\,x_{SP_\varkappa},$$

so ist

$$G_\gamma = \left|\binom{S_\alpha S_\beta}{S_\beta}\sum_\lambda\binom{S_\alpha}{R_\lambda}\binom{R_\lambda}{S_\beta}(R_\lambda, T_\gamma)\sqrt{R_\lambda}\,z^{(\gamma)}_{AR_\lambda S_\alpha S_\beta}\right|.$$

Ich setze nun, wie im vorigen Paragraphen,

$$G[z_S] = \left|\binom{S_\alpha S_\beta}{S_\beta}\sum_\lambda\binom{S_\alpha}{R_\lambda}\binom{R_\lambda}{S_\beta}\sqrt{R_\lambda}\,z_{AR_\lambda S_\alpha S_\beta}\right|.$$

Da dieser Ausdruck von der Wahl der Wurzeln $\sqrt{R_\lambda}$ unabhängig ist, so kann man $\sqrt{R_\lambda}$ durch $(R_\lambda, T_\gamma)\sqrt{R_\lambda}$ ersetzen, und mithin ist

$$G_\gamma = G[z_S^{(\gamma)}].$$

Ist $\sqrt{P_\varkappa}$ ein den Bedingungen (6.) § 1 genügendes System der Wurzeln, so stellt $(P_\varkappa, W)\sqrt{P_\varkappa}$, falls W alle Charakteristiken durchläuft, jedes solche System dar. Da nun jede Charakteristik W auf die Form $S_\alpha T_\gamma P_\mu R_\lambda$ gebracht werden kann, und $(P_\varkappa, S_\alpha P_\mu R_\lambda)=1$ ist, so stellt auch

$$(2.)\qquad (T_\gamma, P_\varkappa)\sqrt{P_\varkappa} = P_\varkappa^{(\gamma)}$$

jedes System der Wurzeln dar, und jedes nur einmal, weil die Anzahl n der Charakteristiken T_γ gleich der Anzahl der verschiedenen Systeme der Wurzeln $\sqrt{P_\varkappa}$ ist. Ist also

$$(3.)\quad z_S^{(\gamma)} = \sum_\varkappa \binom{P_\varkappa}{S} P_\varkappa^{(\gamma)} x_{SP_\varkappa},$$

so ist

$$(4.)\quad F[x_R] = \prod_\gamma G[z_S^{(\gamma)}]$$

oder

$$(5.)\quad F[x_R] = \mathrm{P}\, G\Big[\sum_\varkappa \binom{P_\varkappa}{S} \sqrt{P_\varkappa}\, x_{SP_\varkappa}\Big],$$

wo R alle Lösungen der Congruenzen (1.) durchläuft, S nur die (mod. $\mathfrak{P}$) verschiedenen, diese aber so gewählt, dass sie ein vollständiges System bilden.

Wir haben oben vorausgesetzt, dass die Gruppe $\mathfrak{P}$ gegeben ist, und dazu das vollständige System $A\mathfrak{U}$ bestimmt. Jetzt sei umgekehrt irgend ein System von Charakteristiken gegeben, und die Aufgabe gestellt, zu untersuchen, ob sich die entsprechende Function $F[x_R]$ mittelst der Formel (5.) in Factoren zerlegen lasse. Man ergänze das gegebene System durch Hinzufügung aller wesentlichen Combinationen seiner Charakteristiken zu einem vollständigen System und bilde die demselben entsprechende Gruppe $\mathfrak{H}$. (*U.* § 1). Ist γ der Rang und $H_1, \dots H_\gamma$ eine Basis von $\mathfrak{H}$, so kommt es darauf an, Charakteristiken $P_1, \dots P_\nu$ zu bestimmen, die von einander unabhängig sind, und unter sich und mit allen Charakteristiken von $\mathfrak{H}$ syzygetisch sind. Ist α der Rang der syzygetischen Untergruppe von $\mathfrak{H}$ (*U.* § 1) und $P_1, \dots P_\alpha$ eine Basis derselben, so genügen zunächst diese Charakteristiken der gestellten Bedingung. Ferner haben die γ unabhängigen Congruenzen

$$|X, H_\lambda| \equiv 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \dots \gamma)$$

$2^{2\varrho-\gamma}$ Lösungen, unter denen sich die 2^α Combinationen von $P_1, \dots P_\alpha$ befinden. Ist $2\varrho-\gamma-\alpha > 0$, so sei $P_{\alpha+1}$ irgend eine der $2^{2\varrho-\gamma}-2^\alpha$ übrigen Lösungen. Dann sind die $\gamma+1$ Congruenzen

$$|X, H_\lambda| \equiv 0,\quad |X, P_{\alpha+1}| \equiv 0$$

unabhängig und haben daher $2^{2\varrho-\gamma-1}$ Lösungen, unter denen sich die $2^{\alpha+1}$ Combinationen von $P_1, \dots P_\alpha, P_{\alpha+1}$ befinden. Ist also $2\varrho-\gamma-\alpha > 2$, so haben sie noch $2^{2\varrho-\gamma-1}-2^{\alpha+1}$ weitere Lösungen, von denen man irgend eine für $P_{\alpha+2}$ wähle. Indem man so fortfährt, erhält man, da nach *U.* § 1, I die Zahl $\alpha+\gamma$ gerade ist, $\nu = \alpha+\frac{1}{2}(2\varrho-\gamma-\alpha)$ Charakteristiken $P_1, \dots P_\nu$, die allen

Bedingungen genügen. Aus dieser Betrachtung folgt: R durchlaufe ein System von Charakteristiken, unter denen sich $\gamma+1$ wesentlich unabhängige befinden. Sei α der Rang der syzygetischen Untergruppe der aus allen Summen einer geraden Anzahl der gegebenen Charakteristiken gebildeten Gruppe. Dann ist $F[x_R]$ die $2^{\varrho-\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)}$te Potenz einer Function, die in 2^{α} Factoren desselben Grades zerfällt*).

*) Im vorigen Bande dieses Journals habe ich eine Abhandlung *„Ueber die principale Transformation der Thetafunctionen mehrerer Variabeln"* veröffentlicht. Ich benutze hier die Gelegenheit, um nachträglich auf eine Arbeit des Herrn *Wiltheiss* *„Ueber die complexe Multiplication hyperelliptischer Functionen zweier Argumente"* aufmerksam zu machen, die im 21. Bande der Mathematischen Annalen während des Druckes meiner Abhandlung erschienen ist, und in welcher für den Fall zweier Variabeln einige der Resultate durch directe Rechnung erhalten sind, die ich dort für den Fall von beliebig vielen Variabeln abgeleitet habe. Indessen ist es dem Verfasser entgangen, dass in allen Fällen die absoluten Werthe von M_1 und M_2 gleich $\sqrt{\varkappa}$ sein müssen.

Zürich, Mai 1883.

Ueber die Irreductibilität der linearen Differentialgleichungen.

(Von Herrn *Leo Königsberger* in Wien.)

Bekanntlich hat zuerst Herr *Frobenius* im 74ten Bande dieses Journals die Definition für die Irreductibilität einer homogenen linearen Differentialgleichung aufgestellt und derartige Differentialgleichungen irreductibel genannt, wenn sie nicht mit einer homogenen linearen Differentialgleichung von niederer Ordnung und gleichartigen Coëfficienten*) ein Integral gemein haben; ich habe eine beliebige algebraische Differentialgleichung als eine irreductible definirt, wenn sie weder in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten in algebraischem Sinne reductibel ist, noch mit einer Differentialgleichung niederer Ordnung und von demselben Charakter (in Bezug auf die Coefficienten der abhängigen Variabeln und deren Ableitungen) ein Integral gemein hat**). Nach dieser letzteren Definition würde somit eine homogene lineare Differentialgleichung

$$\frac{d^m y}{dx^m}+p_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+p_2\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}+\cdots+p_m y = 0,$$

in welcher $p_1, p_2, \dots p_m$ algebraische Functionen von x bedeuten, dann als eine irreductible zu bezeichnen sein, wenn sie mit keiner algebraischen Differentialgleichung von niederer Ordnung und gleichartigen Coefficienten ein Integral gemein hat, und es wird somit die lineare Differentialgleichung im *Frobenius*schen Sinne irreductibel sein können, während sie nach der von mir gegebenen Definition reductibel ist. Es ist nun wesentlich festzustellen, ob oder wann die beiden Definitionen für homogene lineare Differentialgleichungen zusammenfallen, und es werden sich aus dieser Unter-

---

*) Die Definition erstreckt sich nicht bloss auf lineare Differentialgleichungen mit *algebraischen* Coefficienten.

**) Vergl. meine „Allgem. Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen" *Teubner* 1882.

suchung charakteristische Eigenschaften der linearen Differentialgleichungen ergeben, welche durch verschiedenartige Methoden ermittelt werden sollen.

Ich habe bereits in meinen oben angeführten „Allgemeinen Untersuchungen“ nachgewiesen, dass, wenn eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung ein nicht algebraisches Integral gemein hat, diese letztere entweder selbst eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung ist und, wenn diese nicht homogen, zugleich eine andere lineare homogene Differentialgleichung erster Ordnung nach sich zieht, welche ein algebraisches Integral erster Ordnung der vorgelegten Differentialgleichung zweiter Ordnung darstellt, oder in dem einzig möglichen Ausnahmefalle, in welchem zwei Fundamentalintegrale dieser Differentialgleichung in einer algebraischen Beziehung zu einander stehen, jedenfalls zwei Fundamentalintegrale existiren, welche linearen homogenen Differentialgleichungen erster Ordnung Genüge leisten und daher nach bekannten Sätzen zwei algebraische Integrale erster Ordnung der gegebenen Differentialgleichung bilden, während die nicht lineare Differentialgleichung erster Ordnung, welcher das gemeinsame Integral angehört, durch eine algebraische Substitution aus einer homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung abgeleitet ist*). Das Wesent-

---

*) Es braucht kaum hinzugefügt zu werden, dass für den Fall, wenn keine algebraische Beziehung zwischen zwei Fundamentalintegralen existirt, nicht etwa *zwei* Integrale existiren müssen, welche linearen *homogenen* oder überhaupt nur linearen *algebraischen* Differentialgleichungen genügen müssen, wie schon aus bekannten allgemeinen Principien hervorgeht, für Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_1 \frac{dy}{dx} + p_2 y = 0$$

aber schon aus der Relation

$$y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx} = ce^{-\int p_1 dx}$$

ersichtlich ist, welche, wenn y_1 der homogenen linearen Differentialgleichung

$$\frac{dy_1}{dx} = y_1 f$$

genügt, für y_2 die lineare Differentialgleichung

$$\frac{dy_2}{dx} - f.y_2 = xe^{-\int (p+f)dx}$$

liefert. Es mag ferner noch bemerkt werden, dass, wenn die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung ein algebraisches Integral

$$y_1 = F$$

besitzt — welcher Fall in den oben angeführten Auseinandersetzungen ausgeschlossen war — wiederum aus der eben benutzten Relation

liche dieses Satzes besteht darin, ***dass nicht algebraische Integrale linearer homogener Differentialgleichungen zweiter Ordnung**), *wenn sie überhaupt algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung angehören, entweder selbst linearen Differentialgleichungen erster Ordnung genügen, oder dass wenigstens zwei Fundamentalintegrale existiren, welche als Integrale wiederum linearen homogenen Differentialgleichungen erster Ordnung angehören*** — dass also für lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung die von Herrn *Frobenius* gegebene Definition der Irreductibilität mit der meinigen zusammenfällt, indem die Bedingung, kein Integral mit einer homogenen linearen Differentialgleichung gemein zu haben, keine grössere Beschränkung involvirt als die Bedingung, überhaupt mit keiner algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung ein Integral gemein zu haben. Den Gegenstand der vorliegenden Untersuchung bildet nun die Frage, ob auch für lineare homogene Differentialgleichungen höherer Ordnung die beiden Irreductibilitätsdefinitionen zusammenfallen, und da sich ein solches Zusammenfallen — und zwar auch nur unter Beschränkungen — im Allgemeinen nur in Beziehung zu Differentialgleichungen erster Ordnung ergeben wird, die Bedingungen zu ermitteln, unter denen die eine Irreductibilitätsdefinition den linearen homogenen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung keine grössere Beschränkung auferlegt als die andere.

Bevor ich nun die Untersuchung in ihrer ganzen Allgemeinheit darstelle, will ich noch einige Bemerkungen über verschiedene Methoden vorausschicken, die man zur Beantwortung dieser Fragen anwenden kann, und die ich an den linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung erläutern will. Sei die vorgelegte Differentialgleichung

$$(1.)\qquad y''+p_1y'+p_2y = 0,$$

$$\frac{dy_2}{dx}-y_2\cdot\frac{F'}{F} = \frac{ce^{-\int p_1dx}}{F}$$

folgt, somit ein zu y_1 gehöriges Fundamentalintegral im Allgemeinen keiner algebraischen linearen Differentialgleichung erster Ordnung mehr genügt; für die Normalform der Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p_2y = 0$$

wäre dies freilich der Fall.

*) Die Uebertragung auf *nicht homogene* lineare Differentialgleichungen ändert nichts in diesem sowie in den folgenden Sätzen, und es wird nur der Einfachheit der Darstellung wegen im Folgenden stets die Homogeneität der linearen Differentialgleichungen vorausgesetzt.

und habe diese mit einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung

$$(2.)\qquad y' = F(x, y),$$

in welcher F eine algebraische Function bedeutet, ein nicht algebraisches Integral y_1 gemein, so muss wegen

$$y_1'' = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y_1} F$$

nach (1.) die Gleichung

$$(3.)\qquad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y_1} F + p_1 F + p_2 y_1 = 0$$

erfüllt sein, und zwar, da das gemeinsame Integral y_1 sich der Voraussetzung gemäss hieraus nicht als algebraische Function von x ergeben darf, identisch für alle x und y_1, und es wird daher $F(x, y_1)$ als algebraisches Integral der partiellen Differentialgleichung (3.) definirt sein — umgekehrt ist aber auch sogleich ersichtlich, dass für jedes algebraische Integral $F(x, y_1)$ der partiellen Differentialgleichung (3.) die mit diesem gebildete Differentialgleichung erster Ordnung (2.) wegen

$$y_1'' = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y_1} F = -p_1 F - p_2 y_1 = -p_1 y_1' - p_2 y_1$$

ein mit der Differentialgleichung (1.) gemeinsames Integral liefert. Um daher nachzuweisen, dass die Differentialgleichung (1.) im Allgemeinen nur dann mit (2.) ein nicht algebraisches Integral gemein haben kann, wenn F eine in y lineare Function ist, wird nur zu zeigen sein, dass die partielle Differentialgleichung (3.) im Allgemeinen — die Fälle sind in dem oben ausgesprochenen Satze aus einander gehalten — entweder gar kein algebraisches Integral ausser einem in y linearen besitzt, oder, wenn dies der Fall ist, die zugehörige Differentialgleichung erster Ordnung (2.) nur algebraische Functionen von x zu Integralen hat. Nehmen wir zuerst an, es könnte die Differentialgleichung (3.) eine in y ganze Function als particuläres Integral besitzen

$$(4.)\qquad F(x, y) = A_0 y^m + A_1 y^{m-1} + \cdots + A_m,$$

worin $A_0, A_1, \ldots A_m$ algebraische Functionen von x bedeuten, so würde nach (3.)

$$\frac{dA_0}{dx} y^m + \frac{dA_1}{dx} y^{m-1} + \cdots + [m A_0 y^{m-1} + (m-1) A_1 y^{m-2} + \cdots][A_0 y^m + A_1 y^{m-1} + \cdots]$$
$$+ p_1 (A_0 y^m + A_1 y^{m-1} + \cdots) + p_2 y = 0$$

für alle x und y identisch befriedigt werden müssen, und da die höchste Potenz von y allein in dem Posten $mA_0^2y^{2m-1}$ vorkommt, aber weder m noch A_0 verschwinden können, so wird $2m-1=m$, also $m=1$ sein müssen und daher

$$F(x,y) = A_0y+A_1$$

eine in y lineare Function, welche die Differentialgleichung (2.) in

$$y' = A_0y+A_1$$

überführt. Sei nun $F(x,y)$ als ein in y rationales Integral jener partiellen Differentialgleichung in der Form vorausgesetzt

$$(5.) \qquad F(x,y) = \frac{A_0y^m+A_1y^{m-1}+\cdots+A_m}{B_0y^n+B_1y^{n-1}+\cdots+B_n},$$

worin $A_0, \ldots A_m, B_0, \ldots B_n$ algebraische Functionen von x bedeuten, so giebt der Ausdruck (5.) in (3.) eingesetzt die in x und y identisch zu erfüllende Gleichung

$$\begin{gathered}\left[(B_0y^n+\cdots)\left(\frac{dA_0}{dx}y^m+\cdots\right)-(A_0y^m+\cdots)\left(\frac{dB_0}{dx}y^n+\cdots\right)\right][B_0y^n+\cdots]\\+[(B_0y^n+\cdots)(mA_0y^{m-1}+\cdots)-(A_0y^m+\cdots)(nB_0y^{n-1}+\cdots)](A_0y^m+\cdots)\\+p_1(A_0y^m+\cdots)(B_0y^n+\cdots)^2+p_2y(B_0y^n+\cdots)^3 = 0.\end{gathered}$$

Unterscheiden wir nun die drei Fälle, je nachdem $m>n$, $m<n$ und $m=n$ ist.

I. Sei $m>n$, oder $m=n+\alpha$, so werden die vier höchsten Potenzen der vier Posten der letzten Gleichung

$$\left(B_0\frac{dA_0}{dx}-A_0\frac{dB_0}{dx}\right)B_0y^{3n+\alpha},\ (m-n)A_0^2B_0y^{3n+2\alpha-1},\ p_1A_0B_0^2y^{3n+\alpha},\ p_2B_0^3y^{3n+1}$$

sein, und es wird somit, 1) wenn $\alpha>1$ ist, der zweite Posten den höchsten Grad liefern, also

$$(m-n)A_0^2B_0 = 0$$

sein müssen, was nicht angeht, da $m>n$ und A_0, B_0 von Null verschieden sind; 2) wenn $\alpha=1$ ist, der Grad aller vier Posten derselbe sein, und daher der gemeinsame Coefficient von y^{3n+1}

$$\left(B_0\frac{dA_0}{dx}-A_0\frac{dB_0}{dx}\right)B_0+(m-n)A_0^2B_0+p_1A_0B_0^2+p_2B_0^3 = 0,$$

oder da $m=n+1$ ist,

$$\frac{d\left(\frac{A_0}{B_0}\right)}{dx}+\left(\frac{A_0}{B_0}\right)^2+p_1\left(\frac{A_0}{B_0}\right)+p_2 = 0,$$

d. h. es würde die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dz}{dx}+z^2+p_1 z+p_2 = 0$$

das algebraische Integral $z=\frac{A_0}{B_0}$, oder, wie aus der Substitution

$$z = \frac{d\log y}{dx}$$

hervorgeht, es würde die Differentialgleichung

$$y''+p_1 y'+p_2 y = 0$$

das Integral

$$y = e^{\int \frac{A_0}{B_0} dx}$$

besitzen, also, wie nachgewiesen werden sollte, die homogene lineare Differentialgleichung

$$y' = y\frac{A_0}{B_0}$$

zum algebraischen Integrale erster Ordnung haben.

II. Ist $m<n$, also $n=m+\alpha$, so werden die vier höchsten Glieder die Form haben

$$\left(B_0\frac{dA_0}{dx}-A_0\frac{dB_0}{dx}\right)B_0 y^{3m+2\alpha},\ (m-n)A_0^2 B_0 y^{3m+\alpha-1},\ p_1 A_0 B_0^2 y^{3m+2\alpha},\ p_2 B_0^3 y^{3m+3\alpha+1};$$

da aber das letzte Glied die höchste y-Potenz liefert, so müsste $p_2=0$ sein, d. h. die Differentialgleichung zweiter Ordnung die Form haben

$$y''+p_1 y' = 0,$$

welche das algebraische Integral erster Ordnung $y_1'=0$ oder $y_1=c$ besitzt, während jedes dazu gehörige Fundamentalintegral durch den Ausdruck

$$y_2 = \varkappa\int e^{-\int p_1 dx}dx$$

bestimmt ist, also das allgemeine Integral die Form hat

$$y = c_1+c_2\int e^{-\int p_1 dx}dx;$$

dann würde aber nach (2.) die Beziehung bestehen

$$\int e^{-\int p_1 dx}dx = \varphi\left(x,\ e^{-\int p_1 dx}\right),$$

worin φ eine algebraische Function bedeutet, und da ich in meinen „Allgemeinen Untersuchungen" S. 15 gezeigt habe, dass eine solche Beziehung nur eine lineare sein kann, so wird auch zwischen y und y' eine lineare Beziehung bestehen müssen, was grade gezeigt werden sollte.

III. Ist endlich $m = n$, so lauten die vier höchsten Glieder

$$\left(B_0 \frac{dA_0}{dx} - A_0 \frac{dB_0}{dx}\right) B_0 y^{3m},\ 0.y^{3m-1},\ p_1 A_0 B_0^2 y^{3m},\ p_2 B_0^3 y^{3m+1},$$

woraus wiederum $p_2 = 0$ folgt, so dass also die Schlüsse des zweiten Falles unverändert bleiben. Wir finden somit durch diese einfachen, wie wir nachher sehen werden, auf höhere Differentialgleichungen übertragbaren Schlüsse, ***dass eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung***

$$y' = F(x, y),$$

in welcher F eine rationale Function von y bedeutet, nur dann ein nicht algebraisches Integral gemein haben kann, wenn F eine ganze lineare Function von y ist.

Aber wir wollen die Untersuchung der linearen homogenen Differentialgleichung auch noch für andere algebraische Formen der F-Function als rationale durchführen und uns für die verschiedenen Formen stets anderer Methoden bedienen, die wieder in speciellen Untersuchungen für Differentialgleichungen höherer Ordnung Anwendung finden. Vor allem ist leicht einzusehen, dass F nicht die Lösung einer mit Adjungirung von y irreductibeln algebraischen Gleichung

$$(6.)\qquad F^n = f$$

sein kann, worin f eine x algebraisch enthaltende rationale Function von y bedeutet; denn durch Einsetzen dieses Werthes in die partielle Differentialgleichung (3.) folgt

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} F + np_1 f + np_2 y F^{n-1} = 0,$$

welche Gleichung, da f und dessen Ableitungen rationale Functionen von x und y sind, vermöge der Irreductibilität von (6.) für den Fall, dass $n > 2$, ***die nach dem Früheren auszuschliessende Bedingung $p_2 = 0$ nach sich zieht,*** und es bleibt somit, um überhaupt die Möglichkeit von (6.) festzustellen, nur noch der Fall $n = 2$ zu untersuchen übrig, für den sich aus der letzten Gleichung die beiden identisch zu befriedigenden Gleichungen ergeben

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2p_2 y,\ \frac{\partial f}{\partial x} = -2p_1 f,$$

von denen die erste

$$f = -p_2 y^2 + r,$$

und hiernach die zweite

$$y^2\frac{dp_2}{dx}-\frac{dr}{dx} = 2p_1(-p_2y^2+r)$$

liefert, welche wiederum, da sie identisch durch alle x und y erfüllt sein muss, die Beziehungen giebt

$$\frac{dp_2}{dx} = -2p_1p_2,\ \frac{dr}{dx} = -2p_1r;$$

aber die mit Hülfe der ersten Relation umgeformte Differentialgleichung (1.)

$$y''-\tfrac{1}{2}\frac{p_2'}{p_2}y'+p_2y = 0$$

hat, wie man unmittelbar sieht, ein Integral von der Gestalt

$$y = e^{i\int\sqrt{p_2}dx}$$

und *besitzt daher wiederum ein algebraisches Integral erster Ordnung*

$$y' = iy\sqrt{p_2},$$

was zu erweisen war. Ebenso einfach ist die Discussion für den Fall, dass in der die algebraische Function F definirenden irreductibeln algebraischen Gleichung die beiden auf das höchste folgenden Glieder fehlen, also F durch die Gleichung definirt ist

$$(7.)\qquad F^n+f_3F^{n-3}+f_4F^{n-4}+\cdots+f_n = 0,$$

indem die partielle Differentialgleichung die Form annimmt

$$\frac{\partial f_3}{\partial x}F^{n-3}+\cdots+\Big(\frac{\partial f_3}{\partial y}F^{n-3}+\cdots\Big)F-(p_1F+p_2y)(nF^{n-1}+(n-3)f_3F^{n-4}+\cdots) = 0$$

oder

$$p_1nF^n+p_2nyF^{n-1}+\cdots = 0,$$

welche wegen (7.) $p_2 = 0$, *also wieder die Existenz eines algebraischen homogenen linearen Integrales erster Ordnung nach sich zieht.* Schwieriger gestaltet sich nach dieser Methode die Untersuchung für den Fall, in welchem die die Function definirende irreductible algebraische Gleichung alle Glieder enthält, und es mag genügen, an dieser Stelle zu bemerken, dass, wenn F die irreductible Gleichung

$$(8.)\qquad F^n+f_1F^{n-1}+f_2F^{n-2}+\cdots+f_n = 0$$

befriedigt, offenbar alle Lösungen dieser Gleichung der partiellen Differentialgleichung genügen werden, und dass daher, wenn man (3.) mit F^λ multiplicirt, statt F der Reihe nach die Lösungen F_1, F_2, ... F_n der Gleichung (8.) setzt und alle Gleichungen addirt, sich mit Anwendung der bekannten

Bezeichnung für die Potenzsummen einer algebraischen Gleichung das System der zu discutirenden Gleichungen ergiebt

$$\frac{1}{\lambda+1}\frac{\partial s_{\lambda+1}}{\partial x}+\frac{1}{\lambda+2}\frac{\partial s_{\lambda+2}}{\partial y}+p_1 s_{\lambda+1}+p_2 y s_\lambda = 0$$

für $\lambda = 0, 1, 2, \dots n-1$.

Die hier für die Zusammenstellung einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung befolgte Methode kann auch für ähnliche Untersuchungen bei Differentialgleichungen höherer Ordnung verwendet werden, und wir wollen, um eine Anwendung hiervon zu geben, die Frage aufwerfen, ob eine lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung

$$(9.)\qquad y'''+p_1y''+p_2y'+p_3y = 0$$

mit einer algebraischen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(10.)\qquad y'' = F(x, y, y'),$$

in welcher F eine ganze Function der in der Klammer enthaltenen Grössen y und y' bedeutet, ein Integral gemein haben kann, das nicht schon einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung angehört. Da aus (10.) durch Differentiation

$$y''' = \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'+\frac{\partial F}{\partial y'}F$$

folgt, so wird vermöge (9.) und der für das gemeinsame Integral gemachten Voraussetzung die Gleichung

$$(11.)\qquad \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'+\frac{\partial F}{\partial y'}F+p_1F+p_2y'+p_3y = 0$$

für alle x, y, y' identisch zu erfüllen sein; wird nun die in ihren Argumenten ganze Function F in die Form gesetzt

$$F(x, y, y') = B_0(x, y')y^\gamma+B_1(x, y')y^{\gamma-1}+\cdots+B_\gamma(x, y'),$$

so folgt aus (11.)

$$\frac{\partial B_0}{\partial x}y^\gamma+\cdots+(\gamma B_0y^{\gamma-1}+\cdots)y'+\left(\frac{\partial B_0}{\partial y'}y^\gamma+\cdots\right)(B_0y^\gamma+\cdots)+p_1(B_0y^\gamma+\cdots)+p_2y'+p_3y = 0$$

und somit wegen der Identität der Gleichung

$$\frac{\partial B_0}{\partial y'} = 0,\quad \frac{\partial B_1}{\partial y'} = 0,\ \cdots\ \frac{\partial B_{\gamma-1}}{\partial y'} = 0,$$

d. h. $B_0, B_1, \dots B_{\gamma-1}$ von y' unabhängig, während der Coefficient von y^γ die Beziehung liefert

$$\frac{\partial B_0}{\partial x}+B_0\frac{\partial B_\gamma}{\partial y'}+p_1 B_0+\varepsilon p_3 = 0,$$

worin $\varepsilon = 1$, wenn $\gamma = 1$, sonst $= 0$ ist; daraus folgt aber, dass $\frac{\partial B_\gamma}{\partial y'}$ von y' unabhängig, also

$$B_\gamma = Ay'+B$$

ist, worin A und B algebraische Functionen von x bedeuten, und dass F die Gestalt annimmt

$$F(x, y, y') = B_0(x)y^\gamma+B_1(x)y^{\gamma-1}+\cdots+B_{\gamma-1}(x)y+Ay'+B,$$

welcher Ausdruck wiederum in (11.) eingesetzt die Beziehung liefert

$$y'\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dx}+\frac{dB_0}{dx}y^\gamma+\cdots+(\gamma B_0 y^{\gamma-1}+\cdots)y'+A(Ay'+B+B_0y^\gamma+\cdots)$$
$$+p_1(Ay'+B+B_0y^\gamma+\cdots)+p_2y'+p_3y = 0;$$

da aber die Gleichung eine identische, also, wenn $\gamma > 1$, $\gamma B_0 = 0$ sein müsste, so folgt $\gamma = 1$, also

$$F(x, y, y') = Ay'+B_0y+B,$$

worin A, B_0, B algebraische Functionen von x bedeuten, und wir erhalten den Satz, ***dass, wenn eine homogene lineare Differentialgleichung dritter Ordnung mit einer algebraischen Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche die zweite Ableitung als ganze Function der abhängigen Variabeln und deren erster Ableitung definirt, ein Integral gemein hat, welches nicht schon einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung angehört, die Differentialgleichung zweiter Ordnung eine homogene lineare sein muss.***

Es ist leicht zu sehen, wie man mit Hülfe ähnlicher Schlüsse diese Betrachtungen auf Differentialgleichungen beliebiger Ordnung erweitern kann.

Nachdem wir gezeigt, wie man in gegebenen Fällen die Frage, die wir am Anfange der Arbeit aufgeworfen, beantworten kann, wollen wir nunmehr die Untersuchung ganz allgemein angreifen und nach den Bedingungen fragen, unter denen eine lineare homogene Differentialgleichung m^{ter} Ordnung

$$(12.)\qquad y^{(m)}+p_1y^{(m-1)}+p_2y^{(m-2)}+\cdots+p_my = 0$$

ein Integral y_1 mit einer algebraischen Differentialgleichung niederer, der μ^{ten}, Ordnung

$$(13.)\qquad f(x, Y, Y', \ldots Y^{(\mu)}) = 0$$

gemein habe, wenn $p_1, p_2, \ldots p_m$ entweder rationale Functionen von x oder

aus solchen Irrationalitäten von x rational zusammengesetzt sind, wie sie in rationaler Form in den Coefficienten der rational gemachten und in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten als irreductibel vorausgesetzten Gleichung enthalten sind, und ferner das gemeinsame Integral y_1 nicht schon einer Differentialgleichung von niederer Ordnung als der μ^{ten} angehört, für welche die Coefficienten der in der abhängigen Variabeln und deren Ableitungen rational gemachten Gleichung rational aus den Irrationalitäten in x zusammengesetzt sind, die in $p_1, \dots p_m$ enthalten sind. Da nach bekannten Sätzen*) unter den gemachten Voraussetzungen sämmtliche Integrale der Differentialgleichung (13.) auch der Gleichung (12.) genügen, so wird, wenn $y_2, y_3, \dots y_m$ $m-1$ Integrale von (12.) bezeichnen, welche mit y_1 zusammen ein Fundamentalsystem bilden, das allgemeine Integral von (13.) die Form haben müssen

$$(14.)\qquad Y = R_1 y_1 + R_2 y_2 + \cdots + R_m y_m,$$

worin $R_1, R_2, \dots R_m$ bestimmte Functionen von μ willkürlichen Constanten $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_\mu$ sein werden. Greifen wir nunmehr m willkürliche Integrale von (13.) heraus

$$(15.)\qquad \begin{cases} Y_1 = R_{11} y_1 + R_{12} y_2 + \cdots + R_{1m} y_m \\ Y_2 = R_{21} y_1 + R_{22} y_2 + \cdots + R_{2m} y_m \\ \dots\dots\dots\dots \\ Y_m = R_{m1} y_1 + R_{m2} y_2 + \cdots + R_{mm} y_m, \end{cases}$$

so kann entweder die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1m} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ R_{m1} & R_{m2} & \dots & R_{mm} \end{vmatrix}$$

verschwinden oder nicht; verschwindet dieselbe, so könnte man im Allgemeinen ein anderes System von particulären Integralen der Differentialgleichung (13.) herausgreifen, für welches die Determinante D nicht Null ist, vorausgesetzt, dass dies überhaupt möglich ist — was offenbar nicht zu sein braucht, wie man schon aus der Annahme erkennt, dass die Gleichung (13.) eine homogene lineare ist, in welchem Falle je m Integrale in einer homogenen linearen Relation stehen — und es werden somit nur die

*) Siehe „Allgemeine Untersuchungen etc.“ §1.

beiden Fälle zu betrachten sein, in welchen D nicht verschwindet, oder diese Determinante Null wird für jede willkürliche Wahl von m particulären Integralen. Bleiben wir zuerst bei der zweiten Annahme stehen, so würde offenbar, wenn $D^{(m-1)}$ Unterdeterminanten der $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung von D bezeichnen,

$$D_1^{(m-1)} Y_1 + D_2^{(m-1)} Y_2 + \cdots + D_m^{(m-1)} Y_m = 0$$

sein, und somit eine homogene lineare Relation zwischen $Y_1, Y_2, \ldots Y_m$ bestehen, wenn nicht etwa *alle* Unterdeterminanten $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung verschwinden; multipliciren wir dann die $m-1$ ersten Gleichungen des Systemes (15.) mit den zur ersten Verticalreihe der Determinante

$$\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & \ldots & R_{1\,m-1} \\ R_{21} & R_{22} & \ldots & R_{2\,m-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ R_{m-1\,1} & R_{m-1\,2} & \ldots & R_{m-1\,m-1} \end{vmatrix}$$

gehörigen Unterdeterminanten $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung $D_1^{(m-2)}, D_2^{(m-2)}, \ldots D_{m-1}^{(m-2)}$, so werden bei der Addition der $m-1$ Gleichungen alle Verticalreihen der rechten Seite Null werden, da die erste eine Unterdeterminante $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung ist, welche der Annahme nach verschwindet, die folgenden $m-2$ Verticalreihen vermöge bekannter Identitäten Null werden, und die letzte Verticalreihe $R_{1m}, R_{2m}, \ldots R_{m-1\,m}$ mit den Unterdeterminanten $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung nach der ersten Verticalreihe multiplicirt enthält, also die Unterdeterminante $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\begin{vmatrix} R_{12} & R_{13} & \ldots & R_{1m} \\ R_{22} & R_{23} & \ldots & R_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ R_{m-1\,2} & R_{m-1\,3} & \ldots & R_{m-1\,m} \end{vmatrix}$$

repräsentirt, welche wiederum der Annahme nach verschwindet; es ist daher

$$D_1^{(m-2)} Y_1 + D_2^{(m-2)} Y_2 + \cdots + D_{m-1}^{(m-2)} Y_{m-1} = 0,$$

also eine lineare homogene Relation zwischen $Y_1, Y_2, \ldots Y_{m-1}$ und zwar für je $m-1$ der m Integrale $Y_1, Y_2, \ldots Y_m$. Solche Relationen würden nur dann wieder nicht existiren, wenn alle Unterdeterminanten $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung verschwinden, in welchem Falle ähnlich wie oben

$$D_1^{(m-3)} Y_1 + D_2^{(m-3)} Y_2 + \cdots + D_{m-2}^{(m-3)} Y_{m-2} = 0$$

sich ergeben würde, und schliessen wir so weiter, so würde unter der An-

nahme, dass alle Unterdeterminanten von D bis zur zweiten Ordnung hin verschwinden, endlich eine Relation von der Form

$$D_1^{(1)} Y_1 + D_2^{(1)} Y_2 = 0$$

folgen, welche nicht stets identisch befriedigt sein kann, weil nicht alle Elemente der Determinante D verschwinden — wir können daher behaupten, dass, wenn die Determinante des Systemes (15.) verschwindet, jedenfalls zwischen m oder weniger particulären Integralen von (13.) eine homogene lineare Relation stattfindet, oder anders ausgedrückt, indem wir für eines der Y das allgemeine Integral von (13.) wählen können, dass das allgemeine Integral durch $m-1$ oder weniger particuläre Integrale homogen und linear mit constanten Coefficienten ausgedrückt werden kann. Ist die Determinante D jedoch von Null verschieden, dann liefert das System (15.) $y_1, y_2, \dots y_m$ homogen und linear durch $Y_1, Y_2, \dots Y_m$ ausgedrückt, und wir erhalten somit durch Einsetzen dieser Werthe in (14.) das allgemeine Integral Y der Differentialgleichung (13.) homogen und linear durch die m particulären Integrale $Y_1, Y_2, \dots Y_m$ dargestellt; es folgt daher in allen Fällen der nachstehende Satz:

Hat eine homogene lineare Differentialgleichung m^{ter} Ordnung mit einer algebraischen Differentialgleichung niederer Ordnung ein Integral gemein, das nicht schon einer gleichartigen Differentialgleichung noch niederer Ordnung angehört, so lässt sich das allgemeine Integral dieser algebraischen Differentialgleichung homogen und linear durch m particuläre Integrale derselben in der Form ausdrücken

$$Y = S_1 Y_1 + S_2 Y_2 + \cdots + S_m Y_m,$$

worin $S_1, S_2, \dots S_m$ Functionen von so viel Constanten bedeuten, als die Ordnung der Differentialgleichung anzeigt, welche auch zum Theil verschwinden können.

So hat z. B. die lineare Differentialgleichung

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

mit der Differentialgleichung erster Ordnung

$$Y'^2 - (4Y+1)Y' + Y(4Y+1) = 0$$

das Integral

$$y_1 = e^x + e^{2x}$$

gemein, daher muss sich das allgemeine Integral der letzteren durch zwei

oder eines seiner particulären Integrale ausdrücken lassen; in der That ist das allgemeine Integral

$$Y = ce^x + c^2 e^{2x},$$

und es besteht daher, wenn Y_1 und Y_2 zwei den Constanten c_1 und c_2 entsprechende particuläre Integrale bedeuten, zwischen dem allgemeinen und den beiden particulären Integralen die Beziehung

$$\begin{vmatrix} Y & c & c^2 \\ Y_1 & c_1 & c_1^2 \\ Y_2 & c_2 & c_2^2 \end{vmatrix} = 0;$$

zur Vorbereitung für das Folgende mag noch erwähnt werden, dass die Differentialgleichung erster Ordnung und zweiten Grades durch die algebraische Substitution

$$Y = z + z^2$$

in eine reductible Gleichung in z und z' übergeht, von welcher ein Factor gleich Null gesetzt die homogene lineare Differentialgleichung

$$z' - z = 0$$

liefert.

Mit Hülfe des eben bewiesenen Satzes können wir aber schon in der Beantwortung der Frage, welche den Gegenstand der vorliegenden Arbeit bildet, einen Schritt weiter gehen, indem wir eine Vergleichung der beiden Irreductibilitätsdefinitionen für den Fall anstellen, dass eine lineare homogene Differentialgleichung m^{ter} Ordnung

$$(16.) \quad y^{(m)} + p_1 y^{(m-1)} + \cdots + p_m y = 0$$

ein nicht algebraisches Integral mit einer Differentialgleichung erster Ordnung

$$(17.) \quad y' = f(x, y)$$

gemein hat, welche wir in Bezug auf y' als algebraisch irreductibel mit Adjungirung von x und y voraussetzen dürfen. Nach dem oben bewiesenen Satze muss dann nämlich das allgemeine Integral von (17.) durch m particuläre Integrale in der Form ausdrückbar sein

$$(18.) \quad y = R_1 y_1 + R_2 y_2 + \cdots + R_m y_m,$$

worin $R_1, R_2, \ldots R_m$ Functionen einer willkürlichen Constanten c bedeuten, die auch zum Theil verschwinden können; nun habe ich aber früher*) nach-

*) S. meine Arbeit „Ueber die einer beliebigen Differentialgleichung erster Ordnung angehörigen selbständigen Transcendenten" Band 3 der Acta mathematica.

gewiesen, dass unter allen algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung nur die in der Form

$$(19.)\quad y' = \varphi_0(x)+\varphi_1(x)y+\varphi_2(x)y^2$$

enthaltenen und die aus diesen durch algebraische Substitution abgeleiteten die Eigenschaft besitzen, dass sich ihr allgemeines Integral als eine algebraische Function einer bestimmten Anzahl particulärer Integrale ausdrücken lässt, und zwar galt für alle Differentialgleichungen der Form (19.) die Beziehung

$$\begin{vmatrix} y & cy & 1 & c \\ y_1 & c_1y_1 & 1 & c_1 \\ y_2 & c_2y_2 & 1 & c_2 \\ y_3 & c_3y_3 & 1 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{oder} \quad y = \frac{c_3y_1(y_2-y_3)+cy_2(y_3-y_1)}{c_3(y_2-y_3)+c(y_3-y_1)},$$

und es bleibt somit nur zu untersuchen übrig, in welchen Fällen die lineare Differentialgleichung (16.) mit der Differentialgleichung (19.) oder einer durch algebraische Substitution aus dieser hergeleiteten ein nicht algebraisches Integral gemein haben kann. Nun folgt aber aus (19.) durch Differentiation unmittelbar

$$\begin{aligned} y'' &= \psi_0+\psi_1y+\psi_2y^2+2\varphi_2^2y^3, \\ y''' &= \chi_0+\chi_1y+\chi_2y^2+\chi_3y^3+3.2\varphi_2^3y^4, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(m)} &= \omega_0+\omega_1y+\omega_2y^2+\cdots+\omega_my^m+m!\varphi_2^my^{m+1}, \end{aligned}$$

worin die Grössen $\psi, \chi, \dots \omega$ algebraische Functionen von x bedeuten, und die Gleichung (16.) nimmt somit für das gemeinsame Integral durch Einsetzen dieser Werthe die Form

$$m!\varphi_2^my^{m+1}+P_0y^m+P_1y^{m-1}+\cdots+P_{m-1}y+P_m = 0$$

an, worin $P_0, \dots P_m$ wiederum algebraische Functionen von x sind; da aber y keine algebraische Function von x sein soll, so muss diese Gleichung eine identische, also $\varphi_2 = 0$ sein, d. h. die Gleichung (19.) in die lineare Differentialgleichung

$$(20.)\quad y' = \varphi_0+\varphi_1y$$

übergehen, und es bleibt somit nur noch die Frage zu erörtern, ob die Differentialgleichung (16.) mit einer durch die algebraische Substitution

$$(21.)\quad z = F(x, Y)$$

aus der Gleichung

$$(22.)\quad Y' = \varphi_0+\varphi_1Y+\varphi_2Y^2$$

abgeleiteten algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung

$$(23.)\qquad f(x, z, z') = 0$$

ein nicht algebraisches Integral gemein haben könne oder, was offenbar dasselbe ist, ob zwischen einem Integrale von (16.) und einem solchen von (22.) eine algebraische Beziehung von der Form

$$y_1 = F(x, Y_1)$$

existiren könne. Da aber oben bewiesen worden, dass das allgemeine Integral der Gleichung (23.) sich unter der gemachten Voraussetzung ganz und linear durch m particuläre Integrale ausdrücken lassen muss, so wird sich vermöge (21.) die Beziehung ergeben

$$(24.)\qquad F(x, Y) = R_1F(x, Y_1)+R_2F(x, Y_2)+\cdots+R_mF(x, Y_m),$$

wenn $Y_1, Y_2, \dots Y_m$ particuläre Integrale der Differentialgleichung (22.) und $R_1, R_2, \dots R_m$ Functionen einer willkürlichen Constanten bedeuten. Da aber nach der oben angegebenen Beziehung zwischen vier Integralen der Gleichung (22.) die Gleichung (24.) in

$$F(x, Y) = R_1F(x, Y_1)+R_2F(x, Y_2)+R_3F(x, Y_3)+\Sigma_\varkappa R_\varkappa \frac{c_3Y_1(Y_2-Y_3)+c_\varkappa Y_2(Y_3-Y_1)}{c_3(Y_2-Y_3)+c_\varkappa(Y_3-Y_1)}$$

übergeht, so ist unmittelbar zu sehen, dass dieselbe nur dann mit der Relation

$$Y = \frac{c_3Y_1(Y_2-Y_3)+cY_2(Y_3-Y_1)}{c_3(Y_2-Y_3)+c(Y_3-Y_1)}$$

zwischen dem allgemeinen und drei particulären Integralen zu vereinigen ist, wenn

$$F(x, Y) = \frac{p_0+p_1Y}{q_0+q_1Y}$$

ist, worin p_0, p_1, q_0, q_1 algebraische Functionen von x bedeuten, und macht man auf die Differentialgleichung (22.) die Substitution

$$z = \frac{p_0+p_1Y}{q_0+q_1Y} \quad \text{oder} \quad Y = \frac{r_0+r_1z}{s_0+s_1z},$$

so geht dieselbe wegen

$$Y' = \frac{(s_0r_1-r_0s_1)z'+[(s_0+s_1z)(r'_0+r'_1z)-(r_0+r_1z)(s'_0+s'_1z)]}{(s_0+s_1z)^2}$$

in

$$z' = V_0+V_1z+V_2z^2$$

über, worin V_0, V_1, V_2 algebraische Functionen von x sind; aber diese Gleichung kann, wie oben gezeigt wurde, nur, wenn $V_2 = 0$ ist, ein Integral

mit der Differentialgleichung (16.) gemein haben, und wir erhalten somit den Satz:

Eine homogene lineare Differentialgleichung m^{ter} Ordnung kann mit einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung nur dann ein nicht algebraisches Integral gemein haben, wenn letztere eine lineare oder eine durch algebraische Substitution aus einer linearen abgeleitete Differentialgleichung ist.

Habe nun die lineare homogene Differentialgleichung m^{ter} Ordnung (16.) mit der linearen Differentialgleichung (20.) ein nicht algebraisches Integral gemein, so wird auch nach bekannten Sätzen das allgemeine Integral derselben

$$(25.)\qquad y = ce^{\int\varphi_1 dx} + \Phi,$$

worin

$$\Phi = e^{\int\varphi_1 dx}\int\varphi_0 e^{-\int\varphi_1 dx}dx$$

ist, also auch für $c = 0$ Φ selbst ein Integral von (16.) und somit auch wiederum

$$y_1 = e^{\int\varphi_1 dx}$$

ein particuläres Integral ebenderselben Differentialgleichung sein, diese somit das Integral erster Ordnung

$$y' = \varphi_1 y$$

besitzen, und wir erhalten weiter das Resultat:

Wenn eine homogene lineare Differentialgleichung m^{ter} Ordnung mit einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung ein nicht algebraisches Integral gemein hat, so hat sie auch mit einer homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung — und so weit decken sich die beiden Irreductibilitätsdefinitionen — *oder mit einer durch algebraische Substitution aus einer solchen abgeleiteten ein Integral gemein.*

Sei als Beispiel für das letztere die Differentialgleichung

$$(26.)\qquad y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$$

angeführt, für welche das particuläre Integral

$$(27.)\qquad y = e^x + e^{2x} + e^{3x}$$

einer Differentialgleichung erster Ordnung

$$(28.)\qquad F(y, y') = 0$$

genügt, die man durch Elimination von e^x aus (27.) und deren Ableitung

$$y' = e^x + 2e^{2x} + 3e^{3x}$$

erhält, und für welche, da ihr allgemeines Integral durch

$$y = ce^x + c^2 e^{2x} + c^3 e^{3x}$$

gegeben ist, die zwischen dem allgemeinen und drei particulären Integralen bestehende Beziehung gilt

$$\begin{vmatrix} y & c & c^2 & c^3 \\ y_1 & c_1 & c_1^2 & c_1^3 \\ y_2 & c_2 & c_2^2 & c_2^3 \\ y_3 & c_3 & c_3^2 & c_3^3 \end{vmatrix} = 0;$$

man sieht ferner unmittelbar, dass die Gleichung (28.) durch die algebraische Substitution

$$y = z + z^2 + z^3$$

aus der homogenen linearen Differentialgleichung

$$z' = z$$

abgeleitet ist.

Ich habe bereits in meinen „Allgem. Untersuchungen" nachgewiesen, dass, wenn eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einer nicht linearen Differentialgleichung erster Ordnung ein nicht algebraisches Integral gemein hat, nothwendig je zwei Fundamentalintegrale derselben in einer algebraischen Beziehung stehen müssen — wir wollen hier im Anschluss an den oben gefundenen Satz das analoge Theorem erweisen:

Wenn eine lineare homogene Differentialgleichung*) m^{ter} Ordnung mit einer durch algebraische Substitution aus einer homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung abgeleiteten nicht homogenen linearen ein nicht algebraisches Integral gemein hat, so stehen zwei Fundamentalintegrale der ersteren in algebraischer Beziehung.

Denn ist

$$(29.) \qquad z' = z \, . \, \varphi$$

die homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung, aus welcher durch die algebraische Substitution

$$(30.) \qquad y = F(x, z)$$

die Differentialgleichung erster Ordnung

---

*) Die Erweiterung dieses Satzes auf nicht homogene lineare Differentialgleichungen beliebiger Ordnung ist unmittelbar ersichtlich.

$$f(x, y, y') = 0$$

abgeleitet worden, welche ein nicht algebraisches Integral y_1 mit (16.) gemein hat, so wird man die Beziehung (30.) für $y = y_1$, $z = z_1$ als eine algebraische Relation zwischen einem Integrale von (16.) und einem solchen von (29.) ansehen können, und da eine solche, weil y_1 nicht algebraisch sein sollte, nach einem bekannten Satze erhalten bleibt, wenn z_1 durch ein anderes Integral von (29.) ersetzt wird, vorausgesetzt, dass man für y_1 ein passendes Integral von (16.) substituirt, so wird man die beiden Gleichungen erhalten

$$y_1 = F(x, z_1), \quad y_2 = F(x, cz_1),$$

woraus sich durch Elimination von z_1 die gesuchte algebraische Beziehung zwischen y_1 und y_2 ergiebt*), die offenbar selbständige Integrale der Differentialgleichung (16.) sind — denn wäre für willkürliche c stets y_2 ein constantes Multiplum von y_1, also

$$F(x, cz_1) = mF(x, z_1),$$

worin c willkürlich und m davon abhängig ist, so würde sich aus dieser Gleichung, welche, weil z_1 nicht algebraisch ist, eine in z_1 identische sein muss, durch Differentiation nach c und z_1

---

*) Es mag hier noch bemerkt werden, dass, wenn für eine lineare homogene Differentialgleichung (16.) eine algebraische Beziehung

$$y_2 = F(x, y_1)$$

zwischen zwei particulären Integralen stattfindet, diese Differentialgleichung nothwendig reductibel sein muss; denn aus

$$y'_2 = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y_1} y'_1,$$

$$y''_2 = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial y_1} y''_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$y_2^{(m)} = \frac{\partial^m F}{\partial x^m} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial y_1} y_1^{(m)}$$

folgt durch Einsetzen in (16.) dass

$$\frac{\partial F}{\partial y_1}[y_1^{(m)} + p_1 y_1^{(m-1)} + \cdots + p_{m-1} y'_1] + \varphi(x, y_1, y'_1, \ldots y_1^{(m-1)}) = 0$$

oder

$$-p_m y_1 \frac{\partial F}{\partial y_1} + \varphi(x, y_1, y'_1, \ldots y_1^{(m-1)}) = 0,$$

und man sieht genau so, wie ich es für Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf Seite 17 meiner „Allg. Untersuchungen" gezeigt habe, dass der Ausdruck φ nicht identisch verschwinden kann, die obige Gleichung somit eine algebraische Differentialgleichung $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung definirt, welche y_1 zum Integral hat.

$$\frac{\partial F(x, cz_1)}{\partial cz_1} z_1 = \frac{dm}{dc} F(x, z_1) \quad \text{und} \quad \frac{\partial F(x, cz_1)}{\partial cz_1} c = m \frac{dF(x, z_1)}{dz_1},$$

also durch Division

$$\frac{dF(x, z_1)}{F(x, z_1)} = \frac{c}{m} \frac{dm}{dc} \frac{dz_1}{z_1}$$

ergeben, welche für die Form der F-Function

$$F(x, z) = \varphi_1 . z^\varkappa$$

liefert, worin φ_1 eine algebraische Function von x und $\varkappa$ eine Constante bedeutet; aber dann würde die aus (29.) durch die Substitution (30.), welche in diesem Falle

$$y = \varphi_1 . z^\varkappa$$

lautet, abgeleitete Differentialgleichung wegen

$$y' = \varphi_1' . z^\varkappa + \varkappa \varphi_1 \varphi z^\varkappa$$

in

$$y' = \frac{\varphi'_1 + \varkappa \varphi_1 \varphi}{\varphi_1} . y$$

übergehen, also y_1 schon selbst einer homogenen linearen Differentialgleichung genügen — es ist somit der oben ausgesprochene Satz bewiesen.

Bevor wir nun in der allgemeinen Untersuchung weiter fortschreiten, mögen noch zwei specielle Sätze, welche sich den eben gefundenen Theoremen anschliessen, hier Platz finden. Nehmen wir an, dass ein Integral y_1 der Gleichung (16.) auch einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung angehöre, welche aus einer homogenen linearen erster Ordnung (29.) durch eine in der abhängigen Variabeln der letzteren ganze Function abgeleitet ist, dass also die Beziehung bestehe

$$y_1 = \omega_0 + \omega_1 z_1 + \omega_2 z_1^2 + \cdots + \omega_\mu z_1^\mu,$$

so wird sich hieraus wieder nach dem Satze von der Erhaltung der algebraischen Beziehung das System der Gleichungen ergeben

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \omega_0 + \omega_1 c_1 z_1 + \omega_2 c_1^2 z_1^2 + \cdots + \omega_\mu c_1^\mu z_1^\mu, \\ \eta_2 &= \omega_0 + \omega_1 c_2 z_1 + \omega_2 c_2^2 z_1^2 + \cdots + \omega_\mu c_2^\mu z_1^\mu, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \eta_{\mu+1} &= \omega_0 + \omega_1 c_{\mu+1} z_1 + \omega_2 c_{\mu+1}^2 z_1^2 + \cdots + \omega_\mu c_{\mu+1}^\mu z_1^\mu, \end{aligned}$$

worin $c_1, c_2, \ldots c_{\mu+1}$ willkürliche Constanten, $\omega_0, \omega_1, \ldots \omega_\mu$ algebraische Functionen von x und $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{\mu+1}$ Integrale der Differentialgleichung (16.) bedeuten; da aber die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & c_1 & c_1^2 & \dots & c_1^\mu \\ 1 & c_2 & c_2^2 & \dots & c_2^\mu \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & c_{\mu+1} & c_{\mu+1}^2 & \dots & c_{\mu+1}^\mu \end{vmatrix}$$

wegen der willkürlichen Wahl der $c_1, \dots c_{\mu+1}$ nicht verschwindet, so folgt, wenn $\omega_1 z_1, \omega_2 z_1^2, \dots \omega_\mu z_1^\mu$ als Unbekannte aufgefasst werden,

$$\omega_\lambda z_1^\lambda = A_1 \eta_1 + A_2 \eta_2 + \dots + A_{\mu+1} \eta_{\mu+1},$$

worin $A_1, A_2, \dots A_{\mu+1}$ Constanten bedeuten; es ist also $\omega_\lambda z_1^\lambda$ ein Integral der homogenen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung, und es wird sich daher, da

$$t = \omega_\lambda z_1^\lambda$$

der homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\omega_\lambda' + \lambda \omega_\lambda \varphi}{\omega_\lambda} \cdot t$$

genügt, der Satz ergeben:

***Wenn sich das Integral einer homogenen linearen Differentialgleichung beliebiger Ordnung als eine mit variabeln algebraischen Coefficienten versehene ganze Function eines Integrales einer homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung darstellen lässt, so giebt es auch ein Integral jener Differentialgleichung, welches selbst einer homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung genügt*)*.**

Und hieran lässt sich wieder leicht folgende Bemerkung knüpfen; bestehe jetzt allgemeiner zwischen y_1 und z_1 die algebraische Gleichung

$$y_1^\varkappa + f_1(x, z_1) y_1^{\varkappa-1} + f_2(x, z_1) y_1^{\varkappa-2} + \dots + f_\varkappa(x, z_1) = 0,$$

welche mit Adjungirung von x und z_1 als irreductibel angenommen werden soll, so folgt aus derselben nach bekannten algebraischen Principien

$$\begin{aligned} y_1' &= F_{11}(x, z_1) y_1^{\varkappa-1} + F_{12}(x, z_1) y_1^{\varkappa-2} + \dots + F_{1\varkappa}(x, z_1), \\ y_1'' &= F_{21}(x, z_1) y_1^{\varkappa-1} + F_{22}(x, z_1) y_1^{\varkappa-2} + \dots + F_{2\varkappa}(x, z_1), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_1^{(m)} &= F_{m1}(x, z_1) y_1^{\varkappa-1} + F_{m2}(x, z_1) y_1^{\varkappa-2} + \dots + F_{m\varkappa}(x, z_1), \end{aligned}$$

worin die F-Functionen rational das Integral z_1 enthalten; setzt man nun $y_1, y_1', \dots y_1^{(m)}$ in die Differentialgleichung (16.) ein, so ergiebt sich eine Gleichung von der Form

---

*) Es ist leicht zu sehen, dass die obigen Schlüsse auch für negative z_1-Potenzen bestehen bleiben.

$$\Phi_1(x, z_1)y_1^{\varkappa-1}+\Phi_2(x, z_1)y_1^{\varkappa-2}+\cdots+\Phi_{\varkappa-1}(x, z_1) = 0,$$

welche wegen der Annahme der Irreductibilität der die Grösse y_1 definirenden Gleichung $\varkappa^{\text{ten}}$ Grades identisch verschwinden muss; hieraus folgt aber, dass alle Lösungen jener Gleichung $\varkappa^{\text{ten}}$ Grades Integrale der Gleichung (16.) sind und somit auch die Summe aller, also

$$y = f_1(x, z_1)$$

ein Integral der homogenen linearen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung; ist daher $f_1(x, z_1)$ eine ganze Function von z_1, so würde wieder der vorige Satz anwendbar sein, und es ergiebt sich somit das folgende Theorem:

Ist ein Integral einer homogenen linearen Differentialgleichung beliebiger Ordnung eine solche algebraische Function eines Integrales einer homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung, deren zweites Glied eine ganze Function vorstellt, so giebt es immer ein Integral der ursprünglichen Differentialgleichung, welches selbst einer homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung angehört).*

Ich wende mich nunmehr wieder zu der allgemeinen Betrachtung zurück, die mit dem Ergebniss schloss, dass, wenn eine lineare homogene Differentialgleichung m^{ter} Ordnung mit einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung ein nicht algebraisches Integral gemein hat, die erstere — um nur das Wesentliche hervorzuheben — im Allgemeinen auch mit einer homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung ein gemeinschaftliches Integral haben wird — dass sich also die beiden Irreductibilitätsdefinitionen noch in gewissem Sinne decken. Dass dies aber schon bei der Vergleichung mit algebraischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung aufhört, lässt sich aus folgendem einfachen Falle ersehen, in welchem eine homogene lineare Differentialgleichung dritter Ordnung mit einer algebraischen, nicht zerlegbaren und nicht linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung ein Integral gemein hat, ohne dass jene Differentialgleichung dritter Ordnung mit einer anderen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung ein gemeinsames Integral besitzt. Sei nämlich die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung gegeben

$$(31.)\qquad y''+p_1y'+p_2y = 0,$$

und setzt man

*) Der Satz besteht offenbar auch mit der in der letzten Anmerkung gemachten Erweiterung.

$$y^2 = z_1,$$

so folgt leicht die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(32.)\qquad 2zz''-z'^2+2p_1zz'+4p_2z^2 = 0$$

oder

$$2\frac{d\left(\frac{z'}{z}\right)}{dx}+\left(\frac{z'}{z}\right)^2+2p_1\left(\frac{z'}{z}\right)+4p_2 = 0,$$

welche das allgemeine Integral

$$z = (c_1y_1+c_2y_2)^2$$

besitzt, wenn y_1 und y_2 zwei Fundamentalintegrale von (31.) bedeuten. Differentiirt man die Differentialgleichung (32.), so erhält man die bekannte Differentialgleichung dritter Ordnung

$$(33.)\qquad z'''+3p_1z''+(p_1'+4p_2+2p_1^2)z'+2(p_2'+2p_1p_2)z = 0,$$

deren drei Fundamentalintegrale y_1^2, y_1y_2, y_2^2 sind. Die Differentialgleichung (33.) hat somit die Function y_1^2 als Integral mit der Differentialgleichung (32.) gemeinsam, aber es lässt sich leicht einsehen, dass keines ihrer in dem allgemeinen Integrale

$$z = c_1y_1^2+c_2y_1y_2+c_3y_2^2$$

enthaltenen Integrale auch zugleich einer *linearen* Differentialgleichung zweiter Ordnung angehören kann*); denn angenommen, es genügte für irgend eine Wahl der willkürlichen Constanten der Ausdruck

$$z_1 = \mu_1y_1^2+\mu_2y_1y_2+\mu_3y_2^2$$

der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$z_1''+P_1z_1'+P_2z_1 = P_3,$$

---

*) Daraus folgt offenbar, dass es auch nicht einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung genügen kann; es mag hier als unmittelbar ersichtlich die Bemerkung hinzugefügt werden, dass, wenn zwei Functionen y_1 und y_2 zwei homogenen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$y_1' = y_1 \cdot f_1, \quad y_2' = y_2 \cdot f_2$$

genügen, der Ausdruck

$$z = c_1y_1+c_2y_2,$$

worin c_1 und c_2 willkürliche Constanten bedeuten, das allgemeine Integral der homogenen linearen Differentialgleichung

$$\begin{vmatrix} z & 1 & 1 \\ z' & f_1 & f_2 \\ z'' & f_1^2+f_1' & f_2^2+f_2' \end{vmatrix} = 0$$

sein wird.

wisse Anzahl particulärer Integrale ausdrücken lässt. Vor allem ist klar, dass die Anzahl der particulären Integrale nicht kleiner als μ sein kann, weil ein Ausdruck der Form

$$R_1 y_1 + R_2 y_2 + \cdots + R_\lambda y_\lambda$$

in seinen Coefficienten nur λ Willkürlichkeiten einschliesst, also nicht das allgemeine Integral der Differentialgleichung (34.) repräsentiren kann. Sei nun die Anzahl der particulären Integrale gleich der Ordnung der Differentialgleichung, also

$$(35.) \qquad y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_\mu y_\mu,$$

worin $c_1, c_2, \dots c_\mu$ willkürliche Constanten bedeuten, so folgt durch Einführung dieses Werthes in (34.) die Beziehung

$$(36.) \quad \begin{cases} c_1 F(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(\mu-1)}) + c_2 F(x, y_2, y_2', \dots y_2^{(\mu-1)}) + \cdots + c_\mu F(x, y_\mu, y_\mu', \dots y_\mu^{(\mu-1)}) \\ = F(x, c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_\mu y_\mu, c_1 y_1' + c_2 y_2' + \cdots + c_\mu y_\mu', \dots c_1 y_1^{(\mu-1)} + c_2 y_2^{(\mu-1)} + \cdots + c_\mu y_\mu^{(\mu-1)}), \end{cases}$$

welche für willkürliche Werthe der Grössen $c_1, c_2, \dots c_\mu$ gültig ist. Differentiirt man (36.) nach eben diesen Grössen und setzt zur Abkürzung

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_\mu y_\mu = Y,$$

$$c_1 y_1' + c_2 y_2' + \cdots + c_\mu y_\mu' = Y', \quad \dots \quad c_1 y_1^{(\mu-1)} + c_2 y_2^{(\mu-1)} + \cdots + c_\mu y_\mu^{(\mu-1)} = Y^{(\mu-1)},$$

so folgt

$$(37.) \quad \begin{cases} \frac{\partial F(x, Y, Y', \dots Y^{(\mu-1)})}{\partial Y} y_1 + \frac{\partial F(x, Y, Y', \dots Y^{(\mu-1)})}{\partial Y'} y_1' + \cdots \\ \cdots + \frac{\partial F(x, Y, Y', \dots Y^{(\mu-1)})}{\partial Y^{(\mu-1)}} y_1^{(\mu-1)} = F(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(\mu-1)}), \\ \frac{\partial F(x, Y, Y', \dots Y^{(\mu-1)})}{\partial Y} y_2 + \frac{\partial F(x, Y, Y', \dots Y^{(\mu-1)})}{\partial Y'} y_2' + \cdots \\ \cdots + \frac{\partial F(x, Y, Y', \dots Y^{(\mu-1)})}{\partial Y^{(\mu-1)}} y_2^{(\mu-1)} = F(x, y_2, y_2', \dots y_2^{(\mu-1)}), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{\partial F(x, Y, Y', \dots Y^{(\mu-1)})}{\partial Y} y_\mu + \frac{\partial F(x, Y, Y', \dots Y^{(\mu-1)})}{\partial Y'} y_\mu' + \cdots \\ \cdots + \frac{\partial F(x, Y, Y', \dots Y^{(\mu-1)})}{\partial Y^{(\mu-1)}} y_\mu^{(\mu-1)} = F(x, y_\mu, y_\mu', \dots y_\mu^{(\mu-1)}); \end{cases}$$

nun kann aber die Determinante dieses Gleichungssystems

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_\mu \\ y_1' & y_2' & \dots & y_\mu' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(\mu-1)} & y_2^{(\mu-1)} & \dots & y_\mu^{(\mu-1)} \end{vmatrix}$$

nicht verschwinden, weil dann bekanntlich zwischen $y_1, y_2, \dots y_\mu$ eine homogene lineare Relation mit constanten Coefficienten bestehen müsste und daher, was vorher als unmöglich erkannt wurde, sich nach (35.) das allgemeine Integral durch weniger als μ particuläre Integrale homogen und linear ausdrücken lassen würde; es wird somit das Gleichungssystem (37.) die Ausdrücke liefern

$$(38.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F(x, Y, Y', \dots Y^{(\mu-1)})}{\partial Y} = \varphi_0(x, y_1, \dots y_1^{(\mu-1)}, y_2, \dots y_2^{(\mu-1)}, \dots y_\mu, \dots y_\mu^{(\mu-1)}), \\ \dfrac{\partial F(x, Y, Y', \dots Y^{(\mu-1)})}{\partial Y'} = \varphi_1(x, y_1, \dots y_1^{(\mu-1)}, y_2, \dots y_2^{(\mu-1)}, \dots y_\mu, \dots y_\mu^{(\mu-1)}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial F(x, Y, Y', \dots Y^{(\mu-1)})}{\partial Y^{(\mu-1)}} = \varphi_{\mu-1}(x, y_1, \dots y_1^{(\mu-1)}, y_2, \dots y_2^{(\mu-1)}, \dots y_\mu, \dots y_\mu^{(\mu-1)}), \end{cases}$$

worin die φ-Functionen von den Grössen $c_1, c_2, \dots c_\mu$ unabhängig sind, und es behalten daher diese Differentialquotienten für ein bestimmt gewähltes Werthesystem von $x, y_1, \dots y_1^{(\mu-1)}, \dots y_\mu, \dots y_\mu^{(\mu-1)}$ ihre Werthe bei, welche Werthe man auch für die willkürlichen Grössen $c_1, \dots c_\mu$ setzen mag. Da man aber den Grössen $c_1, c_2, \dots c_\mu$ solche Werthe geben kann, dass die Argumente $Y, Y', \dots Y^{(\mu-1)}$ willkürlich vorgeschriebene Werthe annehmen, weil die Determinante der y und ihrer Ableitungen nicht verschwindet, so werden jene Differentialquotienten (38.) von ihren Argumenten unabhängig sein, und es wird sich somit als Form der F-Function ergeben

$$(39.)\quad F(x, Y, Y', \dots Y^{(\mu-1)}) = P_0 Y + P_1 Y' + \dots + P_{\mu-1} Y^{(\mu-1)} + P,$$

worin $P, P_0, \dots P_{\mu-1}$ nur Functionen von x sind und der Ausdruck für beliebige Werthe von $Y, Y', \dots Y^{(\mu-1)}$ gültig ist. Setzt man nun diesen Ausdruck in die Functionalgleichung (36.) ein, so folgt unmittelbar

$$P(c_1 + c_2 + \dots + c_\mu - 1) = 0,$$

und daher wegen der Willkürlichkeit der Constanten $P = 0$, also nimmt die Differentialgleichung (34.) die Form an

$$y^{(\mu)} = P_0 y + P_1 y' + \dots + P_{\mu-1} y^{(\mu-1)},$$

und wir erhalten den Satz:

Wenn für eine algebraische Differentialgleichung das allgemeine Integral eine homogene lineare Function mit constanten Coefficienten von ebenso vielen particulären Integralen ist als die Ordnung der Differentialgleichung anzeigt, so ist die Differentialgleichung eine homogene lineare.

Es bleibt somit nur noch die Frage nach der Beschaffenheit der Differentialgleichung (34.) zu erörtern, wenn das allgemeine Integral durch mehr als μ particuläre Integrale linear, also in der Form

$$(40.)\qquad y = S_1 y_1 + S_2 y_2 + \cdots + S_\varrho y_\varrho$$

ausdrückbar ist, worin $\varrho > \mu$ und $S_1, S_2, \ldots S_\varrho$ Functionen der μ willkürlichen Constanten $c_1, c_2, \ldots c_\mu$ sind. Führen wir den Ausdruck (40.) wieder in die Differentialgleichung (34.) ein, so erhalten wir die Beziehung

$$(41.)\quad \begin{cases} S_1 F(x, y_1, y_1', \ldots y_1^{(\mu-1)}) + S_2 F(x, y_2, y_2', \ldots y_2^{(\mu-1)}) + \cdots + S_\varrho F(x, y_\varrho, y_\varrho', \ldots y_\varrho^{(\mu-1)}) \\ = F(x, S_1 y_1 + \cdots + S_\varrho y_\varrho,\ S_1 y_1' + \cdots + S_\varrho y_\varrho', \ldots S_1 y_1^{(\mu-1)} + \cdots + S_\varrho y_\varrho^{(\mu-1)}), \end{cases}$$

und hierbei können zwei Fälle eintreten, indem diese Gleichung eine in allen in ihr vorkommenden Grössen identische ist oder nicht. Ist das erstere der Fall — und dies wird dann stets eintreten, wenn die Differentialgleichung so beschaffen ist, dass keine algebraische Beziehung zwischen ϱ ihrer particulären Integrale und deren Ableitungen besteht — so erhält man aus (41.), wenn wiederum zur Abkürzung

$$S_1 y_1 + \cdots + S_\varrho y_\varrho = Y,\quad S_1 y_1' + \cdots + S_\varrho y_\varrho' = Y',\ \ldots\ S_1 y_1^{(\mu-1)} + \cdots + S_\varrho y_\varrho^{(\mu-1)} = Y^{(\mu-1)}$$

gesetzt werden, durch Differentiation nach $y_1, y_2, \ldots y_\varrho, \ldots y_1^{(\mu-1)}, y_2^{(\mu-1)}, \ldots y_\varrho^{(\mu-1)}$ die nachfolgenden identischen Gleichungen:

$$(42.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F(x, Y, Y', \ldots Y^{(\mu-1)})}{\partial Y} \\ = \dfrac{\partial F(x, y_1, y_1', \ldots y_1^{(\mu-1)})}{\partial y_1} = \dfrac{\partial F(x, y_2, y_2', \ldots y_2^{(\mu-1)})}{\partial y_2} = \cdots = \dfrac{\partial F(x, y_\varrho, y_\varrho', \ldots y_\varrho^{(\mu-1)})}{\partial y_\varrho}, \\ \dfrac{\partial F(x, Y, Y', \ldots Y^{(\mu-1)})}{\partial Y'} \\ = \dfrac{\partial F(x, y_1, y_1', \ldots y_1^{(\mu-1)})}{\partial y_1'} = \cdots\cdots\cdots = \dfrac{\partial F(x, y_\varrho, y_\varrho', \ldots y_\varrho^{(\mu-1)})}{\partial y_\varrho'}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial F(x, Y, Y', \ldots Y^{(\mu-1)})}{\partial Y^{(\mu-1)}} \\ = \dfrac{\partial F(x, y_1, y_1', \ldots y_1^{(\mu-1)})}{\partial y_1^{(\mu-1)}} = \cdots\cdots\cdots = \dfrac{\partial F(x, y_\varrho, y_\varrho', \ldots y_\varrho^{(\mu-1)})}{\partial y_\varrho^{(\mu-1)}}. \end{cases}$$

Da aber die hieraus sich ergebende Beziehung von der Form

$$(43.)\qquad \frac{\partial F(x, y_\alpha, y_\alpha', \ldots y_\alpha^{(\mu-1)})}{\partial y_\alpha^{(\lambda)}} = \frac{\partial F(x, y_\beta, y_\beta', \ldots y_\beta^{(\mu-1)})}{\partial y_\beta^{(\lambda)}}$$

für alle Werthe der y und deren Ableitungen identisch befriedigt sein soll, so muss sie auch erfüllt sein, wenn $y_\beta^{(\varkappa)} = y_\alpha^{(\varkappa)}$ ist ($\varkappa = \lambda$ ausgenommen), und man erhielte:

$$\frac{\partial F(x, y_\alpha, y'_\alpha, \dots y_\alpha^{(\lambda)}, \dots y_\alpha^{(\mu-1)})}{\partial y_\alpha^{(\lambda)}} = \frac{\partial F(x, y_\alpha, y'_\alpha, \dots y_\beta^{(\lambda)}, \dots y_\alpha^{(\mu-1)})}{\partial y_\beta^{(\lambda)}},$$

woraus sich die Ableitung von $F(x, y_\alpha, y'_\alpha, \dots y_\alpha^{(\lambda)}, \dots y_\alpha^{(\mu-1)})$ nach $y_\alpha^{(\lambda)}$ genommen als unabhängig von $y_\alpha^{(\lambda)}$ ergiebt; also hat F die Form

$$F(x, y_\alpha, y'_\alpha, \dots y_\alpha^{(\lambda)}, \dots y_\alpha^{(\mu-1)}) = Ly_\alpha^{(\lambda)} + M,$$

worin L und M Functionen von $x, y_\alpha, \dots y_\alpha^{(\lambda-1)}, y_\alpha^{(\lambda+1)}, \dots y_\alpha^{(\mu-1)}$ sind; da aber

$$\frac{\partial F(x, y_\alpha, y'_\alpha, \dots y_\alpha^{(\lambda)}, \dots y_\alpha^{(\mu-1)})}{\partial y_\alpha^{(\lambda)}} = L$$

vermöge der Gleichung (43.) unverändert bleiben soll, wenn $y_\alpha, y'_\alpha, \dots y_\alpha^{(\mu-1)}$ durch beliebige andere Werthe $y_\beta, y'_\beta, \dots y_\beta^{(\mu-1)}$ ersetzt werden, so wird L von allen diesen Grössen unabhängig, also eine reine Function von x sein müssen, während M von den übrigen Grössen abhängt; verfährt man genau so mit den anderen Argumenten der F-Function, so erhält man schliesslich die Form

$$F(x, y, y', \dots y^{(\mu-1)}) = T_0 y + T_1 y' + \dots + T_{\mu-1} y^{(\mu-1)},$$

indem die Functionalgleichung (41.) wieder das von y und dessen Ableitungen freie Glied verschwinden lässt, d. h. die Differentialgleichung (34.) muss eine homogene lineare sein — ist dies also nicht der Fall, so darf die erste der gemachten Voraussetzungen, nämlich die, dass die Gleichung (41.) eine identische ist, nicht stattfinden, sie muss vielmehr einen algebraischen Zusammenhang zwischen den in ihr enthaltenen Grössen liefern, und wir erhalten den folgenden Satz:

Hat eine nicht homogene lineare Differentialgleichung die Eigenschaft, dass ihr allgemeines Integral sich durch eine Reihe von particulären Integralen in homogener linearer Form mit constanten Coefficienten ausdrücken lässt, so muss zwischen diesen particulären Integralen und deren Ableitungen eine algebraische Beziehung stattfinden,

und in Verbindung mit dem vorigen den weiteren:

Hat eine homogene lineare Differentialgleichung mit einer Differentialgleichung niederer Ordnung ein Integral gemein, das nicht schon einer Differentialgleichung noch niederer Ordnung angehört, so ist jene algebraische Differentialgleichung entweder wieder eine homogene lineare, oder es findet zwischen ihren particulären Integralen und deren Ableitungen ein algebraischer Zusammenhang statt,

wie dies in der That für die linearen homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung sich ergeben hatte.

Es mag schliesslich noch auseinandergesetzt werden, wie die Discussion der Form einer solchen algebraischen Beziehung zwischen particulären Integralen und deren Ableitungen für eine algebraische Differentialgleichung, welche ein Integral mit einer homogenen linearen Differentialgleichung höherer Ordnung gemein haben sollte, angegriffen werden kann. Sei die in Rede stehende Beziehung

$$(44.)\quad \omega(x, y_1, y_2, \dots y_\varrho, y_1', y_2', \dots y_\varrho', \dots y_1^{(\mu-1)}, y_2^{(\mu-1)}, \dots y_\varrho^{(\mu-1)}) = 0,$$

so wird nach dem Satze von der Erhaltung der algebraischen Beziehung zwischen Integralen von Differentialgleichungen und deren Ableitungen die Gleichung (44.) unverändert bleiben, wenn man für ein Integral y_1, von dem vorausgesetzt war, dass es nicht schon einer algebraischen Differentialgleichung niederer Ordnung genügt, ein willkürliches anderes Integral der Differentialgleichung (34.) setzt, wenn man nur für die anderen in (44.) vorkommenden Integrale passende particuläre Integrale derselben Differentialgleichung substituirt. Da aber das allgemeine Integral von (34.) durch

$$y = S_1 y_1 + S_2 y_2 + \cdots + S_\varrho y_\varrho$$

gegeben ist, so wird, wenn dieser Werth von y statt y_1 in (44.) substituirt wird, die obige Gleichung in

$$(45.)\quad \begin{cases} \omega(x, S_{11}y_1 + S_{12}y_2 + \cdots + S_{1\varrho}y_\varrho, \\ S_{21}y_1 + S_{22}y_2 + \cdots + S_{2\varrho}y_\varrho, \dots \quad S_{\varrho 1}y_1 + S_{\varrho 2}y_2 + \cdots + S_{\varrho\varrho}y_\varrho, \\ S_{11}y_1' + S_{12}y_2' + \cdots + S_{1\varrho}y_\varrho', \\ S_{21}y_1' + S_{22}y_2' + \cdots + S_{2\varrho}y_\varrho', \dots \quad S_{\varrho 1}y_1' + S_{\varrho 2}y_2' + \cdots + S_{\varrho\varrho}y_\varrho', \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ S_{11}y_1^{(\mu-1)} + S_{12}y_2^{(\mu-1)} + \cdots + S_{1\varrho}y_\varrho^{(\mu-1)}, \\ S_{21}y_1^{(\mu-1)} + S_{22}y_2^{(\mu-1)} + \cdots + S_{2\varrho}y_\varrho^{(\mu-1)}, \dots S_{\varrho 1}y_1^{(\mu-1)} + S_{\varrho 2}y_2^{(\mu-1)} + \cdots + S_{\varrho\varrho}y_\varrho^{(\mu-1)}) = 0, \end{cases}$$

worin die S bestimmte Functionen der μ willkürlichen Constanten $c_1, c_2, \dots c_\mu$ sind, und aus der Existenz dieser Gleichung mit den μ willkürlichen Grössen lassen sich in vielen Fällen Schlüsse für die Form der Function ω ziehen, wie ich es in früheren Arbeiten an den Differentialgleichungen zweiter Ordnung und an einzelnen Differentialgleichungen höherer Ordnung durchgeführt habe.

Wien, am 11. November 1883.

Ueber die Krümmung der Flächen*).

(Von Herrn *O. Böklen* in Reutlingen.)

(Hierzu Taf. 2, Fig. 1—3.)

---

§ 1.

Einleitung.

Nach der einfachsten und gewöhnlichen Vorstellung verwandelt sich ein Lichtstrahlenbündel, welches auf die Pupille fällt, nach der Brechung im Auge in einen Kegel, dessen Spitze beim deutlichen Sehen auf der Netzhaut liegt. ***Ch. Sturm*** nimmt an (Sur la vision, Compt. rend. 1845), dass an die Stelle des Kegels ein Conoid zu setzen ist. Wenn ein sehr dünnes Strahlenbündel auf einer Fläche nach dem Sinusgesetz gebrochen wird, so sind die Strahlen nach der Brechung die Normalen einer Fläche nach ***Malus; Dupin*** hat diesen Satz auch auf den Fall erweitert, wenn die Brechung mehrmals bei verschiedenen Flächen stattfindet; im Folgenden wird die genannte Fläche Wellenfläche genannt (***Helmholtz***, Physiol. Optik 1867, S. 243). Man denkt sich also in einem Punkt S derselben die Normale mit den zwei Krümmungsmittelpunkten l und l'; die Basis des Conoids ist ein sehr kleiner Kreis auf der Wellenfläche, dessen Mittelpunkt S ist; zwei durch l und l' parallel mit den Tangenten der Krümmungslinien von S gezogene, unendlich kleine Gerade sind die Leitlinien des Conoids; es

---

*) Die enge Verbindung, in welcher die Krümmung der Flächen und speciell die Form des unendlich dünnen Normalenbündels mit der Theorie des Sehens steht, wird hier nach dem Vorgang von *Ch. Sturm* zwar ebenfalls festgehalten, doch nur insofern als solche rein geometrischen Untersuchungen sich auf die Wellenfläche beziehen, deren Existenz auch für den Fall vorausgesetzt wird, dass die Linse in Folge der Accommodation irgend welche Gestaltsveränderungen erleidet, ohne dass dadurch das Sinusgesetz alterirt wird. *W. R. Hamilton* (Irish Academy, Vol. XV, Theory of Systems of Rays) giebt an (Art. 81): When homogeneous rays have been any number of times reflected and refracted, they are cut perpendicularly by the surfaces of constant action. Die Eigenschaften der unendlich dünnen Normalenbündel, welche in Art. 59—61 mit Benutzung von Differentialcoefficienten dritter Ordnung untersucht werden, gelten nach Art. 83—86 auch für gebrochene Strahlen.

wird durch Ebenen parallel der Basis in Ellipsen geschnitten. Der wirksame Theil des Conoids oder Strahlenbündels, wo die Verdichtung der Strahlen stattfindet, ist zwischen l und l', er hat eine Länge von 1 bis 2 mm, und durchschneidet die Netzhaut senkrecht.

Durch diese Theorie ist für die Erklärung der Vorgänge auf der Netzhaut ein grösserer Spielraum gegeben, als wenn man auf die Spitze eines Strahlenkegels beschränkt ist. *Sturm* hat seine Untersuchungen über das unendlich dünne Normalenbündel einer Fläche mit Hülfe der Differentialcoëfficienten erster und zweiter Ordnung geführt; im Folgenden werden auch diejenigen dritter Ordnung benutzt, wodurch man weitere Aufschlüsse über die Krümmung der Flächen erhält, sowie über die osculirenden Flächen zweiten Grades. Dann werden durch Einführung einer Variabeln, welche schon *Joachimsthal* benutzte, um das Problem über die Normalen, welche sich von einem Punkt auf ein Ellipsoid fällen lassen, zu behandeln, die Normalenregelflächen untersucht, deren Basis irgend ein ebener Schnitt des Ellipsoids ist; und schliesslich wird zu zeigen versucht, wie man beim Uebergang zum unendlich dünnen Normalenbündel mit Hülfe der Centrafläche des osculirenden Ellipsoids der Wellenfläche einen weiteren Anhaltspunkt gewinnt für die Erklärung der Vorgänge auf der Netzhaut des Auges, als es mit dem *Sturm*schen Conoid möglich ist. Da nämlich ein Lichtstrahlenbündel beim Durchgang durch die Krystalllinse so verändert wird, dass die einzelnen Strahlen Normalen der Wellenfläche werden, welche man sich zwischen Krystalllinse und Netzhaut nahe bei der letzteren zu denken hat, so besteht die Aufgabe zunächst darin, das Normalenbündel zu untersuchen, dessen Basis ein sehr kleiner Kreis oder auch die Indicatrix einer beliebigen Fläche ist. Hierzu ist vor Allem die Kenntniss der beiden Hauptkrümmungshalbmesser L und L' nothwendig, zu deren Bestimmung die Differentialcoefficienten erster und zweiter Ordnung hinreichen, und man findet mit Hülfe dieser Grössen nach *Sturm* die Form eines Conoids als erste Annäherung an diejenige des Normalenbündels der allgemeinen Fläche. Dieses Conoid ist identisch mit dem Normalenbündel eines die Fläche osculirenden Ellipsoids, wenn die Normale zugleich Axe desselben ist. Die Zahl der osculirenden Ellipsoide ist übrigens unendlich gross, und man weiss von ihnen bloss, dass ihre Focalcurven auf einem System confocaler Kegel liegen (Zeitschrift von *Schlömilch,* XXVII, S. 369), auch entsprechen denselben im Osculationspunkt andere, von dem *Sturm*schen Conoid

verschiedene Formen des Normalenbündels. Geht man nun zur dritten Ordnung über, so ergeben sich zunächst zwei neue Strecken M und N', die hier *Polstrecken* genannt werden, durch welche die erste und wichtigste Serie der in dritter Ordnung berührenden Ellipsoide (unter Umständen Flächen zweiten Grades überhaupt) definirt wird, und damit auch die Gestalt des Normalenbündels, dessen optisch wirksamster, die Netzhaut durchschneidender Theil zugleich auf der Centrafläche des betreffenden Ellipsoids liegt. Letztere muss man sich auf der Netzhaut selbst denken, und zwar in Berührung mit denjenigen Theilen, welche den Lichteindruck auf das Gehirn fortpflanzen, und erhält dadurch ein Mittel, sich auf rein geometrischem Wege über die Wirkung der Accommodation des Auges auf das Sehen Anschauungen zu bilden, für welche die einfache Form des *Sturm*schen Conoids nicht hinreicht.

Zwei weitere Grössen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$, die Krümmungshalbmesser der Evoluten von den durch die Tangenten der Krümmungslinien gehenden Hauptschnitten der Wellenfläche, bestimmen eine andere Serie von in dritter Ordnung berührenden Ellipsoiden, deren Betrachtung übrigens für optische Zwecke von geringerer Bedeutung zu sein scheint.

§ 2.

Die Polstrecken der Linien auf den Flächen.

Aus der Gleichung der Fläche $z=f(x,y)$ erhält man durch partielle Differentiation

$$\frac{\partial z}{\partial x}=p,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=q,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=r,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=s,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=t,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=u,\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=\mathfrak{u},\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=v,\quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=w.$$

Wenn man von einem Punkt S der Fläche zu einem unendlich nahen S' übergeht, so hat man die Gleichungen

$$dz=p\,dx+q\,dy,\quad dp=r\,dx+s\,dy,\quad dq=s\,dx+t\,dy.$$

Beim Uebergang zu einem dritten Punkt S'' ist zu setzen

$$d^2p=dr\,dx+ds\,dy+r\,d^2x+s\,d^2y,\quad d^2q=ds\,dx+dt\,dy+s\,d^2x+t\,d^2y,$$

$$dr=u\,dx+\mathfrak{u}\,dy,\quad ds=\mathfrak{u}\,dx+v\,dy,\quad dt=v\,dx+w\,dy,$$

also

$$d^2p=u\,dx^2+2\mathfrak{u}\,dx\,dy+v\,dy^2+r\,d^2x+s\,d^2y,$$
$$d^2q=\mathfrak{u}\,dx^2+2v\,dx\,dy+w\,dy^2+s\,d^2x+t\,d^2y.$$

Um abzukürzen, setzen wir

$$\varkappa^2 = 1+p^2+q^2, \quad \varepsilon = dp\,dx+dq\,dy = r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2,$$

$$\eta = q\,dp-p\,dq.$$

Das Linienelement auf der Fläche wird mit $d\sigma$ bezeichnet und constant angenommen, also ist $d^2\sigma = 0$, $S'B$ (Fig. 1) ist die geradlinige Verlängerung von SS', $S'A$ die geodätische Verlängerung; setzt man $S'A = S'B = S'C = 1$, so ist $\angle\, CAB = 90^0$, AB parallel mit der Flächennormale in S'. Ferner hat man, wenn ϱ der Krümmungshalbmesser von $SS'S''$, ϱ' von $SS'A$, also zugleich des durch die geodätische Linie $SS'A$ gehenden Normalschnitts der Fläche und ϱ'' der geodätische Krümmungshalbmesser von $SS'S''$ ist,

$$CB = \frac{d\sigma}{\varrho}, \quad AB = \frac{d\sigma}{\varrho'}, \quad CA = \frac{d\sigma}{\varrho''},$$

somit $\frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{\varrho'^2}+\frac{1}{\varrho''^2}$. $\angle\, CBA = \Omega$ ist der Winkel zwischen der Osculationsebene $SS'S''$ der gegebenen Curve und der Flächennormale, also

$$\varrho = \varrho'\cos\Omega, \quad \varrho' = \varrho''\operatorname{tg}\Omega.$$

Da nun

$$\varrho' = \frac{\varkappa\, d\sigma^2}{\varepsilon} \quad \text{und} \quad \varrho'' = \frac{d\sigma}{\omega}$$

ist, so handelt es sich zunächst darum, Ausdrücke für $\operatorname{tg}\Omega$ und $\omega = \sin\omega$ zu finden. Zu diesem Zweck ziehe man in der Tangentialebene von S' aus $S'S'''$ senkrecht auf SS' (also auch senkrecht auf der Ebene des Dreiecks $S'AB$). Die Projectionen von SS' und $S'S'''$ auf den Axen sind beziehungsweise dx, dy, dz und dx', dy', dz', und α, β, γ sind die Winkel, welche $S'S'''$ mit den Axen bildet. Da $S'S'''$ in der Tangentialebene von S liegt, so ist $dz' = p\,dx'+q\,dy'$, und weil $\angle\, SS'S''' = 90^0$, $dx\,dx'+dy\,dy'+dz\,dz' = 0$, somit

$$dx'-\frac{q\,dz+dy}{p\,dy-q\,dx}\,dz' = 0, \quad dy'+\frac{p\,dz+dx}{p\,dy-q\,dx}\,dz' = 0,$$

also

$$\cos\alpha = \frac{q\,dz+dy}{\varkappa\, d\sigma}, \quad \cos\beta = -\frac{p\,dz+dx}{\varkappa\, d\sigma}, \quad \cos\gamma = \frac{p\,dy-q\,dx}{\varkappa\, d\sigma},$$

indem

$$(q\,dz+dy)^2+(p\,dz+dx)^2+(p\,dy-q\,dx)^2 = \varkappa^2 d\sigma^2$$

ist, weil

$$dz = p\,dx+q\,dy.$$

Die Richtungscosinus von SS' sind $\frac{dx}{d\sigma}$, $\frac{dy}{d\sigma}$, $\frac{dz}{d\sigma}$ und diejenigen von $S'S''$

$$\frac{dx}{d\sigma}+d\frac{dx}{d\sigma}, \quad \frac{dy}{d\sigma}+d\frac{dy}{d\sigma}, \quad \frac{dz}{d\sigma}+d\frac{dz}{d\sigma},$$

oder da

$$d\frac{dx}{d\sigma} = \frac{d\sigma\, d^2x - dx\, d^2\sigma}{d\sigma^2} = \frac{d^2x}{d\sigma} \text{ u. s. w.,} \quad \frac{dx}{d\sigma} + \frac{d^2x}{d\sigma} \text{ u. s. w.}$$

Mithin

$$\sin\omega = \cos S'''S'S'' = \left(\frac{dx}{d\sigma} + \frac{d^2x}{d\sigma}\right)\cos\alpha + \text{u. s. w.}$$

$$\sin\omega = \omega = \frac{1}{\varkappa d\sigma^2}\{d^2x(qdz+dy) - d^2y(pdz+dx) + d^2z(pdy-qdx)\}.$$

Nach dem Obigen ist

$$\operatorname{tg}\Omega = \frac{\varrho'}{\varrho''} = \frac{\varkappa . d\sigma . \omega}{\varepsilon},$$

oder

$$\operatorname{tg}\Omega = \frac{1}{\varepsilon . d\sigma}\{d^2x(qdz+dy) - d^2y(pdz+dx) + d^2z(pdy-qdx)\}.$$

Zur Bestimmung der Werthe von d^2x, d^2y, d^2z hat man durch Differentiation von $d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ und $dz = pdx + qdy$

$$dx\, d^2x + dy\, d^2y + dz\, d^2z = 0,$$

$$pd^2x + qd^2y - d^2z = -\varepsilon,$$

$$(qdz+dy)d^2x - (pdz+dx)d^2y + (pdy-qdx)d^2z = \varepsilon d\sigma \operatorname{tg}\Omega;$$

also

$$d^2x = -\frac{p}{\varkappa^2}\varepsilon + \frac{\varepsilon}{\varkappa^2 d\sigma}(qdz+dy)\operatorname{tg}\Omega,$$

$$d^2y = -\frac{q}{\varkappa^2}\varepsilon - \frac{\varepsilon}{\varkappa^2 d\sigma}(pdz+dx)\operatorname{tg}\Omega,$$

$$d^2z = \frac{\varepsilon}{\varkappa^2} + \frac{\varepsilon}{\varkappa^2 d\sigma}(pdy-qdx)\operatorname{tg}\Omega.$$

Die Tangentialebenen von S und S' schneiden sich in einer Geraden, der conjugirten Tangente des Elements SS'; ebenso schneiden sich die Tangenten von S' und S'' in der conjugirten Tangente des Elements $S'S''$; beide conjugirte Tangenten schneiden sich in einem Punkt T, *dem Pol* der Linie $SS'S''$. Die erste conjugirte Tangente entspricht den Gleichungen $dz = pdx + qdy$ und $dz = (p+dp)dx + (q+dq)dy$ oder $\varepsilon = 0$; woraus, da $\eta = qdp - pdq$ (s. o.),

$$dx + \frac{dq}{\eta}dz = 0, \quad dy - \frac{dp}{\eta}dz = 0.$$

Die Gleichungen der zweiten conjugirten Tangente sind

$$dx + \left(\frac{dq}{\eta} + d\frac{dq}{\eta}\right)dz = 0, \quad dy - \left(\frac{dp}{\eta} + d\frac{dp}{\eta}\right)dz = 0.$$

Der Winkel zwischen beiden conjugirten Tangenten sei $= \tau$, so ist

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{1}{A}\sqrt{\left\{\left(d\frac{dp}{\eta}\right)^2+\left(d\frac{dq}{\eta}\right)^2+\left(\frac{dp}{\eta}d\frac{dq}{\eta}-\frac{dq}{\eta}d\frac{dp}{\eta}\right)^2\right\}},$$

$$A = 1+\frac{dp}{\eta}\left(\frac{dp}{\eta}+d\frac{dp}{\eta}\right)+\frac{dq}{\eta}\left(\frac{dq}{\eta}+d\frac{dq}{\eta}\right) = 1+\left(\frac{dp}{\eta}\right)^2+\left(\frac{dq}{\eta}\right)^2,$$

da die Grössen $d\frac{dp}{\eta}$ und $d\frac{dq}{\eta}$ neben $\frac{dp}{\eta}$ und $\frac{dq}{\eta}$ verschwinden.

Ferner ist

$$d\frac{dp}{\eta} = p\frac{dpd^2q-dqd^2p}{\eta^2}, \quad d\frac{dq}{\eta} = q\frac{dpd^2q-dqd^2p}{\eta^2},$$

also

$$\operatorname{tg}\tau = \varkappa\frac{dpd^2q-dqd^2p}{dp^2+dq^2+(qdp-pdq)^2}.$$

Für $\sin SS'T$ erhält man aus den Gleichungen der Durchschnittslinie der Tangentialebenen von S und S', und weil $\frac{dx}{SS'}$ u. s. w. die Cosinus der Winkel sind, welche SS' mit den Axen bildet,

$$\sin SS'T = \frac{\varkappa\varepsilon}{d\sigma\sqrt{dp^2+dq^2+\eta^2}};$$

ST ist $= \frac{1}{\operatorname{tg}\tau}SS'.\sin SS'T$, also erhält man für *die Polstrecke* der Linie $SS'S''$ den Ausdruck

$$(1.)\qquad ST = \frac{\varepsilon\sqrt{dp^2+dq^2+\eta^2}}{dpd^2q-dqd^2p}.$$

Es möge hier gleich bemerkt werden, was für das Folgende wichtig ist, dass $ST=\infty$ wird, wenn man die unendlich kleinen Grössen dritter Ordnung vernachlässigt, also $d^2p=d^2q=0$ setzt. Um diesen Werth zu entwickeln, substituirt man die oben angegebenen Werthe von dp, dq, d^2p, d^2q und erhält

$$(2.)\quad \begin{cases} \sqrt{dp^2+dq^2+\eta^2} = \sqrt{\{[(1+q^2)r^2+(1+p^2)s^2-2pqrs]dx^2} \\ +[(1+q^2)s^2+(1+p^2)t^2-2pqst]dy^2+2[(1+q^2)rs+(1+p^2)st-pq(rt+s^2)]dxdy\}, \end{cases}$$

$$(3.)\quad \begin{cases} dpd^2q-dqd^2p = (ur-us)dx^3+(2vr-ut-ws)dx^2dy \\ \qquad +(vs+wr-2ut)dxdy^2+(ws-vt)dy^3 \\ +\frac{s^2-rt}{\varkappa^2}\{qrdx^3-(pr-2qs)dx^2dy+(qt-2ps)dxdy^2-ptdy^3+\varepsilon d\sigma\operatorname{tg}\Omega\}. \end{cases}$$

Bei der Entwicklung dieses Ausdrucks hat man in den Werthen von d^2p und d^2q diejenigen von d^2x und d^2y zu substituiren und bei der Entwicklung des Factors von $\operatorname{tg}\Omega$ zu bemerken, dass

$$\{s(qdz+dy)-t(pdz+dx)\}(rdx+sdy)-\{r(qdz+dy)-s(pdz+dx)\}(sdx+tdy)$$
$$= (s^2-rt)d\sigma^2$$

ist, wenn man die Gleichungen $dz^2 = (pdx+qdy)^2$ und $d\sigma^2 = dx^2+dy^2+dz^2$ berücksichtigt. Der allgemeine Ausdruck für ST wird um vieles einfacher, wenn man die Normale als z-Axe und die Tangenten der Krümmungslinien durch S als x- und y-Axen annimmt; dann ist $p = q = s = 0$,

$$(4.)\quad ST = \frac{(rdx^2+tdy^2)\sqrt{r^2dx^2+t^2dy^2}}{urdx^3-(ut-2vr)dx^2dy+(wr-2ut)dxdy^2-vtdy^3-rtd\sigma(rdx^2+tdy^2)\operatorname{tg}\Omega}.$$

Bezeichnet man die den Krümmungslinien $dy = 0$ und $dx = 0$ entsprechenden Hauptkrümmungshalbmesser mit L und L', so ist $L = \frac{1}{r}$ und $L' = \frac{1}{t}$; sind ferner M und N' die speciellen Werthe von ST, welche den durch die Tangenten der Krümmungslinien $dy = 0$ und $dx = 0$ gehenden Normalschnitten der Fläche, für die also $\Omega = 0$ ist, entsprechen, so hat man aus dem Werth für ST

$$(5.)\quad M = \frac{1}{uL}, \qquad N' = -\frac{1}{vL'}.$$

Es lassen sich also in jedem Punkt S einer Fläche ausser den beiden Hauptkrümmungshalbmessern L und L' noch zwei weitere Strecken M und N' bestimmen, die *Polstrecken der beiden Hauptschnitte;* sie sind der Abstand des Punkts S von dem Durchschnitt dreier Ebenen, welche die Fläche in den unendlich nahen Punkten S, S', S'' berühren, und eignen sich vorzugsweise zur Beurtheilung der Frage über die in dritter Ordnung berührenden Flächen zweiten Grades, sowie auch über die Theorie des Sehens, wenn man diese Untersuchungen auf die Wellenfläche anwendet.

Die vorstehenden Entwicklungen lassen sich in folgender Weise zusammenfassen:

Jeder Linie, die durch einen Punkt S auf einer Fläche geht, entspricht ein zweiter Punkt T, welcher Pol genannt werden soll, und eine Strecke ST, die Polstrecke. T ist der Durchschnitt von drei Ebenen, welche die Fläche in S und in zwei unendlich nahen Punkten S', S'' der gegebenen Linie berühren.

Der allgemeine Ausdruck der Polstrecken für ein beliebiges Coordinatensystem ist in den Gleichungen (1.), (2.), (3.) und für ein specielles in (4.) enthalten. Setzt man in (4.) $\operatorname{tg}\Omega = 0$, so erhält man den Werth für die Polstrecken der geodätischen Linien, welche durch einen Punkt S einer Fläche gehen, da die Osculationsebenen dieser Linien die Normale der Fläche enthalten. In (5.) sind endlich die Werthe für die Polstrecken M und N' derjenigen geodätischen Linien (oder auch Normalschnitte der

Fläche) angegeben, welche die Krümmungslinien von S berühren. Die Polstrecken haben für die Theorie der Flächenkrümmung vielfache Bedeutung, namentlich sind die Polstrecken M und N' für die Theorie des Sehens wichtig, insofern als sie dazu dienen, über die Gestalt der Centrafläche von der Wellenfläche mit Hülfe der in dritter Ordnung berührenden Flächen zweiten Grades Anhaltspunkte zu geben; da man die Form der allgemeinen Centrafläche nicht kennt, so tritt an ihre Stelle diejenige der osculirenden Fläche zweiten Grades.

§ 3.

Die Krümmungshalbmesser von den Evoluten der Flächenschnitte.

Wir bezeichnen wie oben den Krümmungshalbmesser der Curve $SS'S''$ (Taf. 2 Fig. 1) mit ϱ und ferner denjenigen ihrer Evolute mit $\mathfrak{r}$, so ist $\mathfrak{r} = \varrho \frac{d\varrho}{d\sigma}$, da die gegebene Curve und ihre Evolute gleiche Contingenzwinkel haben und das Element der letzteren $d\varrho$ ist. Ferner ist $\varrho = \varrho' \cos\Omega$, wenn ϱ' der Krümmungshalbmesser des durch die gegebene Curve gehenden Normalschnittes ist,

$$\varrho' = \frac{\varkappa d\sigma^2}{\varepsilon}, \quad \varrho = \frac{\varkappa d\sigma^2}{\varepsilon} \cos\Omega, \quad d\varrho = d\sigma^2 \frac{\varepsilon d\varkappa - \varkappa d\varepsilon}{\varepsilon^2} \cos\Omega,$$

$$d\varkappa = \frac{p\,dp + q\,dq}{\varkappa}, \quad d\varrho = d\sigma^2 \frac{\varepsilon(p\,dp + q\,dq) - \varkappa^2 d\varepsilon}{\varepsilon^2 \varkappa} \cos\Omega.$$

Nun ist

$$\varepsilon = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2,$$

also

$$d\varepsilon = dr\,dx^2 + 2ds\,dx\,dy + dt\,dy^2 + 2(r\,dx + s\,dy)d^2x + 2(s\,dx + t\,dy)d^2y$$

und mit Benutzung der oben angegebenen Werthe von dr, ds, dt, d^2x, d^2y

$$d\varepsilon = u\,dx^3 + 3w\,dx^2dy + 3v\,dx\,dy^2 + w\,dy^3 - \frac{2\varepsilon}{\varkappa^2}\{(pr+qs)dx + (ps+qt)dy\}$$
$$+ 2\frac{\varepsilon}{\varkappa^2 d\sigma}\{(r\,dx + s\,dy)(q\,dz + dy) - (s\,dx + t\,dy)(p\,dz + dx)\}\operatorname{tg}\Omega;$$

ferner ist

$$p\,dp + q\,dq = (pr+qs)dx + (ps+qt)dy,$$

also

$$d\varrho = \frac{d\sigma^2}{\varepsilon^2\varkappa}\cos\Omega[-\varkappa^2(u\,dx^3 + 3w\,dx^2dy + 3v\,dx\,dy^2 + w\,dy^3)$$
$$+ 3\varepsilon\{(pr+qs)dx + (ps+qt)dy\}$$
$$-2\frac{\varepsilon}{d\sigma}\operatorname{tg}\Omega\{(r\,dx + s\,dy)(q\,dz + dy) - (s\,dx + t\,dy)(p\,dz + dx)\}].$$

Mit Berücksichtigung von $dz = p\,dx + q\,dy$ findet man, dass

$$(r\,dx+s\,dy)(q\,dz+dy)-(s\,dx+t\,dy)(p\,dz+dx)$$
$$= (pqr-p^2s-s)dx^2+(q^2r-p^2t+r-t)dx\,dy+(q^2s-pqt+s)dy^2$$

ist, mithin

$$(6.)\quad \begin{cases} \mathfrak{r} = \frac{d\sigma^3}{\varepsilon^3}\cos^2\Omega\{-\varkappa^2(u\,dx^3+3\mathfrak{w}\,dx^2dy+3\mathfrak{v}\,dx\,dy^2+w\,dy^3) \\ \qquad +3\varepsilon((pr+qs)dx+(ps+qt)dy)\} \\ -\frac{d\sigma^2}{\varepsilon^2}\sin 2\Omega\{(pqr-p^2s-s)dx^2+(q^2r-p^2t+r-t)dx\,dy+(q^2s-pqt+s)dy^2\}. \end{cases}$$

Nimmt man die Tangenten der Krümmungslinien als x- und y-Axen, also $p = q = s = 0$, so ist

$$(7.)\quad \mathfrak{r} = -\frac{u\,dx^3+3\mathfrak{w}\,dx^2dy+3\mathfrak{v}\,dx\,dy^2+w\,dy^3}{(r\,dx^2+t\,dy^2)^3}d\sigma^3\cos^2\Omega-\frac{(r-t)dx\,dy}{(r\,dx^2+t\,dy^2)^2}d\sigma^2\sin 2\Omega.$$

Um die Krümmungshalbmesser $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ von den Evoluten der durch die Tangenten der Krümmungslinien gehenden Normalschnitte zu erhalten, setzt man $\Omega = 0$ und zugleich entweder $dy = 0$, $d\sigma = dx$, oder $dx = 0$, $d\sigma = dy$, und erhält, da $L = \frac{1}{r}$, $L' = \frac{1}{t}$ ist,

$$(8.)\quad \mathfrak{R} = -uL^3 \qquad \mathfrak{R}' = -wL'^3.$$

§ 4.

Anwendung auf die Flächen zweiten Grades.

Diese Flächen haben zwei Systeme von geradlinigen Erzeugenden, welche beim einmantligen Hyperboloid und hyperbolischen Paraboloid reell, und bei den andern Flächen imaginär sind. Setzt man $\frac{dy}{dx} = \alpha$, so ist

$$u+3\mathfrak{w}\alpha+3\mathfrak{v}\alpha^2+w\alpha^3 = 0,$$

die allgemeine Differentialgleichung derjenigen Flächen, welche durch eine Gerade erzeugt sind. Sie hat also bei den Flächen zweiten Grades mit

$$r+2s\alpha+t\alpha^2 = 0,$$

welche Gleichung die (reellen oder imaginären) Erzeugenden vorstellt, zwei Factoren gemeinschaftlich. Dividirt man die erste durch die zweite, so entsteht der Rest

$$\left\{3\mathfrak{w}-\frac{wr}{t}-2s\left(\frac{3\mathfrak{v}}{t}-\frac{2sw}{t^2}\right)\right\}\alpha+u-r\left(\frac{3\mathfrak{v}}{t}-\frac{2sw}{t^2}\right);$$

hier muss sowohl der Factor von α als auch der Ausdruck ohne α gleich 0 sein, mithin

$$(9.)\quad ut^2-3vrt+2wrs=0,\qquad wr^2-3wrt+2ust=0.$$

Dies sind die beiden Differentialgleichungen, welche die Flächen zweiten Grades charakterisiren. Für das Coordinatensystem $p=q=s=0$ erhält man

$$(10.)\quad ut=3vr,\qquad wr=3wt.$$

Hierdurch vereinfacht sich der Ausdruck für ST in § 2, indem man Zähler und Nenner mit rdx^2+tdy^2 dividirt, in folgenden

$$(11.)\quad ST=\frac{\sqrt{r^2dx^2+t^2dy^2}}{u\,dx-v\,dy-rt\,d\sigma\operatorname{tg}\Omega}.$$

Sind nun L und L' die zwei Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche (zweiten Grades) und $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$ die Krümmungshalbmesser von den Evoluten der beiden durch S gehenden Hauptschnitte, so ist

$$L=\frac{1}{r},\quad L'=\frac{1}{t},$$

und nach (8.) und (10.)

$$u=-\frac{\mathfrak{R}'}{3L'^2L},\quad v=-\frac{\mathfrak{R}}{3L^2L'},$$

also

$$(12.)\quad ST=\frac{\sqrt{L'^2dx^2+L^2dy^2}}{-\frac{\mathfrak{R}'}{3L'}dx+\frac{\mathfrak{R}}{3L}dy-d\sigma\operatorname{tg}\Omega}.$$

Setzt man $\frac{dx}{d\sigma}=\cos a$ und $\frac{dy}{d\sigma}=\sin a$, so dass a der Winkel ist, welchen die gegebene durch S gehende Linie mit der einen Krümmungslinie von S bildet, so ist auch

$$(13.)\quad ST=\frac{\sqrt{L^2\sin a^2+L'^2\cos a^2}}{\frac{\mathfrak{R}}{3L}\sin a-\frac{\mathfrak{R}'}{3L'}\cos a-\operatorname{tg}\Omega}.$$

Dies ist der allgemeine Ausdruck für die Polstrecken beliebiger Linien auf den Flächen zweiten Grades und auch für die Polstrecken von geodätischen Linien oder von Normalschnitten, wenn man $\operatorname{tg}\Omega=0$ setzt. Wird im letzteren Fall zuerst $a=90^0$ und dann $a=0^0$ angenommen, so erhält man zwei specielle Werthe von ST, die wir wie oben bei der allgemeinen Fläche auch mit M und N' bezeichnen, nämlich

$$(14.)\quad M=\frac{3L^2}{\mathfrak{R}},\quad N'=-\frac{3L'^2}{\mathfrak{R}'}.$$

Um die Bedeutung von M und N' zu finden, nehmen wir ein System von confocalen Flächen an:

$$\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-\beta^2}+\frac{z^2}{\lambda^2-\gamma^2} = 1, \quad \lambda>\gamma>\mu>\beta>\nu;$$

(λ) ist das Ellipsoid, (μ) das einmantlige, (ν) das zweimantlige Hyperboloid. Nun ist, wenn L und L' die beiden Hauptkrümmungshalbmesser von (λ) sind, und der Einfachheit wegen $\lambda\sqrt{\lambda^2-\beta^2}\sqrt{\lambda^2-\gamma^2}=\pi$ gesetzt wird,

$$L=\frac{1}{\pi}(\lambda^2-\mu^2)^{\frac{3}{2}}(\lambda^2-\nu^2)^{\frac{1}{2}}, \quad L'=\frac{1}{\pi}(\lambda^2-\mu^2)^{\frac{1}{2}}(\lambda^2-\nu^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Für die Krümmungshalbmesser $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ der Evoluten von den beiden Normalschnitten von (λ), welche durch die Tangenten der Krümmungslinien gehen, hat man die Werthe $\mathfrak{R}=L\frac{dL}{d\sigma}$ und $\mathfrak{R}'=L'\frac{dL'}{d\sigma}$,

$$\frac{dL}{d\sigma}=-\frac{3\mu}{\pi}(\lambda^2-\mu^2)^{\frac{1}{2}}(\lambda^2-\nu^2)^{\frac{1}{2}}\frac{d\mu}{d\sigma}, \quad \frac{dL'}{d\sigma}=-\frac{3\nu}{\pi}(\lambda^2-\mu^2)^{\frac{1}{2}}(\lambda^2-\nu^2)^{\frac{1}{2}}\frac{d\nu}{d\sigma}.$$

Bei der Differentiation von L ist ν als constant anzusehen, weil der Normalschnitt die Krümmungslinie $\nu=\text{const.}$ berührt, mithin auf demselben die Zunahme von ν unendlich klein ist, gegenüber derjenigen von μ. Bei der Differentiation von L' ist dagegen μ constant. Somit ist

$$(15.)\qquad \mathfrak{R}=-\frac{3\mu}{\pi^2\sqrt{\mu^2-\nu^2}}(\lambda^2-\mu^2)^{\frac{3}{2}}(\lambda^2-\nu^2)\sqrt{\mu^2-\beta^2}\sqrt{\gamma^2-\mu^2},$$

$$(16.)\qquad \mathfrak{R}'=-\frac{3\nu}{\pi^2\sqrt{\mu^2-\nu^2}}(\lambda^2-\mu^2)(\lambda^2-\nu^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\beta^2-\nu^2}\sqrt{\gamma^2-\nu^2},$$

da

$$\frac{d\mu}{d\sigma}=\sqrt{\frac{(\mu^2-\beta^2)(\gamma^2-\mu^2)}{(\lambda^2-\mu^2)(\mu^2-\nu^2)}} \quad\text{und}\quad \frac{d\nu}{d\sigma}=\sqrt{\frac{(\beta^2-\nu^2)(\gamma^2-\nu^2)}{(\lambda^2-\nu^2)(\mu^2-\nu^2)}}$$

ist.

Aus (14.), (15.) und (16.) folgt weiter

$$(17.)\qquad M=-\frac{(\lambda^2-\mu^2)^{\frac{3}{2}}(\mu^2-\nu^2)^{\frac{1}{2}}}{\mu\sqrt{\mu^2-\beta^2}\sqrt{\gamma^2-\mu^2}}, \quad N'=\frac{(\lambda^2-\nu^2)^{\frac{3}{2}}(\mu^2-\nu^2)^{\frac{1}{2}}}{\nu\sqrt{\beta^2-\nu^2}\sqrt{\gamma^2-\nu^2}},$$

d. h. *M und N' sind die Krümmungshalbmesser der zwei Normalschnitte von (μ) und (ν), welche durch die Tangentialebenen von (λ) gebildet werden.*

Dies ist ein in anderer Form längst bekanntes Resultat. Um Verwechslungen zu verhüten, mögen noch einige Erläuterungen beigefügt werden. Durch einen Punkt S des Ellipsoids (λ) geht eine Krümmungslinie, welche der Durchschnitt mit dem einmantligen Hyperboloid (μ) ist. Man ziehe in S die Tangente dieser Krümmungslinie und lege durch sie zwei Ebenen, wovon die erste normal zu (λ), die zweite normal zu (μ) ist; dadurch erhält man zwei Normalschnitte und auf dem ersten, der auf (λ)

liegt, nehme man die Punkte S', S'' beiderseits von S und unendlich nahe an; die Normalen dieser Schnittcurve in S' und S'' (welche also nicht Normalen von (λ) sind) schneiden sich im Krümmungsmittelpunkt l', $Sl' = L'$; die Tangentialebenen von (λ) in S', S, S'' schneiden sich im Pol m dieses Normalschnitts, welcher nach (17.) zugleich Krümmungsmittelpunkt von (μ) ist, da $Sm = M$. Der Punkt m lässt sich aber auch auf die gewöhnliche Art finden, indem man auf dem zweiten Normalschnitt, der auf (μ) liegt, zwei Punkte T' und T'' beiderseits von S und unendlich nahe annimmt; die Normalen der Schnittcurve auf (μ) in T' und T'' (welche nicht zugleich Normalen von (μ) sind) schneiden sich in m. Würde man aber auf der Krümmungslinie zwei unendlich nahe Punkte annehmen, und durch sie, wie auch durch S, Tangentialebenen von (λ) ziehen, so würden sie sich in einem Punkt schneiden, verschieden von m, der nach (13.) bestimmt wird, indem der Winkel Ω, welchen die Osculationsebene der Krümmungslinie mit der Normale bildet, nicht gleich Null ist.

§ 5.

Die Berührung dritter Ordnung.

Es lässt sich nun die Frage hinsichtlich der Flächen zweiten Grades, welche mit der allgemeinen Fläche eine Berührung dritter Ordnung haben, mittelst der sechs Grössen L, L', M, N', $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$, von welchen wir annehmen, dass sie bestimmt sind, nämlich die zwei Hauptkrümmungshalbmesser L, L' nach der gewöhnlichen Methode, die beiden Polstrecken M, N' der durch die Tangenten der Krümmungslinien im Punkt S gehenden Normalschnitte der Fläche nach (5.), die Krümmungshalbmesser von den Evoluten dieser Normalschnitte $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$ nach (8.), näher beantworten:

1) Man untersucht diejenigen Flächen zweiten Grades, welche mit der allgemeinen Fläche in einem Punkt S die vier Grössen L, L', M, N' gemein und insofern mit ihr eine Berührung dritter Ordnung haben. Dieser Fall ist der wichtigere, denn er erlaubt nicht bloss an die Stelle der Centrafläche von der allgemeinen oder auch der Wellenfläche diejenige der osculirenden Fläche zweiten Grades zu setzen, und wenn man sich letztere auf der Netzhaut des Auges denkt, sich erweiterte Vorstellungen über die Vorgänge beim Sehen zu bilden, sondern auch an die Stelle des unendlich dünnen Normalen- oder Lichtstrahlenbündels der Wellenfläche dasjenige der Fläche zweiten Grades zu substituiren, dessen Betrachtung, wie aus dem

Folgenden hervorgehen wird, zu Resultaten führt, die das Conoid von *Sturm* oder *Hamilton* nur als eine specielle Form erscheinen lassen.

2) Man untersucht die Flächen zweiten Grades, welche mit der allgemeinen Fläche in S die vier Grössen L, L', $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$ gemein haben, wodurch eine andere Art der Berührung dritter Ordnung entsteht. Dieser zweite Fall wird hier nicht in Betracht gezogen, da er mit der Theorie des Sehens nicht in so unmittelbarer Verbindung zu stehen scheint wie der erste.

Bei der Untersuchung nach (1.) geht man von den drei Gleichungen

$$\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-\beta^2}+\frac{z^2}{\lambda^2-\gamma^2} = 1, \quad \lambda>\gamma>\mu>\beta>\nu$$

aus, welche ein Confocalen-Tripel, (λ) das Ellipsoid, (μ) das einmantlige, (ν) das zweimantlige Hyperboloid vorstellen, deren gemeinsamer Durchschnittspunkt S ist, in welchem die Normalen der drei Flächen gezogen werden. L, L' sind die Hauptkrümmungshalbmesser von (λ), M, M' von (μ), N, N' von (ν); sie sind durch die Bedingungsgleichungen verbunden

$$\frac{L'}{L}+\frac{M}{M'} = 1, \quad \frac{M'}{M}+\frac{N}{N'} = 1, \quad \frac{N'}{N}+\frac{L}{L'} = 1.$$

Kennt man vier von diesen Grössen, z. B. L, L', M, N', so sind auch die zwei anderen gegeben. Wir nehmen nun an, dass in einem Punkt S der Wellen- (oder der allgemeinen) Fläche die beiden Hauptkrümmungshalbmesser L und L' und die beiden Polstrecken M und N' gegeben sind; so sind also sämmtliche sechs Hauptkrümmungshalbmesser eines confocalen Tripels gegeben, dessen Ellipsoid (λ) mit der Wellenfläche in S, wenn sie hier convex-convex ist, eine Berührung dritter Ordnung hat. Solche Confocalen-Tripel giebt es unendlich viele, aber sie sind an die Bedingung gebunden, dass ihre Mittelpunkte O auf einer bestimmten durch S gehenden Linie liegen, welche den Gleichungen

$$\frac{p}{p'} = -\frac{M'}{L}, \quad \frac{p'}{p''} = \frac{N'}{M}, \quad \frac{p''}{p} = \frac{L'}{N} \text{*)}$$

entspricht; p, p', p'' sind die Abstände des Punktes O von den durch S gehenden Tangentialebenen von (λ), (μ), (ν).

Jedem Ellipsoid (λ) dieser Gruppe entspricht eine specielle Centrafläche, welche die Centrafläche der Wellenfläche in den Krümmungsmittelpunkten l und l' ($L = Sl$, $L' = Sl'$) berührt. Die gemeinsame Tangential-

---

*) Diese Relationen findet man, wenn die Grössen p, p', p'', L, L', ... durch die elliptischen Coordinaten λ, μ, ν ausgedrückt werden.

ebene der Centraflächen in l geht durch Sl und die Tangente der einen Krümmungslinie in S von der Wellenfläche oder von den osculirenden Ellipsoiden, und zwar durch diejenige, welche den Flächen (μ) entspricht. Die gemeinsame Tangentialebene der Centraflächen in l' geht ebenfalls durch Sl' und die Tangente der andern Krümmungslinie in S.

Diese Data genügen für den vorliegenden Zweck, wo es sich nur darum handelt, an die Stelle der Centrafläche von der Wellenfläche diejenige von einem der in dritter Ordnung berührenden Ellipsoide (λ) zu setzen, und ihre Stellung auf der Netzhaut je nach dem Werth der Grössen L, L', M, N' zu ermitteln. Hierzu soll (Fig. 2) dienen, welche die drei Hauptschnitte der Centrafläche eines Ellipsoids, dessen Halbaxen OX, OY, OZ sind, in Parallelperspective vorstellt; diejenigen Theile der Hauptschnitte, welche zwischen beiden Mänteln der Centrafläche liegen, sind als undurchsichtig angenommen. Schneidet man sie aus Carton aus und fügt sie rechtwinklig zusammen, so erhält man eine bessere Vorstellung von der Fläche als durch ein Gypsmodell. Die drei Ellipsen sind die Rückkehrkanten der Fläche, in welchen sie sich zuschärft, etwa wie der untere Theil einer Säbelscheide: dies sind die für die Theorie des Sehens wichtigsten Theile, weil hier die stärkste Concentration der Lichtstrahlen stattfindet. Den entgegengesetzten Charakter haben diejenigen Theile der Centrafläche, auf welchen die drei Evoluten von Ellipsen liegen, da sie hier am flachsten ist; somit findet in diesen Stellen ein Minimum der Concentration statt.

Man kann sich die Fläche auch unter der Form von zwei Paaren von Kelchen oder Vasen vorstellen, die sich gegenseitig rechtwinklig durchdringen. Das erste Paar hat die Ellipse in der xy-Ebene als gemeinschaftliche Basis und endigt zugeschärft in den Bögen $K''K'''$ und KK' der Ellipse in der xz-Ebene. Das zweite Paar hat die Ellipse in der yz-Ebene als gemeinschaftliche Basis und endigt zugeschärft in den Bögen KK''' und $K'K''$ jener Ellipse.

§ 6.

Die Theorie des Sehens gegründet auf die Betrachtung der Centrafläche.

Wenn ein Lichtstrahlenbündel im Auge gebrochen wird, so sind die gebrochenen Strahlen Normalen der Wellenfläche, welche man sich zwischen der Krystalllinse und der Netzhaut zu denken hat; die Axe des gebrochenen Strahlenbündels trifft die Fläche im Punkt S, für welchen die vier Grössen L, L', M, N' nach dem Obigen als bestimmt angenommen

werden. Hierauf wird die Centrafläche eines der in dritter Ordnung berührenden Ellipsoide (oder unter Umständen Hyperboloide) construirt, welche von der Strahlenaxe Sll' in den Punkten l und l' berührt wird; diese liegen auf der Netzhaut, entweder beide zugleich oder nur einer, und in ihnen findet die grösste Concentration der Lichtstrahlen statt, sie sind also der wirksame Theil des Strahlenbündels. Es sind nun folgende Fälle zu unterscheiden:

1) Die Axe des Strahlenbündels Sll' ist zugleich Axe der Centrafläche, also fallen die Punkte l und l' entweder mit A, A' oder B, B' oder C, C' zusammen. Die Grössen M und N' müssen beide unendlich sein, somit ist S ein ausgezeichneter Punkt der Wellenfläche. Das Auge muss also vermöge der Accommodation eine besondere Anstrengung machen, hinsichtlich der Richtung der gebrochenen Lichtstrahlen, damit bei der Wellenfläche solche speciellen Krümmungsverhältnisse eintreten, in Folge deren die beiden Polstrecken M und N' unendlich werden. In diesem Fall wird ein Punkt in der Nähe oder in der Ferne, oder in mässiger Entfernung längere Zeit genau betrachtet und fixirt, weil zugleich die Wirkung der Accommodation sich auf die beiden Hauptkrümmungshalbmesser L und L' erstreckt, die gleich XA und XA' oder YB und YB' oder ZC und ZC' sein können. Jedesmal liegen die wirksamsten Theile der Centrafläche, nämlich die Bögen der elliptischen Hauptschnitte, welche hier die Strahlenaxe senkrecht schneiden, auf der Netzhaut. (Eine weitere Begründung dieser Ansichten erhält man durch die Betrachtung der unendlich dünnen Normalenbündel (§ 8)). Aus (14.) folgt, dass wenn M und N' unendlich sind, zugleich $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ Null werden; $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ sind die Krümmungshalbmesser von den Evoluten der Hauptschnitte der osculirenden Fläche zweiten Grades (und nicht zugleich von der Wellenfläche).

Wenn man das System der Gleichungen

$$\begin{array}{lll} L = XA & L = YB & L = ZC \\ L' = XA' & L' = YB' & L' = ZC' \end{array}$$

näher ins Auge fasst, so findet man, dass entweder beide Werthe von L und L' klein, oder der eine klein, der andere gross, oder endlich beide gross sein können, je nachdem ein Punkt in der Nähe, in mässiger oder grösserer Entfernung fixirt wird. Das normale Auge mit vollständiger Accommodation disponirt über diese drei Modificationen; die Centrafläche kann jede beliebige Lage auf der Netzhaut annehmen, so dass je nach

Bedürfniss der eine oder andere ihrer Theile zur Verwendung kommt. Beim nicht normalen Auge dagegen vermindert sich diese Fähigkeit, der Kurzsichtige ist auf diejenigen Theile der Centrafläche beschränkt, die in der Nähe der x-Axe und der Fernsichtige auf solche, die in der Nähe der z-Axe liegen.

Das Vorhergehende lässt sich so zusammen fassen:

Bei vollständiger Accommodation findet eine solche Einwirkung des Auges auf die Lichtstrahlen bei der Brechung statt, dass zum Behuf des Fixirens eines Punktes die beiden Polstrecken der Wellenfläche M und N' unendlich werden und die Hauptkrümmungshalbmesser L und L' innerhalb gewisser Grenzen variiren, je nachdem man in die Nähe oder Ferne sieht; es kommen alle Theile der Centrafläche von der die Wellenfläche in dritter Ordnung berührenden Fläche zweiten Grades auf der Netzhaut zur Verwendung.

Bei unvollständiger Accommodation, sofern ein Fixiren entweder bloss in die Nähe oder bloss in die Ferne möglich ist, bleibt noch die Fähigkeit $M = N' = \infty$ zu machen, aber die Grenzen, innerhalb welcher L und L' sich verändern, werden enger, so dass nur einzelne Theile der Centrafläche zur Verwendung kommen.

2) Die Axe des Strahlenbündels Sll' liegt in einer Hauptebene der Centrafläche, wie z. B. SDD' in der xz-Ebene. Von den zwei Grössen M und N' ist nur eine unendlich, z. B. hier M, die Strahlenaxe berührt die Centrafläche in ihrem flachsten Theil in D, wo also ein Minimum der Strahlenconcentration stattfindet, und trifft die Rückkehrkante bei D' schief; diese liegt also nicht mehr auf einer bestimmten Netzhautschicht, sondern durchschneidet die einzelnen Schichten und zwar unter einem Winkel, der gleich 90^0 wird, wenn die Strahlenaxe durch einen Kreispunkt des Ellipsoids geht, wo $L = L'$ ist, und die Punkte l und l' in K''' zusammen fallen. Bei D' findet zwar ein Maximum der Concentration statt, allein das Lichtstrahlenbündel (s. u.) hat einen andern Charakter. Das genaue Sehen oder Fixiren ist immer noch möglich, aber in geringerem Grade. Dieser Fall ist ohne Zweifel der häufigste, da eine vollständige Accommodation mit Verwendung der wirksamsten und günstigsten Theile der Centrafläche zu den Seltenheiten gehören wird.

3) Die Strahlenaxe liegt in keiner Hauptebene, M und N' sind nicht unendlich, es findet also in den wirksamsten Theilen der Centrafläche nur eine Berührung statt. Beim normalen Auge wird dies für alle Punkte zutreffen,

welche von demjenigen, der unmittelbar fixirt wird, mehr oder weniger entfernt sind. In sehr vielen Fällen aber geht die Fähigkeit, die wirksamsten Theile der Centrafläche zu verwenden, ganz verloren, und das Auge ist nur auf die mittleren Partien, welche von den Axen entfernt liegen, beschränkt. Um hierüber weitere Anhaltspunkte zu gewinnen, sind noch einige Ausführungen nöthig.

§ 7.

Die Normalenregelflächen des Ellipsoids.

Die Gleichung eines Ellipsoids E sei

$$(18.)\quad \frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2} = 1.$$

Man ziehe im Punkt S (ξ, η, ζ) desselben die Normale und nehme auf ihr einen Punkt M (x, y, z) an, dessen Abstand von S durch die Gleichung $SM = \frac{m^2}{p}$ gegeben ist, wo p das vom Mittelpunkt O auf die Tangentialebene von S gefällte Perpendikel und m ein Parameter ist, von welchem die Lage des Punktes M auf der Normale abhängt. Man hat nun die Relationen

$$(19.)\quad \xi\left(1+\frac{m^2}{a^2}\right) = x,\quad \eta\left(1+\frac{m^2}{b^2}\right) = y,\quad \zeta\left(1+\frac{m^2}{c^2}\right) = z$$

und nach (18.)

$$(20.)\quad \frac{x^2}{a^2\left(1+\frac{m^2}{a^2}\right)^2}+\frac{y^2}{b^2\left(1+\frac{m^2}{b^2}\right)^2}+\frac{z^2}{c^2\left(1+\frac{m^2}{c^2}\right)^2} = 1.$$

Hier ist m^2 positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem der Punkt M mit der Tangentialebene von S auf der gleichen oder auf der entgegengesetzten Seite liegt. Betrachtet man m als constant, so ist (20.) die Gleichung eines Ellipsoids, auf welchem der Punkt M liegt; durch Veränderung des Werthes von m erhält man ein System von Ellipsoiden, und es sollen daher die Flächen (20.) Systemellipsoide genannt werden.

Unter denselben sind folgende vier bemerkenswerth:

$m = 0$, Ellipsoid E; oder nach (18.)

$m^2 = -c^2;\ \frac{a^2x^2}{(a^2-c^2)^2}+\frac{b^2y^2}{(b^2-c^2)^2} = 1$, elliptischer Hauptschnitt der Centrafläche in der xy-Ebene,

$m^2 = -b^2;\ \frac{a^2x^2}{(a^2-b^2)^2}+\frac{c^2z^2}{(b^2-c^2)^2} = 1$, elliptischer Hauptschnitt der Centrafläche in der xz-Ebene,

$m^2 = -a^2;\ \frac{b^2y^2}{(a^2-b^2)^2}+\frac{c^2z^2}{(a^2-c^2)^2} = 1$, elliptischer Hauptschnitt der Centrafläche in der yz-Ebene.

Nimmt man auf einer Normale SM ausser M noch weitere Punkte $M', M'', \dots$ an, denen die Gleichungen $SM' = \frac{m'^2}{p}$, $SM'' = \frac{m''^2}{p}, \dots$ entsprechen, so verhält sich

$$SM : SM' : SM'' : \dots = m^2 : m'^2 : m''^2 : \dots .$$

Da nun auf den Systemellipsoiden (m), (m'), (m''), ... die Parameter $m, m', m'', \dots$ einen constanten Werth haben, so folgt der Satz:

Sämmtliche Normalen eines Ellipsoids bilden mit ihren Durchschnittspunkten auf den Systemellipsoiden ein affin veränderliches System. Die einander entsprechenden Punkte der einzelnen Normalen, welche zu demselben Parameter m gehören, liegen also auf einem Systemellipsoid, und da die elliptischen Schnitte der Centrafläche in den Hauptebenen Systemellipsoide sind, so sind insbesondere auch die Schnittpunkte der Normalen mit den Hauptebenen correspondirende Systempunkte.

Das Ellipsoid E werde durch die Ebene

$$(21.) \qquad \frac{\xi}{A} + \frac{\eta}{B} + \frac{\zeta}{C} = 1$$

geschnitten, so ist nach (19.)

$$(22.) \qquad \frac{x}{A\left(1+\frac{m^2}{a^2}\right)} + \frac{y}{B\left(1+\frac{m^2}{b^2}\right)} + \frac{z}{C\left(1+\frac{m^2}{c^2}\right)} = 1$$

die Gleichung der Systemebenen, von welchen jede das demselben Parameter m entsprechende Systemellipsoid in einer Ellipse schneidet. Alle diese Ellipsen liegen auf einer Normalenregelfläche, deren Basis der Durchschnitt der Ebene (21.) mit E ist; d. h.

Schneidet man ein Ellipsoid durch eine beliebige Ebene und zieht in den einzelnen Punkten der Schnittcurve die Normalen, so erhält man eine Normalenregelfläche, deren correspondirende Systempunkte Ellipsen bilden.

Es sei

$$A\left(1+\frac{m^2}{a^2}\right) = X, \quad B\left(1+\frac{m^2}{b^2}\right) = Y, \quad C\left(1+\frac{m^2}{c^2}\right) = Z,$$

so erhält man aus diesen Gleichungen durch Elimination von m^2

$$(23.) \qquad \begin{cases} \dfrac{Y}{\frac{b^2-c^2}{b^2}B} - \dfrac{Z}{\frac{b^2-c^2}{c^2}C} = 1, \quad -\dfrac{Z}{\frac{a^2-c^2}{c^2}C} + \dfrac{X}{\frac{a^2-c^2}{a^2}A} = 1, \\[2ex] \dfrac{X}{\frac{a^2-b^2}{a^2}A} - \dfrac{Y}{\frac{a^2-b^2}{b^2}B} = 1. \end{cases}$$

Betrachtet man hier X, Y, Z als cartesische Coordinaten eines Punktes (X, Y, Z), so liegt er auf der Geraden (23.), und man hat den Satz:

Die Abschnitte X, Y, Z, welche die Systemebenen einer Normalenregelfläche auf den Axen bilden, sind die Coordinaten einer Geraden (23.).

Sind aber X, Y, Z Ebenen- oder *Plücker*sche Coordinaten, so folgt:

Die Spuren der Systemebenen einer Normalenregelfläche umhüllen in jeder von den drei Axenebenen eine Parabel. Hieraus folgt weiter:

Die Systemebenen einer Normalenregelfläche sind zugleich Osculationsebenen einer kubischen Parabel, also wird jede Systemebene von allen andern in den Tangenten einer (ebenen) Parabel geschnitten.

Es sind nun drei specielle Fälle zu unterscheiden:

I. Die Ebene (21.) steht senkrecht auf einer Axe, z. B. auf der x-Axe, so ist

$$\frac{\xi}{A} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{x}{A\left(1+\frac{m^2}{a^2}\right)} = 1,$$

die Systemebenen stehen also ebenfalls senkrecht auf der x-Axe; durch Combination mit (20.) findet man

$$\frac{y^2}{\frac{b^2}{a^2}(a^2-A^2)\left(1+\frac{m^2}{b^2}\right)^2} + \frac{z^2}{\frac{c^2}{a^2}(a^2-A^2)\left(1+\frac{m^2}{c^2}\right)^2} = 1.$$

Die Schnitte sind demnach Ellipsen, unter welchen sich zwei Gerade befinden; die erste entspricht dem Werth

$$m^2 = -c^2 \quad \text{oder} \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2-A^2)\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)^2$$

und ist eine Sehne des elliptischen Schnittes der Centrafläche in der xy-Ebene; die zweite entspricht dem Werth

$$m^2 = -b^2 \quad \text{oder} \quad z^2 = \frac{c^2}{a^2}(a^2-A^2)\left(1-\frac{b^2}{c^2}\right)^2$$

und ist eine Sehne des elliptischen Schnittes in der xz-Ebene. Diese beiden Sehnen und die Ellipse auf E (für $m = 0$)

$$\frac{y^2}{\frac{b^2}{a^2}(a^2-A^2)} + \frac{z^2}{\frac{c^2}{a^2}(a^2-A^2)} = 1$$

sind die drei Leitlinien der Normalenregelfläche, welche in diesem Fall ein Conoid ist. Nähert sich A unendlich dem Werthe a, so wird das Conoid ein unendlich dünnes Normalenbündel, dessen Basis die Indicatrix von E

bei X ist (Fig. 2), und dessen gerade Leitlinien unendlich kleine Sehnen der elliptischen Durchschnitte der Centrafläche bei A und A' sind. Man findet dasselbe abgebildet und näher besprochen in der Abhandlung von *Sturm* (Compt. rend. 1845. 1 Sem. S. 557), in der Physiologischen Optik von *Helmholtz* 1867. S. 247. Es ist die erste Form des unendlich dünnen Normalen- oder Lichtstrahlenbündels.

II. Die Ebene (21.) steht senkrecht auf einer Hauptebene, z. B. der xy; so ist

$$\frac{\xi}{A}+\frac{\eta}{B}=1 \quad \text{und} \quad \frac{x}{A\left(1+\frac{m^2}{a^2}\right)}+\frac{y}{B\left(1+\frac{m^2}{b^2}\right)}=1.$$

Die Systemebenen umhüllen einen parabolischen Cylinder, der senkrecht auf der xy-Ebene steht, und dessen Basis nach (23.) die Gleichung

$$\frac{X}{\frac{a^2-b^2}{a^2}A}-\frac{Y}{\frac{a^2-b^2}{b^2}B}=1$$

in Tangentialcoordinaten hat.

Bewegt sich die Schnittebene von E parallel mit sich selbst, so bewegt sich auch jede einzelne Systemebene parallel mit sich. Die Normalenregelfläche, welche nun kein Conoid mehr ist, hat als Basis einen elliptischen Schnitt von E, senkrecht zur xy-Ebene und als einzige gerade Leitlinie eine Sehne des elliptischen Schnittes der Centrafläche in der xy-Ebene, deren Gleichung dem Werth $m^2=-c^2$ entspricht, also

$$\frac{x}{A\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)}+\frac{y}{B\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)}=1$$

ist. Eliminirt man ferner aus (20.) und der Gleichung für die Systemebenen zuerst x und setzt danach $m^2=-a^2$, dann y und setzt $m^2=-b^2$, so erhält man jedesmal eine Ellipse. Da nun die Normalenregelfläche durch die Systemebenen nur in Ellipsen geschnitten wird, die bloss in den Axenebenen sich in Gerade verwandeln können, so folgt daraus, dass ihre einzige gerade Leitlinie die Sehne des elliptischen Schnittes der Centralfläche in der xy-Ebene ist.

Nähert sich die Schnittebene von E unendlich der Tangentialebene im Punkt S, so wird die Normalenregelfläche ein unendlich dünnes Normalenbündel, jede einzelne Systemebene (und also auch diejenige von E)

schneidet ihr betreffendes Systemellipsoid in der Indicatrix desselben, nur die gerade Leitlinie wird zu einer unendlich kleinen Sehne des elliptischen Schnittes, welche also die Richtung der Tangente hat, die aber die Normale schief schneidet. Dies ist die zweite Form der Normalenregelfläche und des unendlich dünnen Normalen- oder Lichtstrahlenbündels.

Um von derselben eine Vorstellung zu erwecken, dient Fig. 3; XSZ ist der Durchschnitt des Ellipsoids mit der xz-Ebene, EG ist die Projection eines Schnittes senkrecht zur xz-Ebene, welcher die Basis der Normalenregelfläche ist. Die Sehne eg von dem elliptischen Durchschnitt der Centrafläche in der xz-Ebene ist die gerade Leitlinie; durch die vier Tangenten EG, eg und die beiden Axen ist die Parabel bestimmt, welche die Basis eines Cylinders ist, der von allen Systemebenen, z. B. EG oder $E'G'$, $E''G''$ u. s. f. berührt wird. Der Halbmesser OS ist die Directrix der Parabel. Zieht man irgend eine Tangente an die Parabel, und legt durch sie eine Ebene senkrecht zur Figur, so ist die Schnittcurve auf der Normalenregelfläche eine Ellipse, deren Projectionen erhalten werden, wenn man aus

$$\frac{x}{A\left(1+\frac{m^2}{a^2}\right)}+\frac{z}{C\left(1+\frac{m^2}{c^2}\right)} = 1$$

und (20.) entweder z oder x eliminirt. Nur eine dieser Ellipsen degenerirt in eine Gerade, nämlich eg. Die Projectionen solcher Schnittcurven sind z. B. E_0G_0, $E'G'$, $E''G''$, $G'G'''$; diese Strecken sind zugleich die grossen Axen der Ellipsen. Um sich eine Vorstellung von dem Theil der Normalenregelfläche zwischen E' und G''' zu machen, muss man sich eine Ellipse mit veränderlichen Axen so bewegt denken, dass ihre Ebene stets den parabolischen Cylinder berührt; die einzelnen Punkte ihres Umfanges beschreiben dann diesen Theil der Regelfläche. Nun soll die Schnittebene EG sich parallel bewegen, bis sie zur Tangentialebene in S wird, dann schrumpft die Regelfläche zur Normale SD' ein, der Brennpunkt der Parabel rückt auf der Richtung OF' nach F fort, F ist der Punkt, in dem sich 478 Kreise schneiden (Zeitschrift von *Schlömilch*, XXVIII. S. 304); die gerade Leitlinie rückt ebenfalls parallel mit sich selbst fort, und wird in D' zur Tangente der Ellipse $A'C$. Die zweite Parabel, deren Directrix ebenfalls OS ist, berührt die Normale SD' in ihrem Krümmungsmittelpunkt D. Unmittelbar hingegen, ehe der Grenzzustand eintritt, wird die Regelfläche zu einem unendlich dünnen Normalenbündel, die Basis EG zur Indicatrix in S,

sämmtliche elliptischen Schnitte, z. B. $E_0 G_0$, $E'G'$ u. s. f. werden Indicatrices auf ihren betreffenden Systemellipsoiden; die Normalenregelfläche behält also ihren Charakter bei, auch wenn sie unendlich dünn wird, insbesondere hat sie nur eine gerade Leitlinie, nämlich die unendlich kleine Sehne der Ellipse $A'C$ bei D', und ihre elliptischen Schnitte berühren einen Cylinder, dessen Basis die Parabel mit dem Brennpunkt F und der Directrix OS ist.

Man kann sich also von der zweiten Form des unendlich dünnen Normalen- oder Lichtstrahlenbündels an der Hand der Figur und mit Hülfe der Rechnung ein ziemlich klares Bild machen, aus dem hervorgeht, dass sie von der ersten, oder dem *Sturm*schen Conoid wesentlich verschieden ist.

III. Man kann ferner, wenn man in Fig. 3 EG als einen beliebigen Schnitt des Ellipsoids und eg nicht mehr als Sehne des elliptischen Schnittes der Centrafläche in der xz-Ebene, sondern als Schnitt eines Systemellipsoids ansieht, sich eine Vorstellung von der dritten und allgemeinen Form der Normalenregelfläche bilden, deren Haupteigenschaften schon oben aus einander gesetzt sind.

In dem Punkt S, der nun nicht mehr auf einem Hauptschnitt von E liegt, schneiden sich zwei confocale Hyperboloide (μ) und (ν). (18.) ist die Gleichung von E und

$$(24.)\quad \begin{cases} \dfrac{\xi^2}{\mu^2}+\dfrac{\eta^2}{\mu^2-(a^2-b^2)}+\dfrac{\zeta^2}{\mu^2-(a^2-c^2)}=1, \\[2ex] \dfrac{\xi^2}{\nu^2}+\dfrac{\eta^2}{\nu^2-(a^2-b^2)}+\dfrac{\zeta^2}{\nu^2-(a^2-c^2)}=1 \end{cases}$$

sind diejenigen von (μ) und (ν). $a^2-c^2>\mu^2>a^2-b^2>\nu^2$.

Auf der Normale von S liegen die beiden Krümmungsmittelpunkte l und l', deren Coordinaten durch die Gleichungen

$$(25.)\quad \begin{cases} x_1=\dfrac{\mu^2}{a^2}\xi, & y_1=\dfrac{\mu^2-(a^2-b^2)}{b^2}\eta, & z_1=\dfrac{\mu^2-(a^2-c^2)}{c^2}\zeta, \\[2ex] x_2=\dfrac{\nu^2}{a^2}\xi, & y_2=\dfrac{\nu^2-(a^2-b^2)}{b^2}\eta, & z_2=\dfrac{\nu^2-(a^2-c^2)}{c^2}\zeta \end{cases}$$

gegeben sind. Durch Vergleichung mit (19.) ergiebt sich für l

$$m^2=-(a^2-\mu^2) \quad \text{und für } l' \quad m^2=-(a^2-\nu^2),$$

und wenn diese Werthe in (20.) eingesetzt werden, so ist

$$(26.)\quad \begin{cases} \dfrac{a^2x^2}{\mu^4}+\dfrac{b^2y^2}{(\mu^2-a^2+b^2)^2}+\dfrac{c^2z^2}{(\mu^2-a^2+c^2)^2}=1, \\[2ex] \dfrac{a^2x^2}{\nu^4}+\dfrac{b^2y^2}{(\nu^2-a^2+b^2)^2}+\dfrac{c^2z^2}{(\nu^2-a^2+c^2)^2}=1, \end{cases}$$

d. h. die Punkte l und l' liegen auf zwei Systemellipsoiden. Die zwei Ebenen, welche diese Ellipsoide in l und l' berühren, schneiden die Axen in Punkten, deren Abstände von O gleich

$$(27.)\quad \begin{cases} \dfrac{\mu^2}{\xi}, \quad \dfrac{\mu^2-a^2+b^2}{\eta}, \quad \dfrac{\mu^2-a^2+c^2}{\zeta} \\ \text{und} \\ \dfrac{\nu^2}{\xi}, \quad \dfrac{\nu^2-a^2+b^2}{\eta}, \quad \dfrac{\nu^2-a^2+c^2}{\zeta} \end{cases}$$

sind. Bei Ableitung dieser Werthe aus (26.) muss man (25.) berücksichtigen. Zieht man andererseits an die Hyperboloide (μ) und (ν) in S Tangentialebenen, so erhält man für die Abschnitte, die sie auf den Axen bilden, nach (24.) dieselben Werthe, wie in (27.), somit berühren die durch die Normale von E und die Tangenten der beiden in S sich schneidenden Krümmungslinien von E gelegten Normalebenen die Systemellipsoide (26.); diese Ebenen berühren aber auch die Centrafläche in l und l'. Jedem Werth von μ entspricht ein Hyperboloid (μ), welches E in einer Krümmungslinie der einen Art schneidet, und ein Systemellipsoid (26.). Das Vorhergehende findet Anwendung auf alle Normalen von E, welche durch die einzelnen Punkte dieser Krümmungslinie gehen; sie bilden zusammen eine Regelfläche, welche E senkrecht schneidet und das Ellipsoid (26.), sowie die Centrafläche, beide in derselben Curve, berührt. Die gleichen Schlüsse lassen sich auf die Hyperboloide (ν), auf die Krümmungslinie der zweiten Art und auf die zweiten Ellipsoide in (26.) ausdehnen. Durch Veränderung der Parameter μ und ν erhält man eine Reihe von Systemellipsoiden, welche identisch sind mit denjenigen der mittleren Gruppe von (20.), und zwar werden die Systemellipsoide zwischen $m^2 = -c^2$ und $m^2 = -b^2$ oder zwischen den elliptischen Schnitten der Centrafläche in der xy- und xz-Ebene von den Normalenregelflächen, deren Basis eine Krümmungslinie (μ) ist, berührt, und die andern zwischen $m^2 = -b^2$ und $m^2 = -a^2$ oder zwischen den Schnitten in der xz- und yz-Ebene, von den Normalenregelflächen, deren Basis eine Krümmungslinie (ν) ist.

Die Projectionen der Berührungscurven mit der Centrafläche erhält man durch Elimination von ξ, η, ζ aus (18.) und (24.) und nachherige Substitution dieser Coordinaten durch $x_1, y_1, \dots$ aus (25.):

$$(28.)\begin{cases} -\dfrac{y_1^2 b^2(a^2-b^2)}{(\mu^2-a^2+b^2)^3} - \dfrac{z_1^2 c^2(a^2-c^2)}{(\mu^2-a^2+c^2)^3} = 1, \\ -\dfrac{z_1^2 c^2(b^2-c^2)}{(\mu^2-a^2+c^2)^3} + \dfrac{x_1^2 a^2(a^2-b^2)}{\mu^6} = 1, \\ \dfrac{x_1^2 a^2(a^2-c^2)}{\mu^6} + \dfrac{y_1^2 b^2(b^2-c^2)}{(\mu^2-a^2+b^2)^3} = 1. \end{cases}$$

Diese Projectionen sind also Ellipsen oder Hyperbeln. Die Enveloppe der Systemellipsoide der mittleren Gruppe ist somit die Centrafläche von E. Man kann diesen Satz, welcher eine neue Construction für die Centrafläche eines Ellipsoids enthält, auch so aussprechen:

Wenn drei zu einander senkrechte Coordinatenebenen sowie eine sie schneidende Gerade gegeben sind, und man construirt über den drei Coordinaten eines Punktes der Geraden als Halbaxen ein Ellipsoid, so werden die auf solche Art erhaltenen Ellipsoide von der Centrafläche eines bestimmten Ellipsoids der Gruppe eingehüllt und die Berührungscurven projiciren sich auf den Coordinatenebenen als centrische Kegelschnitte.

Setzt man nämlich in (20.)

$$a\left(1+\frac{m^2}{a^2}\right)=X,\quad b\left(1+\frac{m^2}{b^2}\right)=Y,\quad c\left(1+\frac{m^2}{c^2}\right)=Z$$

und eliminirt hier m^2, so findet man

$$(28^b.)\begin{cases} \dfrac{Y}{-\frac{b^2-c^2}{b}} - \dfrac{Z}{\frac{b^2-c^2}{c}} = 1, \quad -\dfrac{Z}{\frac{a^2-c^2}{c}} + \dfrac{X}{\frac{a^2-c^2}{a}} = 1, \\ \dfrac{X}{\frac{a^2-b^2}{a}} - \dfrac{Y}{\frac{a^2-b^2}{b}} = 1. \end{cases}$$

Betrachtet man X, Y, Z als cartesische Coordinaten, so stellen diese Gleichungen die im vorigen Satz angegebene Gerade vor; sie durchdringt die xy-, xz-, yz-Ebene in $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, welche Punkte Ecken der um die drei elliptischen Schnitte beschriebenen Rechtecke sind (Fig. 2). Betrachtet man aber X, Y, Z als Ebenencoordinaten, so stellen die Gleichungen drei Parabeln vor, welche von den durch die Endpunkte dreier Axen eines Systemellipsoids bestimmten Ebenen berührt werden. Letztere osculiren also auch eine kubische Parabel.

Wir gehen nun zu der Betrachtung der dritten und allgemeinen Form des unendlich dünnen Normalenbündels über. Man kann die Fig. 3 auch hierzu benutzen, indem man sich unter EG einen beliebigen Schnitt

des Ellipsoids E und unter eg den correspondirenden Schnitt eines Systemellipsoids denkt. An die Stelle des parabolischen Cylinders, welcher von den Systemebenen der Normalenregelfläche berührt wird, tritt eine kubische Parabel, welche diese Systemebenen osculiren. Bewegt sich die Basis EG parallel mit sich selbst, so bewegt sich auch jede einzelne Systemebene parallel mit sich selbst. Im Grenzfall, wenn EG das Ellipsoid E in S berührt, wird auch jede Systemebene ihr betreffendes Systemellipsoid berühren und zwar im Schnittpunkt desselben mit der Normale von S, zu welcher die Normalenregelfläche zusammenschrumpft. Somit hat man den Satz:

Die Tangentialebenen der Systemellipsoide in den Durchschnittspunkten mit einer Normale des gegebenen Ellipsoids osculiren eine kubische Parabel; also wird jede solche Tangentialebene von allen übrigen in den Tangenten einer (ebenen) Parabel geschnitten.

Unter diesen Tangentialebenen sind einerseits die drei Axenebenen und andererseits die Tangentialebenen der drei sich in S schneidenden confocalen Flächen, nämlich das Ellipsoid E und die zwei Hyperboloide (μ) und (ν) hervorzuheben. Durch S gehen die drei Normalen dieser Flächen: auf derjenigen von E liegen die Krümmungsmittelpunkte l und l', von (μ) m und m', von (ν) n und n'. Betrachtet man diese Normalen als $\mathfrak{x}$-, $\mathfrak{y}$-, $\mathfrak{z}$-Axen, so berührt die Parabel in der $\mathfrak{y}\mathfrak{z}$-Ebene in m und n', in der $\mathfrak{z}\mathfrak{x}$-Ebene in n und l', in der $\mathfrak{y}\mathfrak{x}$-Ebene in m' und l. Kennt man also von den sechs Krümmungshalbmessern L, L', M, M', N, N' dreier in einem Punkt S sich schneidenden Confocalen vier, nämlich L, L', M, N', so sind auch die zwei andern und also auch die kubische Parabel bestimmt, welche diesem Punkt zukommt. Von den Systemellipsoiden, welche die Normale von E trifft, sind die beiden (26.) bemerkenswerth, weil sie von der Normale berührt werden und zwar in l und l'; ersetzt man in (26.) μ^2 durch (a^2+m^2) und ν^2 durch (a^2+m^2), so erhält man (20.).

Unmittelbar, ehe die Schnittebene EG zur Tangentialebene in S wird, ist die Schnittcurve EG eine Indicatrix von E, und ebenso schneiden alle andern Systemebenen ihre betreffenden Systemellipsoide je in einer Indicatrix, d. h.:

Ein unendlich dünnes Normalenbündel des Ellipsoids schneidet jedes Systemellipsoid in einer Indicatrix, deren Ebenen eine kubische Parabel osculiren, welche durch die sechs Krümmungsmittelpunkte l, l', m, m', n, n' bestimmt ist.

Diese Betrachtungsweise hat den entschiedenen Vortheil, dass das unendlich dünne Normalenbündel nicht eine Form ist, welche aus der allgemeinen Gleichung der Fläche durch Vernachlässigung der höheren Differentialquotienten (nämlich von der dritten Ordnung an) erhalten wird, wodurch nothwendigerweise eine Unbestimmtheit entstehen muss, sondern es ist ebenso genau definirt wie ein endliches, und die kubische Parabel, welche hier massgebend ist, lässt sich leicht finden.

Soll nämlich die Ebene (21.) zur Tangentialebene von E in S werden, so muss

$$A = \frac{a^2}{\xi},\quad B = \frac{b^2}{\eta},\quad C = \frac{c^2}{\zeta}$$

werden; führt man diese Werthe in (23.) ein, so sind

$$(29.)\quad \begin{cases} \dfrac{Y}{\frac{b^2-c^2}{\eta}} - \dfrac{Z}{\frac{b^2-c^2}{\zeta}} = 1, \quad -\dfrac{Z}{\frac{a^2-c^2}{\zeta}} + \dfrac{X}{\frac{a^2-c^2}{\xi}} = 1, \\ \dfrac{X}{\frac{a^2-b^2}{\xi}} - \dfrac{Y}{\frac{a^2-b^2}{\eta}} = 1 \end{cases}$$

die Gleichungen der drei Parabeln in *Plücker*schen Coordinaten, welche die Systemebenen des unendlich dünnen Normalenbündels von E berühren. Bezeichnet man in (29.) die Nenner der Reihe nach mit $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}'$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}'$, so sind

$$(30.)\quad \left(\frac{y\mathfrak{M}'}{\mathfrak{M}^2}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\frac{z\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}'^2}\right)^{\frac{1}{3}} = 1,\quad \left(\frac{z\mathfrak{N}'}{\mathfrak{N}^2}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\frac{x\mathfrak{L}}{\mathfrak{L}'^2}\right)^{\frac{1}{3}} = 1,\quad \left(\frac{x\mathfrak{L}'}{\mathfrak{L}^2}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\frac{y\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}'^2}\right)^{\frac{1}{3}} = 1$$

die Gleichungen in cartesischen Coordinaten von den Projectionen der kubischen Parabel, welche diese Systemebenen osculiren.

Ist ferner (21.) Tangentialebene vom Hyperboloid (μ) (24.), so muss

$$A = \frac{\mu^2}{\xi},\quad B = \frac{\mu^2-a^2+b^2}{\eta},\quad C = \frac{\mu^2-a^2+c^2}{\zeta}$$

sein; führt man diese Werthe in (23.) ein, und berücksichtigt, dass statt a^2, b^2, c^2 nun μ^2, $\mu^2-a^2+b^2$, $\mu^2-a^2+c^2$ zu setzen ist, so erhält man wieder (29.), das Gleiche findet beim Hyperboloid (ν) statt. Nun lassen sich unter der Voraussetzung, dass c^2 oder b^2 und c^2 negativ sind, die Formeln (18.) bis (20.) und die daran geknüpften Schlüsse auch auf die Normalenregelflächen der beiden Hyperboloide ausdehnen, und man erhält den Satz:

Die Osculationsebenen der kubischen Parabel* (30.) *sind Systemebenen für die drei unendlich dünnen Normalenbündel, welche den drei sich in einem Punkt S schneidenden confocalen Flächen entsprechen.

Benutzt man ferner die an die Relationen (24.) bis (27.) geknüpften Schlüsse, so findet man sofort, dass an die Stelle der Gleichungen (29.) und (30.) auch folgende treten können:

$$(31.)\quad \frac{Y'}{M}-\frac{Z'}{N'}=1,\quad \frac{Z'}{N}-\frac{X'}{L'}=1,\quad \frac{X'}{L}-\frac{Y'}{M'}=1;$$

$$(32.)\quad \left(\frac{\eta M'}{M^2}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\frac{\zeta N}{N'^2}\right)^{\frac{1}{3}}=1,\quad \left(\frac{\zeta N'}{N^2}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\frac{\xi L}{L'^2}\right)^{\frac{1}{3}}=1,\quad \left(\frac{\xi L'}{L^2}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\frac{\eta M}{M'^2}\right)^{\frac{1}{3}}=1.$$

Denn dieselbe Systemebene der drei unendlich dünnen Normalenbündel, welche die x-, y-, z-Axen in den Punkten trifft, deren Abstände von O gleich X, Y, Z sind, trifft die drei in S sich schneidenden Normalen in Punkten, deren Abstände von S gleich X', Y', Z' sind*).

§ 8.

Die Theorie des Sehens, gegründet auf die Betrachtung der unendlich dünnen Normalenbündel.

Die Grundlage für diese Betrachtung bilden wieder, wie in § 6, die vier Grössen L, L', M, N', von welchen wir annehmen, dass sie für die Wellenfläche bestimmt seien. Die in § 7 angeführten drei Formen des Normalenbündels richten sich genau wie in § 6 danach, ob von den Grössen M und N' beide, oder nur eine, oder keine unendlich sind. Es ist zu bemerken, dass mit M auch M' und mit N auch N' unendlich werden muss.

Man könnte nun eine der Flächen zweiten Grades construiren, welche die Wellenfläche im Punkt S in dritter Ordnung berühren, indem man nach § 5 die Gerade SO oder

$$\frac{p}{p'}=-\frac{M'}{L},\quad \frac{p'}{p}=\frac{N'}{M},\quad \frac{p''}{p}=\frac{L'}{M}$$

bestimmt, auf welcher die Mittelpunkte aller dieser osculirenden Flächen liegen, und dann nach (28^b.) die drei Parabeln, welche von allen Systemebenen des unendlich dünnen Normalenbündels berührt werden. Einfacher dagegen ist es, die Normale der Wellenfläche als ξ-Axe und die Tangenten ihrer beiden Krümmungslinien in S als η- und ζ-Axen zu wählen, auf welchen die Punkte l, l', m, m', n, n' liegen, wodurch die Parabeln (31.) und

---

*) Die hier und überhaupt im Vorhergehenden betrachtete kubische Parabel ist eine specielle, die man kubische Parabel mit Directrix nennen kann. Wie nämlich eine ebene Parabel die Eigenschaft hat, dass sich von jedem Punkt ihrer Directrix zwei rectanguläre Tangenten an sie ziehen lassen, so kann man von jedem Punkt auf OS drei rectanguläre Schmiegungsebenen an diese kubische Parabel legen.

die kubische Parabel (32.) bestimmt sind, und damit auch die Form des unendlich dünnen Normalenbündels der osculirenden Fläche zweiten Grades, welches an die Stelle desjenigen der Wellenfläche tritt.

I. M und N' unendlich. Diese Form ist nach § 7 I. das *Hamilton-Sturm*sche Conoid, welche längst bekannt und discutirt, auch in § 6 I. mit Hülfe der Centrafläche auf die Theorie des Sehens angewendet ist; aus dem Werth für ST § 2 (1.) geht hervor, dass man bei Vernachlässigung der unendlich kleinen Grössen oder der Differentialcoefficienten dritter Ordnung, wo ST also auch M und N' unendlich werden, auf diesen Fall beschränkt ist, und die Formen II. und III. des Normalenbündels ausgeschlossen sind.

II. M oder N' unendlich, s. Fig. 3; das Normalenbündel hat eine gerade Leitlinie, in welcher sich die Lichtstrahlen schneiden, wo also ein Maximum ihrer Concentration stattfindet. Da sie aber die Netzhaut schief durchschneidet, so ist die Wirkung des Lichts auf die Nerven offenbar ganz anders als bei I., wo die zwei geraden Leitlinien je in einer bestimmten Netzhautschichte liegen. Auch hier gilt das in § 6 unter II. Gesagte.

Wie oft nun diese zwei Fälle in Wirklichkeit eintreten, darüber kann man überhaupt nur Vermuthungen anstellen. Es lassen sich aber für die Ansicht, dass sie nicht gewöhnlich, sondern eher ausnahmsweise vorkommen, Gründe anführen. Einerseits muss, namentlich bei I., eine ausserordentliche Anstrengung des Auges stattfinden, um diejenige ausgezeichnete Form der Wellenfläche zu geben im Punkt S, welche unendlich grossen Werthen von M und N' entspricht; andererseits interferiren unendlich nahe gebrochene Strahlen, wenn sie sich schneiden. Eine Interferenz ist aber mit Farbenerscheinungen verknüpft, also beim Sehen störend und, wie es scheint, beim Auge nahezu ausgeschlossen. Es wird daher von Werth sein, den dritten Fall näher zu betrachten, wo

III. weder M noch N' unendlich ist. Zu diesem Zweck benutzen wir Fig. 3, denken uns $EGeg$ als Normalenregelfläche in der dritten und allgemeinen Form, und verfolgen die Veränderungen ihrer Gestalt, wenn EG parallel mit sich selbst, wie auch eg sich bewegt und die Ebene von EG in S Tangentialebene vom Ellipsoid E, die Ebene von eg in D' Tangentialebene von dem betreffenden Systemellipsoid und zugleich von der Centrafläche wird. In allen diesen Phasen, das Normalenbündel mag noch so dünn werden, wird es von seinen sämmtlichen Systemebenen in Ellipsen, die eine

[illegible] behält
[illegible] zwei Formen:
[illegible] übrigen
[illegible] aus-
[illegible] Normale SDD'
[illegible] die Indicatrix
[illegible] D. Geht
[illegible] SS das
[illegible] von D nach
[illegible] DD [illegible] sind Halb-
[illegible] Anmerkung in
[illegible] unendlich klein von
[illegible] unendlich klein von der
[illegible] wenn
[illegible] und hier
[illegible] D [illegible] parallel
[illegible] die
[illegible] unendlich klein von
[illegible] unendlich
[illegible] im Auge,
[illegible] werden, inso-
[illegible] unendlich naher ge-
[illegible] begleitet ist.
[illegible] innigen Ver-
[illegible] Formen und Anschau-
[illegible]

[illegible] gewöhnliche Form des
[illegible] für die Theorie des Sehens an-
[illegible] von einem leuchtenden Punkt
[illegible] dessen Basis die Pupille
[illegible] dünnes Strahlenbündel ver-
[illegible] deren Osculationsebenen
[illegible] Theil des Bündels, welcher die
[illegible] der Lichtstrahlen am
[illegible] die Netzhaut mehr oder weniger vollständig.
[illegible] die elliptischen Durchschnitte des

Strahlenbündels vermittelt, weil hier eine hinreichende Concentration der Lichtstrahlen ohne alle störenden Interferenzerscheinungen stattfindet. Jedem leuchtenden Punkte entspricht eine andere kubische Parabel und eine andere Reihe von solchen elliptischen Schnitten, in welchen die Empfindung des Sehens auf das Gehirn übertragen wird. Je nach ihrer Lage auf den einzelnen Nervenspitzen wird der Eindruck wechseln, und wenn hierdurch allein das monoculare Körperlichsehen sich noch nicht erklären lässt, so ist doch durch solche geometrischen Hülfsmittel, zu welchen neben der dritten und allgemeinen Form des Strahlenbündels auch die Centrafläche der osculirenden Flächen zweiten Grades in ihren mannigfaltigen Stellungen auf der Netzhaut gehört, ein Weg eröffnet, auf welchem man diesem räthselhaften Vorgang näher treten kann.

Mit Hülfe von Fig. 3 lässt sich die Art des Lichteindruckes auf die Nervenspitzen, d. h. auf die Endflächen der Stäbchen und Zäpfchen der Netzhaut geometrisch noch specieller definiren. $hgD'ei$ ist der obere Theil eines solchen Stäbchens oder Zäpfchens, dessen Axe $D'k$ in der Richtung der Normale SD' der Wellenfläche EG oder auch der Axe des unendlich dünnen Strahlenbündels $EGeg$ liegt. Schneidet man die Wellenfläche durch eine Reihe von Ebenen parallel EG, so erhält man eine Reihe von Normalenbündeln, wovon jedes eine besondere Basis auf der Wellenfläche um den Punkt S herum, und eine zweite Basis um den Punkt D' herum auf der Endfläche des Sehnerven hat. Der Eindruck ist in D' am stärksten und vermindert sich in dem Masse, als man von diesem Punkt zu den folgenden elliptischen Schnitten oder Grundflächen der einzelnen Normalenbündel fortschreitet.

Reutlingen, 1883.

Ableitung des *Weierstrass*schen Fundamental-Theorems für die Sigmafunction mehrerer Argumente aus den *Kronecker*schen Relationen für Subdeterminanten symmetrischer Systeme.

(Von Herrn *F. Caspary.*)

In den Sitzungsberichten der Berliner Akademie vom Jahre 1882 hat Herr *Weierstrass* S. 506 ein für die σ-Function mehrerer Argumente fundamentales Theorem entwickelt, und Herr *Kronecker* hat S. 824 desselben Bandes merkwürdige lineare Relationen aufgedeckt, welche für die Subdeterminanten symmetrischer Systeme gelten. Zwischen diesen beiden scheinbar so weit auseinander liegenden Entdeckungen besteht, wie ich bei Untersuchungen über Thetafunctionen mehrerer Argumente gefunden habe, ein enger Zusammenhang. Man erhält nämlich das *Weierstrass*sche Theorem unmittelbar aus der *Kronecker*schen Identität, welche jene Relationen darstellt, wenn man für die darin auftretenden Determinanten gewisse Verbindungen von Thetafunctionen substituirt.

Um dies nachzuweisen, sei in üblicher Weise:

$$\vartheta^{g_1 g_2 \dots g_\varrho}_{g'_1 g'_2 \dots g'_\varrho}(v_1, v_2, \dots v_\varrho;\ \tau_{11}, \tau_{12}, \dots \tau_{\varrho\varrho})$$

gleich:

$$\sum_{m_1, m_2, \dots m_\varrho} e^{i\pi \sum\limits_{\alpha,\beta} \tau_{\alpha\beta}(m_\alpha + \frac{1}{2}g_\alpha)(m_\beta + \frac{1}{2}g_\beta) + 2i\pi \sum\limits_{\alpha}(v_\alpha + \frac{1}{2}g'_\alpha)(m_\alpha + \frac{1}{2}g_\alpha)};$$

$$(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots \varrho;\ m_\gamma = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \text{ in inf.})$$

jedoch werde die Thetafunction einfach durch $\Theta(v;\tau)$, und wenn die Hervorhebung der Parameter $\tau_{\alpha\beta}$ nicht nöthig ist, bloss durch $\Theta(v)$ bezeichnet. Bildet man dann das Product zweier Thetafunctionen mit verschiedenen Argumenten-Systemen aber gleichen Parametern, so findet man aus einer von

Herrn *Königsberger* (dieses Journal Bd. 64, S. 24) mitgetheilten Formel die folgende allgemeinere:

$$(1.)\qquad \Theta(v^{(p)}+v^{(q)};\tau)\,\Theta(v^{(p)}-v^{(q)};\tau)=\sum_k A_{kp}B_{kq}=C_{pq},\qquad \binom{k=1,2,\dots r}{r=2\varrho}$$

in welcher

$$A_{kp}=\vartheta\begin{smallmatrix}\lambda_1^{(k)}, & \lambda_2^{(k)}, & \dots & \lambda_\varrho^{(k)}\\ 0 & 0 & & 0\end{smallmatrix}(2v^{(p)};\,2\tau),$$

$$B_{kq}=(-1)^{\sum\limits_\alpha \lambda_\alpha^{(k)}g'_\alpha}\,\vartheta\begin{smallmatrix}\lambda_1^{(k)}+g_1, & \lambda_2^{(k)}+g_2, & \dots & \lambda_\varrho^{(k)}+g_\varrho\\ 0 & 0 & & 0\end{smallmatrix}(2v^{(q)};\,2\tau)$$

ist, die Argumente $v^{(p)}$ und $v^{(q)}$ zwei beliebige Systeme von je ϱ Argumenten $v_\alpha^{(p)}$ und $v_\alpha^{(q)}$ bedeuten, und die Grössen $\lambda_\alpha^{(k)}$ unabhängig von einander nur die Werthe 0 und 1 annehmen. Ist nun Θ eine *ungerade* Thetafunction, so wird $C_{pq}=-C_{qp}$ und $C_{pp}=0$. Daher wird

$$|C_{pq}|=W^2(h_1,h_2,\dots h_r)\qquad (p,q=h_1,h_2,\dots h_r),$$

wo $W(h_1,h_2,\dots h_r)$ einen Ausdruck bedeutet, welchen man nach dem *Jacobi-Weierstrass*schen Bildungsgesetze desselben erhält, wenn man in dem Producte

$$\Theta(v^{(h_1)}+v^{(h_2)})\Theta(v^{(h_1)}-v^{(h_2)})\Theta(v^{(h_3)}+v^{(h_4)})\Theta(v^{(h_3)}-v^{(h_4)})\dots\Theta(v^{(h_{r-1})}+v^{(h_r)})\Theta(v^{(h_{r-1})}-v^{(h_r)})$$

zuerst die $r-1$ Indices $h_2, h_3, \dots h_r$ einen Cyklus durchlaufen lässt, in jeder so sich ergebenden Permutation dieselbe Operation an den $r-3$ letzten Indices vornimmt, in jeder so hervorgehenden Permutation die nämliche Operation auf die $r-5$ letzten Indices anwendet u. s. w., und dann alle durch dieses Verfahren entstandenen 1. 3. 5. . . $(r-1)$ Glieder addirt. Da aber gemäss der Gleichung (1):

$$|C_{pq}|=|A_{kp}|\,.\,|B_{kq}|\qquad \binom{k=1,2,\dots r}{p,q=h_1,h_2,\dots h_r}$$

und, wie aus der Natur der Grössen A_{kp} und B_{kq} hervorgeht, $|A_{kp}|=|B_{kq}|$ ist, so wird:

$$(2.)\qquad |B_{mq}|=W(h_1,h_2,\dots h_r)\qquad \binom{m=1,2,\dots r}{q=h_1,h_2,\dots h_r}.$$

Setzt man nunmehr in der *Kronecker*schen Identität:

$$|a_{gh}|=\sum_s |a_{ik}|\qquad (s=m+1,\,m+2,\dots 2m),$$

$$(g=1,2,\dots m;\ h=m+1,\dots 2m);\ (i=1,2,\dots m-1,s;\ k=m+1,\dots s-1,m,s+1,\dots 2m),$$

wie sie a. a. O. und auch in diesem Journal (Bd. 93, S. 319) angegeben ist, für a_{pq}:

$$\sum_k B_{kp}B_{kq}\qquad (k=1,2,\dots r),$$

wodurch die für symmetrische Systeme nothwendige Bedingung $a_{pq}=a_{qp}$ erfüllt wird, und substituirt man für die in allen Gliedern auftretenden näm-

lichen r Subdeterminanten $(r-1)^{\text{ter}}$ Ordnung einfache Terme A_{k0}, so resultirt die Identität:

$$(3.)\qquad \sum_{n=1}^{n=r+1} \big(\sum_k A_{k0} B_{kn}\big).|B_{m,f+n}| = 0, \qquad (k, m, f = 1, 2, \dots r)$$

in welcher die Indices $f+n$ nur mod $(r+1)$ zu nehmen sind. Substituirt man hierin die Werthe von $\sum_k A_{k0} B_{kn}$ und $|B_{m,f+n}|$, welche sich aus den Formeln (1.) und (2.) ergeben, so erhält man die Gleichung:

$$(4.)\qquad \sum_{n=1}^{n=r+1} \Theta(v^{(0)}+v^{(n)})\Theta(v^{(0)}-v^{(n)})W(1+n, 2+n, \dots r+n) = 0,$$

welche genau das *Weierstrass*sche Theorem darstellt. Denn wenn man zu der σ-Function übergeht, so erhalten sämmtliche Glieder auf der linken Seite den nämlichen Factor und wenn dieser weggelassen und alsdann auch für Θ und $v^{(0)}, v^{(1)}, \dots v^{(r+1)}$ beziehungsweise σ und $u, u_1, \dots u_{r+1}$ gesetzt wird, so stimmt die Gleichung (4.) auch der *Form* nach mit der *Weierstrass*schen überein.

Berlin, den 10. Januar 1884.

Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen.

(Uebersicht über die Abhandlungen des Verfassers in den Bdn. 74 bis 95 dieses Journals.)

(Von Herrn *L. W. Thomé* in Greifswald.)

Diese Abhandlung enthält *die systematische Uebersicht* über den Inhalt der von dem Verfasser in den Bdn. 74 bis 95 dieses Journals veröffentlichten Abhandlungen: „Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen".

Einleitung.

In der Theorie der homogenen linearen Differentialgleichungen mit rationalen Functionen als Coefficienten erhebt sich die Aufgabe, die Integrale der Differentialgleichung bei den singulären Punkten zu einer Darstellung zu bringen, durch welche der Verlauf eines Integrales in der Nähe eines solchen Punktes charakterisirt wird. An diese Aufgabe schliesst sich diejenige, die Fortsetzung der Integrale auszudrücken.

Singuläre Punkte der linearen Differentialgleichungen sind diejenigen, in welchen die Coefficienten unendlich werden (bei $x=\infty$ wird $x=t^{-1}$ gesetzt). Für das Gebiet der unabhängigen Variabeln in einem Kreise, der keinen singulären Punkt enthält, besteht eine und nur eine einwerthige und stetige analytische Function, die der Differentialgleichung m^{ter} Ordnung genügt und mit ihren $m-1$ ersten Ableitungen im Mittelpunkte des Kreises vorgeschriebene Werthe annimmt, gemäss einem Satze des Herrn *Weierstrass.*

Die Integration der Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe ist das Vorbild für die Integration der homogenen linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten gewesen, welche von der Darstellung der Integrale bei den singulären Punkten ausgeht.

Nach der von Herrn *Fuchs* (Bd. 66 dieses Journals) gegebenen Methode verfährt man, um zu zeigen, dass bei einem singulären Punkte $x=a$ ein Integral y existirt, welches bei einem Umgange um diesen Punkt

in ωy übergeht, wo ω eine Constante ist, in folgender Weise. Man nimmt ein beliebiges System linearunabhängiger Integrale y_1 bis y_m. Wenn y_r bei einem Umgange um $x = a$ in $\Sigma c_{rs} y_s$ übergeht und y, welches in ωy übergehen soll, gleich $\Sigma k_s y_s$ gesetzt ist, so ergiebt sich bei diesem Umgange das Gleichungssystem

$$c_{1s} k_1 + c_{2s} k_2 + \cdots + (c_{ss} - \omega) k_s + \cdots + c_{ms} k_m = 0 \qquad (s = 1, \ldots m).$$

Die Determinante dieses Systems homogener linearer Gleichungen in Bezug auf die Grössen k muss verschwinden, wodurch eine Gleichung m^{ten} Grades hervorgeht, die Fundamentalgleichung des Herrn *Fuchs*. Die Coefficienten dieser Gleichung sind unabhängig von der Wahl des speciellen Systemes y_1 bis y_m, das absolute Glied der Gleichung ist von Null verschieden. Es ergiebt sich alsdann, dass einer einfachen Wurzel $\omega = e^{2\pi i r}$ der Fundamentalgleichung ein Integral der Form

$$(1.) \qquad (x-a)^r \varphi(x)$$

entspricht, einer λ-fachen Wurzel $\omega = e^{2\pi i r}$ eine Gruppe von λ Integralen

$$(2.) \qquad (x-a)^r (\varphi_{\alpha 1}(x) + \varphi_{\alpha 2}(x) \log(x-a) + \cdots + \varphi_{\alpha\alpha}(x)(\log(x-a))^{\alpha-1}) \qquad (\alpha = 1, \ldots \lambda),$$

wo die Grössen φ bei $x = a$ und wenigstens in dem Kreise um $x = a$ als Mittelpunkt, der durch den nächsten singulären Punkt hindurchgeht, abgesehen von $x = a$, einwerthige und stetige analytische Functionen sind, und zwar ist

$$(3^a.) \qquad (x-a)^r \varphi_{\alpha b}(x) \qquad (b = 2, \ldots \alpha)$$

eine homogene lineare Function mit constanten Coefficienten von den Grössen

$$(3^b.) \qquad (x-a)^r \varphi_{cb}(x) \qquad (c = \alpha-1, \ldots 1;\ b = 1, \ldots c).$$

In den Ausdrücken (1.) bis (3.) ist die von Herrn *Fuchs* (l. c.) nachgewiesene allgemeine *Form* der Integrale bei einem singulären Punkte enthalten.

Wenn man nach dem Verfahren, durch welches die Form der Integrale bei einem singulären Punkte erwiesen wird, die Darstellung der Fundamentalgleichung und hierauf die der Integrale selbst bewerkstelligen wollte (diese Methode, die Integrale bei den singulären Punkten darzustellen, ist in der Abhandlung des Herrn *Hamburger* im 83. Bande dieses Journals versucht worden), so hätte man zunächst die Coefficienten c_{rs} auszudrücken. Man würde, indem man das Resultat der Fortsetzung der Integrale y_1 bis y_m bei einem Umgange um $x = a$ darstellt, die Grössen c_{rs} unter der Form

von unendlichen Reihen erhalten, demnach auch die Coefficienten der Fundamentalgleichung im Allgemeinen unter dieser Form. Wenn aber nun nachzuweisen ist, dass in der Fundamentalgleichung gleiche Wurzeln vorkommen, also sobald eine Gruppe von Integralen (2.) vorhanden ist, so stösst man auf das Hinderniss, von einer ganzen rationalen Function, deren Glieder durch unendliche Reihen ausgedrückt sind, zu zeigen, dass dieselbe verschwindet. Allgemein würde die Schwierigkeit bestehen, aus der Fundamentalgleichung, deren Coefficienten die angegebene Form haben, die Wurzeln ω zu bestimmen und zugleich die Frage zu entscheiden, ob in $\omega = e^{2\pi i r}$ der Exponent r rational, irrational oder complex ist, welche Frage bei Beurtheilung der Verzweigung der Integrale auftritt.

Auf Grund der Fundamentalgleichung des Herrn *Fuchs* ergiebt sich, dass die Integrale bei dem singulären Punkte $x = a$ auch die Form annehmen

$$(4.)\qquad v_1\int dx\, v_2 \ldots \int v_\alpha dx, \qquad (\alpha = 1, \ldots m)$$

wo die Grössen v von der Form

$$(5.)\qquad (x-a)^r \cdot \frac{\chi}{\psi}$$

sind, χ und ψ bei $x = a$, abgesehen von diesem Punkte, einwerthige und stetige analytische Functionen (ψ gleich 1 sein kann). Man kann bei einer λ-fachen Wurzel der Fundamentalgleichung eine Gruppe von Integralen unter der Form (4.) für $\alpha = 1, \ldots \lambda$ aufstellen, bei denen der Exponent r (5.) in v_2 bis v_λ gleich -1 ist. Integrirt man nun in einem Kreisringe um $x = a$, in welchem die Grössen ψ nicht verschwinden, so erhalten die Integrale in diesem Gebiete die Form (2.). Nimmt man in dem Integrale (2.) und in dessen Ausdruck (4.) einen Umgang um $x = a$ vor und setzt die Coefficienten der gleich hohen Potenzen von $\log(x-a)$ auf beiden Seiten einander gleich, so erhält man die Relationen (3.). Nun ergiebt sich aus diesen und aus der Beschaffenheit der Integrale bei einem nichtsingulären Punkte, dass die Functionen φ in (2.) in dem Kreise um $x = a$ als Mittelpunkt, der durch den nächsten singulären Punkt hindurchgeht, abgesehen von $x = a$ einwerthig und stetig bleiben. (Vergl. Abh. des Verfassers Bd. 75, No. 8.)

Eine Function, die durch eine Summe von Ausdrücken der Form (1.), (2.) in endlicher Anzahl mit beliebigen Exponenten gegeben ist, in welchen die Grössen φ durch die Summe von zwei Potenzreihen entwickelt sind,

von denen die eine nach Potenzen von $x-a$ mit positiven, die andere mit negativen ganzzahligen Exponenten fortschreitet, nimmt eine Darstellung dieser Form nur auf eine Weise an (Abh. des Verf. Bd. 74. No. 1 (5.)).

Sind nun die Grössen v von der Form $(x-a)^{\rho}\chi$, und die Functionen χ im Innern eines Kreises um $x=a$ allenthalben einwerthig und stetig, so ergeben sich durch Integration Ausdrücke der Form (1.) oder (2.), in welchen die Grössen χ in ihren Entwickelungen nach Potenzen von $x-a$ Potenzen mit negativen Exponenten nur in endlicher Anzahl enthalten. Ein Ausdruck (1.) oder (2.) dieser Art oder eine Summe von solchen Ausdrücken, dieselben mit Constanten multiplicirt, als Integral der Differentialgleichung ist von dem Verfasser ein *reguläres Integral* (Abh. Bd. 75. No. 1) genannt worden. Für den Fall, dass alle Integrale bei einem singulären Punkte $x=a$ regulär sein sollen, hat Herr *Fuchs* (Bd. 66 und 68 dieses Journals) als nothwendige und hinreichende Bedingung nachgewiesen, dass in der Differentialgleichung, in welcher der Coefficient der höchsten Ableitung gleich 1 gesetzt ist, der Coefficient der $(m-\lambda)$ten Ableitung höchstens in der λten Ordnung für $x=a$ unendlich wird. Hieraus ergiebt sich die von Herrn *Fuchs* aufgestellte Form der Coefficienten der Differentialgleichung, wenn bei allen singulären Punkten die Integrale regulär sind. Man erhält wenn bei $x=a$ die Integrale regulär sind, dieselben unter der Form (4.), worin die Grössen v die vorhin angegebene Beschaffenheit haben. Dabei zeigt sich, dass die Exponenten in den Grössen v und die Coefficienten in den Reihenentwickelungen der v algebraisch mit den Constanten in den rationalen Coefficienten der Differentialgleichung zusammenhängen.

Diese von Herrn *Fuchs* untersuchte Differentialgleichung stellt sich als besonderer Fall von folgender allgemeiner Gattung homogener linearer Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten dar. Bei denselben werden nicht alle bei einem singulären Punkte vorkommenden Integrale gleichzeitig, sondern zunächst einzelne betrachtet.

Es werde der Integralausdruck

$$(6.)\qquad u_1\int dx\,u_1^{-1}u_2\int dx\,u_2^{-1}u_3\int\ldots\int u_{\lambda-1}^{-1}u_\lambda\,dx \qquad (\lambda=1,\ldots k)$$

aufgestellt, welcher die Integrale der Differentialgleichung enthält, die aus dem gleich Null gesetzten Systeme

$$(7.)\qquad \frac{dy}{dx}-q_1y=y_1,\quad \frac{dy_1}{dx}-q_2y_1=y_2,\ \ldots\ \frac{dy_{k-1}}{dx}-q_ky_{k-1}$$

hervorgeht, wo $q_\alpha = \frac{d\log\mu_\alpha}{dx}$ ist. Hier sei $\frac{d\log\mu_\alpha}{dx}$ bei $x = a$ einwerthig und in endlicher Ordnung unendlich. Es seien also die μ von der Form

$$(8.)\qquad e^{w}(x-a)^{r}\chi,$$

wo w gleich Null oder von der Form $\sum_1^n c_{-\alpha}(x-a)^{-\alpha}$ ist, χ von der Form $\sum_0^\infty c_\alpha(x-a)^\alpha$. Ein Integralausdruck (6.) von dieser Beschaffenheit ist von dem Verfasser ein *System normaler Elementarintegrale* μ genannt worden. Für den Fall, dass Systeme normaler Elementarintegrale (6.) für $\mathfrak{a} = 1, \dots k$ einer vorgelegten Differentialgleichung genügen sollen, hat sich in den Untersuchungen des Verfassers ergeben, dass *die Coefficienten in den Grössen w, die Exponenten r und die Coefficienten in den Entwickelungen der χ in den Grössen μ* (8.) *algebraisch mit den Constanten in den rationalen Coefficienten der Differentialgleichung zusammenhängen;* nur kann in dem allgemeinen Falle in den Grössen χ eine endliche Anzahl zunächst unbestimmter Constanten vorkommen. Es gehen nun diese Untersuchungen darauf hinaus, *zunächst die normalen Elementarintegrale zu ermitteln, alsdann die Integrationen in dem Integralausdrucke* (6.) *zur Darstellung zu bringen und aus dieser Darstellung die Entwickelung der Integrale unter der Form* (1.) *bis* (3.) *herzuleiten.* Der Satz des Herrn *Fuchs* über die Existenz der Form (1.) bis (3.) der Integrale brauchte hierbei nicht vorausgesetzt zu werden und ist auch im Folgenden nicht vorausgesetzt.

In der ersten Abtheilung der vorliegenden Abhandlung werden die Sätze, welche zur Bestimmung der formellen Ausdrücke der normalen Elementarintegrale dienen, aufgestellt, wobei der Ausgangspunkt der Untersuchung die Betrachtung der bei einem singulären Punkte möglichen regulären Integrale ist. Zugleich wird der Zusammenhang der integrirenden Factoren einer homogenen linearen Differentialgleichung mit der Zerlegung des Differentialausdruckes in ein System solcher Differentialausdrücke dargelegt; die Beziehung des Integralausdruckes (6.) zu dem Systeme (7.) ergiebt sich hieraus.

Die zweite Abtheilung enthält alsdann folgende Betrachtungen. Bei einer Differentialgleichung mit nur regulären Integralen ergeben sich bei jedem singulären Punkte die Grössen μ in einem Integrale (6.) ohne specielle Convergenzbetrachtungen. Der Differentialausdruck in dieser Differentialgleichung ist ein regulärer genannt worden. Wird mittels eines

regulären Differentialausdruckes $F(y, x)$ der Differentialausdruck $e^{W}F(e^{-W}y, x)$ gebildet, wo W eine rationale Function von x, die auch gleich Null sein kann, so erhält man einen Differentialausdruck mit rationalen Coefficienten, der ein normaler genannt worden ist. Bei einer Differentialgleichung mit normalem Differentialausdruck ergeben sich daher auch die Grössen μ in (6.) *ohne specielle Convergenzbetrachtungen. Dasselbe findet statt, wenn man ein System von normalen Differentialausdrücken* f_{α_0}, f_{α_1}, *bis* f_{α_l} $(l+1 \geqq 1)$

$$(9.)\qquad f_{\alpha_0}(y, x) = y_1,\ f_{\alpha_1}(y_1, x) = y_2, \ldots f_{\alpha_l}(y_l, x)$$

gleich Null setzt. Um nun bei einer homogenen linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten hiervon Anwendung zu machen, wird zunächst gezeigt, wie sich ermitteln lässt, ob der Differentialausdruck in das System

$$(10.)\qquad f(y, x) = y_1,\ g(y_1, x)$$

zerlegt werden kann, wo f ein normaler Differentialausdruck ist. Es werden alsdann allgemeine Untersuchungen über Systeme normaler Differentialausdrücke angestellt. Sodann wird gezeigt, dass ein homogener linearer Differentialausdruck mit rationalen Coefficienten sich in einer bestimmten Weise durch ein besonderes System homogener linearer Differentialausdrücke mit rationalen Coefficienten darstellen lässt, welches die *canonische Form* genannt worden ist. Aus dieser Darstellung geht das System normaler Differentialausdrücke, welches in dem ursprünglichen Differentialausdrucke enthalten ist, hervor. Für den Fall, dass letzterer Differentialausdruck selbst durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar ist, oder wenn die Betrachtung eines Integrales auf eine Differentialgleichung mit einem solchen Differentialausdrucke zurückführt, werden die Integrale dieser Differentialgleichung in der folgenden Abtheilung untersucht.

In der dritten Abtheilung werden nun bei einer Differentialgleichung, *deren Differentialausdruck sich durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellen lässt,* die Integrale unter der Form von Systemen normaler Elementarintegrale aufgestellt. Alsdann ist das Resultat der Integrationen auszudrücken. Dieses geschieht dadurch, dass die Integralfunction (6.) vermittelst *bestimmter Integrale* dargestellt wird, in welchen nach anderen Variabeln, die mit $x-a$ multiplicirt sind, integrirt wird, wobei unter den Integralzeichen wieder dieselben Functionen μ auftreten. Dieselbe Methode ist zur Darstellung der Integralfunction (4.) bei beliebigen Func-

tionen v von der Form (5.) anwendbar. Aus dieser Darstellung der Integrale ergeben sich die Ausdrücke der Coefficienten in der Entwickelung von der Form (1.), (2.), und ergiebt sich die Werthberechnung der Integrale mit vorgeschriebener Annäherung. Ferner erfolgen aus dieser Darstellung die Ausdrücke für die Constanten bei der Fortsetzung eines Integrales durch Umgang um einen singulären Punkt und bei der Fortsetzung von einem singulären Punkte zu einem anderen, welche mittels einer rationalen Substitution ersten Grades bewerkstelligt wird. An die Ausdrücke der Integrale durch Systeme normaler Elementarintegrale knüpft sich die Discussion über das Verhalten der Integrale bei dem singulären Punkte.

In der vierten Abtheilung werden die algebraischen Aufgaben, die in dem Vorhergehenden auftreten, untersucht, wobei sich gleichzeitig ergiebt, dass die Constanten in den aufgestellten Systemen normaler Elementarintegrale algebraisch mit den Constanten in den rationalen Coefficienten der Differentialgleichung zusammenhängen. Es wird speciell gezeigt, dass wenn letztere Constanten algebraische Zahlen sind, sich alle in dem Vorhergehenden verlangten Operationen durchführen lassen.

In der fünften Abtheilung wird darauf hingewiesen, dass der weiteren Untersuchung ein solcher Differentialausdruck verbleibt, der sich nicht mehr durch ein System von Differentialausdrücken darstellen lässt, von denen der erste oder letzte ein normaler ist. Es wird nun allgemein aus den Sätzen der ersten Abtheilung nachgewiesen, dass wenn einer beliebigen homogenen linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten die Integrale aus einem System normaler Elementarintegrale genügen, die Constanten in letzterer algebraisch mit den Constanten in der Differentialgleichung zusammenhängen, abgesehen davon, dass möglicherweise in den obengenannten Grössen χ eine endliche Anzahl zunächst unbestimmter Constanten auftritt. Dabei wird aber zugleich gezeigt, dass es auch Differentialgleichungen giebt, denen normale Elementarintegrale formell genügen, während in den für diese Differentialgleichungen wirklich bestehenden Integralausdrücken (6.), in denen die μ die Form (5.) haben, ***kein normales Elementarintegral*** vorkommen kann. Hieraus ergiebt sich alsdann für die Differentialgleichungen, welche die hier übrig bleibenden Differentialausdrücke enthalten, dass, solange dieselben allgemein aufgefasst werden, zur Aufstellung von Systemen normaler Elementarintegrale ***specielle Convergenzbetrachtungen erforderlich sind.***

Erste Abtheilung.

1.

Reguläre Integrale.

In der Differentialgleichung

$$(1.)\qquad \frac{d^m y}{dx^m}+p\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+p_m y \;=\; 0$$

sollen die Coefficienten p in einem Kreise um $x=a$ abgesehen von diesem Punkte einwerthige und stetige analytische Functionen sein, die für $x=a$ in endlicher Ordnung unendlich werden.

I. Hat die Differentialgleichung (1.) bei $x=a$ ein reguläres Integral, so muss der Factor der höchsten Potenz des Logarithmus in jedem Ausdrucke, der die Glieder enthält, in denen die Exponenten von $x-a$ sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, für sich der Differentialgleichung genügen, die Differentialgleichung hat daher auch ein reguläres Integral der Form $(x-a)^r\sum_0^\infty c_\alpha(x-a)^\alpha$ (Abh. Bd. 74, No. 2). Hieraus ergiebt sich: Hat bei $x=a$ die Differentialgleichung l linearunabhängige reguläre Integrale, so hat sie l Integrale der Form

$$(2.)\qquad v_1\int dx\,v_2\ldots\int v_\alpha\,dx \qquad\qquad (\alpha=1,\ldots l)$$

wo v von der Form $(x-a)^r\sum_0^\infty c_\alpha(x-a)^\alpha$ ist (Abh. Bd. 74, No. 2).

Der Coefficient $p_\alpha(\alpha=0,\ldots m;\; p_0=1)$ werde in der Ordnung π_α für $x=a$ unendlich, wo $\pi_\alpha=0$ gesetzt ist, wenn p_α für $x=a$ nicht unendlich wird. In der Reihe der positiven ganzen Zahlen

$$(3.)\qquad \pi_\alpha+m-\alpha \qquad\qquad (\alpha=0,\ldots m),$$

welche die zu den Coefficienten p_α gehörenden Zahlen genannt worden sind, trete die grösste zuerst bei dem Zeiger h auf. Derselbe ist der ***charakteristische Index*** bei $x=a$ genannt worden (Abh. Bd. 75, No. 1). Die Hauptbedeutung des charakteristischen Index tritt bei Aufsuchung der determinirenden Factoren in No. 4 hervor.

Wenn die Differentialgleichung ein Integral v von der Form $(x-a)^r\sum_0^\infty c_\alpha(x-a)^\alpha$ hat, so muss der charakteristische Index kleiner als die Ordnung m sein. Durch Anwendung der Substitution $y=v\int z\,dx$, welche den charakteristischen Index ungeändert lässt, ergiebt sich: Ist der charakte-

ristische Index gleich h, so giebt es höchstens $m-h$ linearunabhängige reguläre Integrale (Abh. Bd. 74, No. 5; Bd. 75, No. 1). Damit es deren m giebt, ist also nothwendig, dass $h=0$ ist. Dieses ist zugleich hinreichend (s. II.).

II. Wenn die Entwickelung $(x-a)^r\sum_0^\infty k_\alpha(x-a)^\alpha$, wo Mod $k_0 \gtrless 0$ ist, der Differentialgleichung genügen soll und der Differentialausdruck nach Potenzen von $x-a$ entwickelt wird, so erhält man, indem der Coefficient der Anfangspotenz $k_0(x-a)^{r-\pi_h-m+h}$ gleich Null gesetzt wird, die Gleichung $(m-h)^{\text{ten}}$ Grades (Abh. Bd. 74, No. 6):

$$(4.)\quad \begin{cases} \qquad [p_h(x-a)^{\pi_h}]_{x=a}r(r-1)\dots(r-m+h+1) \\ +[p_{h+1}(x-a)^{\pi_h+1}]_{x=a}r(r-1)\dots(r-m+h+2)+\dots+[p_m(x-a)^{\pi_h+m-h}]_{x=a}=0. \end{cases}$$

Diese Gleichung ist *Exponentengleichung* genannt worden (Abh. Bd. 83, No. 6). Die Wurzeln derselben seien r_1 bis r_{m-h}. Wird $(x-a)^r\sum_0^\infty k_\alpha(x-a)^\alpha$ mit v bezeichnet, $y=v\int z\,dx$ gesetzt und die Differentialgleichung für z gebildet, so hat deren Exponentengleichung die $m-h-1$ Wurzeln, die aus der Reihe der Grössen r_1-r-1 bis $r_{m-h}-r-1$ hervorgehen, nachdem eine derselben gleich -1 weggenommen ist. Setzt man statt y in die Differentialgleichung (1.) $(x-a)^\varrho u$ ein, so hat diese Differentialgleichung eine Exponentengleichung, deren Wurzeln $r_1-\varrho$ bis $r_{m-h}-\varrho$ sind. In dem Coefficienten der $(m-h)^{\text{ten}}$ Ableitung bleibt das Anfangsglied ungeändert, daher bleibt auch die grösste der zu den Coefficienten gehörenden Zahlen dieselbe wie in (3.), diese sei durch g bezeichnet. (Vgl. No. 2, II.)

Es werde nun in (1.) $(x-a)^\varrho u$ statt y gesetzt, wo ϱ eine Wurzel der Exponentengleichung (4.) ist: die hieraus hervorgehende Differentialgleichung sei

$$(5.)\qquad \frac{d^m u}{dx^m}+P_1\frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}}+\dots+P_m u = 0.$$

Dann werde

$$(6.)\qquad P_\alpha(x-a)^{g-m+\alpha} = Q_\alpha(x) = Q_\alpha(a)+(x-a)Q_\alpha^{(1)}(x) \qquad (\alpha=0,\dots m),$$

$P_0=1$ gesetzt. $Q_m(a)$ ist gleich Null, da eine Wurzel der Exponentengleichung von (5.) gleich Null ist. Die Differentialgleichung (5.) werde auf die Form gebracht

$$(7.)\quad \begin{cases} Q_h(a)(x-a)^{m-h-1}\dfrac{d^{m-h}u}{dx^{m-h}}+Q_{h+1}(a)(x-a)^{m-h-2}\dfrac{d^{m-h-1}u}{dx^{m-h-1}}+\dots+Q_{m-1}(a)\dfrac{du}{dx} \\ = -(x-a)^m Q_0^{(1)}(x)\dfrac{d^m u}{dx^m}-(x-a)^{m-1}Q_1^{(1)}(x)\dfrac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}}-\dots-Q_m^{(1)}(x)u. \end{cases}$$

Es ergiebt sich nun, wenn die Entwickelung $u = \sum_0^\infty c_\alpha (x-a)^\alpha$ eingesetzt wird, durch Gleichstellung der Coefficienten von $(x-a)^\alpha$ von $\alpha = 0$ an,

$$(8.)\quad \begin{cases} c_{\alpha+1}\{Q_h(a)(\alpha+1)\alpha \ldots (\alpha+1-m+h+1) \\ + Q_{h+1}(a)(\alpha+1)\alpha \ldots (\alpha+1-m+h+2) + \cdots + Q_{m-1}(a)(\alpha+1)\} \\ = A_{\alpha 0} c_\alpha + A_{\alpha 1} c_{\alpha-1} + \cdots + A_{\alpha\alpha} c_0, \end{cases}$$

wo die Grössen A sich aus Coefficienten der Reihenentwickelungen auf der rechten Seite in (7.) und positiven Zahlen durch Multiplication und Addition zusammensetzen.

Der Coefficient von $c_{\alpha+1}$ in (8.), gleich Null gesetzt, ergiebt eine Gleichung, die aus der Exponentengleichung von (5.) gemäss (4.) hervorgeht, wenn r durch $\alpha+1$ ersetzt wird, und die demnach zu Wurzeln α

$$(9.)\quad r_1-\varrho-1,\quad r_2-\varrho-1,\quad \ldots\quad r_{m-h}-\varrho-1$$

hat. Die Wurzeln der Gleichung (4.) r_1 bis r_{m-h} seien so geordnet, dass diejenigen, die sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, auf einander folgen, und in diesen der reelle Theil der vorhergehenden nicht kleiner als der der folgenden sei. Wird $\varrho = r_1$ gesetzt, so verschwindet der Coefficient von $c_{\alpha+1}$ in (8.) für keine ganze Zahl $\alpha \geqq 0$, und es ergeben sich die Coefficienten c_α unter der Form $c_0 \frac{c_\alpha}{c_0}$, wo $\frac{c_\alpha}{c_0}$ eindeutig ist. Wird unter der Annahme, dass $(x-a)^{r_1} u = v$ convergirt, $y = v\int z dx$ gesetzt, und die Differentialgleichung für z gebildet, so haben die Wurzeln der Exponentengleichung derselben r_2-r_1-1 bis $r_{m-h}-r_1-1$ dieselbe Anordnung wie die Wurzeln der Gleichung (4.). Wenn dagegen der Exponent ϱ so beschaffen ist, dass sich unter den Grössen (9.) ganze Zahlen gleich oder grösser als Null befinden, und eine solche α_1 ist, so muss für $\alpha = \alpha_1$ auch die rechte Seite in (8.) verschwinden, wenn die formelle Entwickelung möglich sein soll; c_{α_1+1} bleibt dann zunächst unbestimmt. (Vgl. Abh. Bd. 74, No. 8.)

Der charakteristische Index h sei gleich Null. Wenn nun der Coefficient von $c_{\alpha+1}$ in (8.) für keine ganze Zahl $\alpha \geqq 0$ verschwindet, so convergirt die Reihenentwickelung $\sum_0^\infty c_\alpha (x-a)^\alpha$ in einem Kreise um $x = a$ nach einem von Herrn *Fuchs* bewiesenen Satze (Bd. 66, p. 148; Bd. 68, p. 362). Dieses gilt auch noch und wird in derselben Weise bewiesen, wenn unter den Wurzeln (9.) positive ganze Zahlen vorkommen, aber die formelle Entwickelung besteht (vgl. Abh. des Verf. Bd. 91, p. 103). Einer Gruppe von

λ Wurzeln der Exponentengleichung, die sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, entspricht eine Gruppe von λ Integralen unter der Form (2.). Aus derselben ergeben sich, wenn bei den Integrationen das constante Glied annullirt wird, Entwickelungen regulärer Integrale unter der Form (2.) der Einleitung, die nach der Bezeichnung des Herrn *Fuchs* bezüglich zu jenen Wurzeln als Exponenten gehören, d. h. man kann eine solche Entwickelung mit $(x-a)^{-r}$ multipliciren, wo r eine der Wurzeln ist; dann bleiben die Functionen $\varphi(x)$ für $x=a$ endlich und verschwinden nicht alle (vgl. Abh. des Verf. Bd. 87, p. 242). Der charakteristische Index h sei grösser als Null. Wenn alsdann auch der Coefficient von $c_{\alpha+1}$ in (8.) für keine ganze Zahl $\alpha \geqq 0$ verschwindet, so dass in der Entwickelung $\frac{c_\alpha}{c_0}$ eindeutig bestimmt ist, so convergirt die Entwickelung nicht immer (Abh. Bd. 74, No. 8; Bd. 75, No. 7). Weiteres hierüber siehe in No. 23 und 26.

III. Die Differentialgleichung (1.) werde bei $x=\infty$ betrachtet, die Coefficienten p sollen ausserhalb eines Kreises um $x=0$, abgesehen von $x=\infty$, einwerthig und stetig und für $x=\infty$ in endlicher Ordnung unendlich sein. Durch die Substitution $x=\frac{1}{t}$ wird die Differentialgleichung wieder in eine lineare übergeführt, $\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^n t^{n+1}\frac{d^n(t^{n-1}y)}{dt^n}$. Wird der Differentialausdruck in (1.) durch $F_m(y,x)$ bezeichnet, so erhält man

$$F_m(y,t^{-1}) = (-t^2)^m F'_m(y,t),$$

wo der Coefficient der höchsten Ableitung in F'_m gleich 1 ist. Die Untersuchung kommt nun auf die von $F'_m(y,t)=0$ zurück. Unter dem charakteristischen Index und der Exponentengleichung von $F_m(y,x)=0$ bei $x=\infty$ werden die entsprechenden Ausdrücke von $F'_m(y,t)=0$ bei $t=0$ verstanden.

2.

Integrirende Factoren und Systeme homogener linearer Differentialausdrücke.

I. Die m linearunabhängigen Integrale der Differentialgleichung

$$(1.)\qquad \frac{d^m y}{dx^m}+p_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+p_m y = 0$$

bei irgend einem Punkte seien auf die Form

$$(2.)\qquad y_\alpha = v_1\int dx v_2\ldots\int v_\alpha dx \qquad (\alpha=1,\ldots m)$$

gebracht, und es werde der homogene lineare Differentialausdruck mit dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1 in der Differentialgleichung α^{ter} Ordnung für y_1 bis y_α durch $F_\alpha(y, x)$ bezeichnet. Alsdann ist

$$F_{\alpha-1}(y_\alpha, x) = v_1 v_2 \dots v_\alpha.$$

Hieraus folgt, wenn

$$(3.) \qquad v_1 v_2 \dots v_\alpha = \mu_\alpha$$

gesetzt wird, indem die Differenz zweier homogener linearer Differentialausdrücke, in denen die Coefficienten der höchsten Ableitungen übereinstimmen und die, gleich Null gesetzt, Differentialgleichungen mit demselben Systeme linearunabhängiger Integrale ergeben, (gemäss Form (2.) der Integrale) identisch verschwinden muss,

$$(4.) \qquad \frac{d}{dx}\{\mu_\alpha^{-1} F_{\alpha-1}(y, x)\} = \mu_\alpha^{-1} F_\alpha(y, x).$$

Also ist μ_α^{-1} integrirender Factor von $F_\alpha(y, x)$.

Ist $\underline{y}$ irgend ein integrirender Factor von $F_m(y, x)$, so dass

$$\frac{d}{dx}\{\underline{y} f_{m-1}(y, x)\} = \underline{y} F_m(y, x),$$

und wird der Coefficient der $(m-1-\alpha)^{\text{ten}}$ Ableitung in $f_{m-1}(y, x)$ durch l_α bezeichnet, so ergiebt sich

$$(5.) \qquad \underline{y} p_\alpha = \underline{y} l_\alpha + \frac{d}{dx}(\underline{y} l_{\alpha-1}) \qquad (\alpha = 1, \dots m,\ l_0 = 1,\ l_m = 0).$$

Durch Elimination der Grössen $\underline{y} l_\alpha$ entsteht die Differentialgleichung

$$(6.) \qquad \frac{d^m \underline{y}}{dx^m} - \frac{d^{m-1} p_1 \underline{y}}{dx^{m-1}} + \frac{d^{m-2} p_2 \underline{y}}{dx^{m-2}} + \dots + (-1)^m p_m \underline{y} = 0.$$

Der Differentialausdruck in (6.) werde durch $\underline{F}_m(\underline{y}, x)$ bezeichnet und der dem Differentialausdruck $F_\alpha(y, x)$ in derselben Weise entsprechende durch $\underline{F}_\alpha(\underline{y}, x)$. μ_m^{-1} ist integrirender Factor von $F_m(y, x)$, und $\underline{F}_m = 0$ wird ersetzt durch $\underline{F}_{m-1}(\underline{y}, x) = c_m \mu_m$, wo c_m eine Constante. Setzt man in (6.) $\underline{y} = \mu_m^{-1}\int \mu_m \underline{y}_1 dx$, so ergiebt sich mittelst des Zusammenhanges der Coefficienten durch die Gleichungen (5.) $\underline{F}_{m-1}(\underline{y}_1, x) = 0$. μ_{m-1}^{-1} ist integrirender Factor von F_{m-1}, und $\underline{F}_{m-1} = c_m \mu_m$ wird ersetzt durch

$$\underline{F}_{m-2}(\underline{y}, x) = c_{m-1}\mu_{m-1} + c_m \mu_{m-1}\int \mu_{m-1}^{-1}\mu_m dx,$$

wo c_{m-1} eine Constante. Setzt man $\underline{y}_1 = \mu_{m-1}^{-1}\int \mu_{m-1}\underline{y}_2 dx$ in $\underline{F}_{m-1}(\underline{y}_1, x) = 0$,

so ergiebt sich auf dieselbe Weise $\underline{F}_{m-2}(\underline{y}_2, x) = 0$. Nach diesem Verfahren erhält man das Resultat:

Sind die Integrale von $F_m(y, x) = 0$

$$(7.) \qquad \mu_1, \; \mu_1\int \mu_1^{-1}\mu_2 dx, \; \dots \; \mu_1\int dx \mu_1^{-1}\mu_2\int\dots\int \mu_{m-1}^{-1}\mu_m dx,$$

so sind die von $\underline{F}_m(\underline{y}, x) = 0$

$$(8.) \qquad \mu_m^{-1}, \; \mu_m^{-1}\int \mu_m\mu_{m-1}^{-1} dx, \; \dots \; \mu_m^{-1}\int dx \mu_m\mu_{m-1}^{-1}\int\dots\int \mu_2\mu_1^{-1} dx.$$

Aus der Form der Ausdrücke (7.), (8.) geht die ***Reciprocität*** in der Art, wie die Integrale der einen Differentialgleichung aus denen der anderen sich herleiten lassen, hervor, entsprechend der Reciprocität in der Art, wie der eine der beiden Differentialausdrücke $F_m(y, x)$ und $\underline{F}_m(\underline{y}, x)$ aus dem anderen entsteht (Abh. Bd. 76, No. 1). Daher sind die Ausdrücke F_m und $\underline{F}_m$ ***reciproke Differentialausdrücke,*** die Differentialgleichungen $F_m = 0$ und $\underline{F}_m = 0$ ***reciproke Differentialgleichungen*** genannt worden (Abh. Bd. 83, No. 7, V).

Durch Anwendung der successiven integrirenden Factoren oder durch Anwendung der Reduction mittelst der Substitutionen $y = \mu_1\int dx \mu_1^{-1} y_1$, $y_1 = \mu_2\int dx \mu_2^{-1} y_2$, etc. ergiebt sich, dass die Integrale (7.) von $F_m(y, x) = 0$ dieselben sind, wie die der Differentialgleichung, in welcher das ***System homogener linearer Differentialausdrücke*** F_{m-k} und f_k

$$(9.) \qquad F_{m-k}(y, x) \; = \; s, \; f_k(s, x)$$

gleich Null gesetzt ist, wo $F_{m-k} = 0$ zu Integralen

$$(10.) \qquad \mu_1\int dx \mu_1^{-1}\mu_2\int\dots\int \mu_{\mathfrak{a}-1}^{-1}\mu_{\mathfrak{a}} dx \qquad\qquad (\mathfrak{a} = 1, \dots m-k)$$

hat, $f_k = 0$ eine homogene lineare Differentialgleichung k^{ter} Ordnung mit dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1 ist, die zu Integralen

$$(11.) \qquad \mu_{m-k+1}\int dx \mu_{m-k+1}^{-1}\mu_{m-k+2}\int\dots\int \mu_{\mathfrak{b}-1}^{-1}\mu_{\mathfrak{b}} dx \qquad\qquad (\mathfrak{b} = m-k+1, \dots m)$$

hat (Abh. Bd. 76, No. 2). Die Coefficienten in F_{m-k} seien durch $p_{\mathfrak{a}}^{(k)}$ $(\mathfrak{a} = 0, \dots m-k)$, die in f_k durch $g_{\mathfrak{a}}$ $(\mathfrak{a} = 0, \dots k)$ bezeichnet. Aus der Gleichheit der Coefficienten der gleich hohen Ableitungen auf beiden Seiten in

$$(12.) \qquad F_m(y, x) \; = \; f_k(F_{m-k}(y, x), x)$$

gehen folgende Gleichungen hervor. Es werde die Bezeichnung

$$(13.) \qquad z_{\mathfrak{a}} + r\frac{dz_{\mathfrak{a}-1}}{dx} + \frac{r(r-1)}{1.2}\frac{d^2 z_{\mathfrak{a}-2}}{dx^2} + \dots + \frac{d^r z_{\mathfrak{a}-r}}{dx^r} = \left(1 + \frac{dz_{\mathfrak{a}}}{dx}\right)_r$$

gebraucht. Dann ergiebt sich aus (12.) das Gleichungssystem

$$(14.)\quad \begin{cases} p_\mathfrak{a} = \sum_{\mathfrak{b}=0}^{\mathfrak{b}=k}\left(1+\frac{d}{dx}p_{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}^{(k)}\right)_{k-\mathfrak{b}} g_\mathfrak{b} & (\mathfrak{a}=1,\dots m) \\ g_0 = p_0^{(k)} = 1,\ p_{-1}^{(k)} = p_{-2}^{(k)} = \cdots = p_{-k+1}^{(k)} = p_{m-k+1}^{(k)} = p_{m-k+2}^{(k)} = \cdots = p_m^{(k)} = 0. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen gehen successive eindeutig die Coefficienten $p^{(k)}$ als ganze rationale Functionen der Grössen p und g und deren Differentialquotienten, die Coefficienten g als ganze rationale Functionen der Grössen p, $p^{(k)}$ und Ableitungen von $p^{(k)}$ hervor (Abh. Bd. 76, No. 2; Bd. 78, No. 2; Bd. 83, No. 2).

II. Die Coefficienten p, $p^{(k)}$ und g seien in der Nähe von $x = a$, abgesehen von diesem Punkte, einwerthig und stetig und für $x = a$ in endlicher Ordnung unendlich.

Man hat nun folgende Sätze (Abh. Bd. 76, No. 3):

a) Ist der charakteristische Index von $p^{(k)}$ $(\mathfrak{a} = 0, \dots m-k)$ gleich h' und der von $g_\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a} = 0, \dots k)$ gleich h'', so ist der von $p_\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a} = 0, \dots m)$ gleich $h'+h''$. Dieses ergiebt sich aus (14.), indem die Summanden des Productes $(p_0^{(k)}+\cdots+p_{m-k}^{(k)})(g_0+\cdots+g_k)$ betrachtet werden. Das Product des Anfangsgliedes in $p_{h'}^{(k)}$ und dessen in $g_{h''}$ ist dasjenige in $p_{h'+h''}$, daher ist auch die Summe der grössten der zu den Coefficienten $p_\mathfrak{a}^{(k)}$ gehörenden Zahlen (No. 1 (3.)) und der grössten der zu den Coefficienten $g_\mathfrak{a}$ gehörenden Zahlen die grösste der zu den Coefficienten $p_\mathfrak{a}$ gehörenden Zahlen.

b) Es sei die Exponentengleichung von $F_{m-k} = 0$ und die von $f_k = 0$ aufgestellt. Dann ergiebt sich: Die Wurzeln der Exponentengleichung von $F_{m-k} = 0$ und diejenigen von $f_k = 0$, letztere nachdem die grösste der zu $p_\mathfrak{a}^{(k)}$ gehörenden Zahlen hinzuaddirt ist, bilden zusammen die Wurzeln der Exponentengleichung von $F_m = 0$.

c) Der charakteristische Index in $\underline{F}_m(\underline{y}, x) = 0$ bei $x = a$ ist derselbe wie in $F_m(y, x) = 0$.

d) Die Wurzeln der Exponentengleichung von $F_m = 0$ seien r_1 bis r_{m-h}. Dann sind die Wurzeln der Exponentengleichung von $\underline{F}_m(\underline{y}, x) = 0$ die Grössen $-r_1-1+g$ bis $-r_{m-h}-1+g$, wo g die grösste der zu den Coefficienten $p_\mathfrak{a}$ gehörenden Zahlen ist.

Die Gleichheit der in Satz *b*) und Satz *d*) auf beiden Seiten der Gleichung auftretenden Polynome kann man auch dadurch erkennen (vgl. Abh. Bd. 91, No. 9, III), dass die in den Coefficienten vorkommenden Constanten aus den $p^{(k)}$ und g, und diejenigen aus den p, welche in Satz *b*)

nach (14.) durch die aus $p^{(k)}$ und g dargestellt sind, als mittelst der symmetrischen Verbindungen der Wurzeln der bezüglichen Exponentengleichungen ausgedrückt angesehen werden, und nun die Gleichheit der Polynome für den Fall, dass die Wurzeln nicht ganzzahlig sind und sich nicht um ganze Zahlen unterscheiden, nachgewiesen wird, worauf sich dieselbe wegen der Stetigkeit allgemein ergiebt. Jener Nachweis erfolgt sofort, wenn man die Differentialgleichungen so bildet, dass sie eine Anzahl Integrale der Form $(x-a)^r \sum_0^\infty c_\alpha (x-a)^\alpha$ enthalten, in denen die Exponenten nicht ganzzahlig sind und sich nicht um ganze Zahlen unterscheiden, und bei Satz *d*) die Relationen (7.), (8.) berücksichtigt.

III. Der reciproke Ausdruck von F_{m-k} ist durch $\underline{F}_{m-k}$, der von f_k in (9.) sei durch $\underline{f}_k$ bezeichnet. Es folgt nun aus dem bei (9.) Gesagten gemäss den Relationen (7.), (8.):

So wie die Integrale von $F_m = 0$ mit denen von

$$(15.) \qquad F_{m-k}(y, x) = s, \quad f_k(s, x) = 0$$

übereinstimmen, so stimmen die von $\underline{F}_m = 0$ mit denen von

$$(16.) \qquad \underline{f}_k(\underline{y}, x) = \underline{s}, \quad \underline{F}_{m-k}(\underline{s}, x) = 0$$

überein (Abh. Bd. 76, No. 2). Zur Anwendung dieser Formeln kann man die Integrale bei einem nichtsingulären Punkte unter der Form (10.), (11.) dargestellt ansehen. Wenn nun über die Coefficienten in F_m und F_{m-k} bei $x = a$ die Voraussetzung aus II gemacht wird, so folgt aus (14.), den Relationen (15.), (16.) und den Sätzen II *a*) und *c*): Enthält $F_m = 0$ mit dem charakteristischen Index $h = h' + h''$ bei $x = a$ die Integrale einer Differentialgleichung $(m-k)^{\text{ter}}$ Ordnung $F_{m-k} = 0$ mit dem charakteristischen Index h', so enthält $\underline{F}_m = 0$ die Integrale einer Differentialgleichung k^{ter} Ordnung $\underline{f}_k = 0$ mit dem charakteristischen Index h'' (Abh. Bd. 76, No. 3). Ist $h = k$ und enthält $F_m = 0$ die Integrale von $F_{m-h} = 0$ mit dem charakteristischen Index Null, so enthält also $\underline{F}_m = 0$ die von $\underline{f}_h = 0$ mit dem charakteristischen Index h und umgekehrt (l. c. No. 4); der besondere Fall, wo $h = 1$ ist, war in Abh. Bd. 75 behandelt und bildete den Ausgangspunkt für die Untersuchungen in dieser Nummer.

IV. $F_m(y, x)$ sei durch das System $F_{m-k}(y, x) = s$, $f_k(s, x)$ gegeben und die Coefficienten p, $p_1^{(k)}$ und g sollen ausserhalb eines Kreises um $x = 0$, abgesehen von $x = \infty$, einwerthig und stetig und für $x = \infty$ in endlicher

Ordnung unendlich sein. Wird die Substitution $x = \frac{1}{t}$ vorgenommen, wird alsdann $F_m(y, x) = (-t^2)^m F'_m(y, t)$ gesetzt, entsprechend bei F_{m-k} und f_k, ferner $t^{-2(m-k)} f_k(t^{2(m-k)} s, t) = f'_k(s, t)$, so folgt für $F'_m(y, t)$ das System $F'_{m-k}(y, t) = s'$, $f''_k(s', t)$. Der charakteristische Index in $f''_k = 0$ bei $t = 0$ ist derselbe wie in $f'_k = 0$. Für den zu $F_m(y, x)$ reciproken Ausdruck $\underline{F}_m(\underline{y}, x)$ sei

$$\underline{F}_m(\underline{y}, t^{-1}) = (-t^2)^m \underline{F}'_m(\underline{y}, t).$$

Der reciproke Ausdruck von $F'_m(y, t)$ ist alsdann $t^{2(m-1)} \underline{F}'_m(t^{-2(m-1)} y, t)$ (Abh. Bd. 83, p. 137).

3.

Determinirende Factoren, Systeme normaler Elementarintegrale, Systeme normaler Elementardifferentialausdrücke.

I. $G_l(y, x)$ sei ein homogener linearer Differentialausdruck l^{ter} Ordnung mit Coefficienten, die bei $x = a$, abgesehen von diesem Punkte, einwerthig und stetig und für $x = a$ in endlicher Ordnung unendlich seien, der Coefficient der höchsten Ableitung gleich 1. $G_l(y, x)$ sei unter der Form $e^w \bar{G}_l(e^{-w} y, x)$ darstellbar, wo w gleich Null oder von der Form $\sum_1^n c_{-\alpha}(x-a)^{-\alpha}$, $\bar{G}_l$ ein homogener linearer Differentialausdruck, dessen charakteristischer Index bei $x = a$ gleich Null ist, so ist dieses nur auf *eine* Weise möglich, wie sich aus der Betrachtung des Coefficienten von $\frac{d^{l-1}y}{dx^{l-1}}$ ergiebt. Die Differentialgleichung $\bar{G}_l = 0$ hat nach No. 1 II ein System Integrale von der Form

$$(1.) \quad \nu_1 \int dx\, \nu_1^{-1} \nu_2 \int \ldots \int \nu_{\alpha-1}^{-1} \nu_\alpha dx \qquad (\alpha = 1, \ldots l),$$

wo ν_α von der Form $(x-a)^r \sum_0^\infty c_\alpha (x-a)^\alpha$ ist; demnach hat $G_l = 0$ ein System Integrale von der Form

$$(2.) \quad e^w \nu_1 \int dx (e^w \nu_1)^{-1} e^w \nu_2 \int \ldots \int (e^w \nu_{\alpha-1})^{-1} e^w \nu_\alpha dx \qquad (\alpha = 1, \ldots l).$$

Daher ist $G_l(y, x)$ durch das System darstellbar (No. 2 (9.))

$$(3.) \quad \frac{dy}{dx} - q_1 y = y_1, \quad \frac{dy_1}{dx} - q_2 y_1 = y_2, \ \ldots \ \frac{dy_{l-1}}{dx} - q_l y_{l-1},$$

wo $q_\alpha = \frac{d \log e^w \nu_\alpha}{dx}$, und demnach

$$(4.) \quad \frac{dy}{dx} - q_\alpha y = e^w \left\{ \frac{d e^{-w} y}{dx} - \frac{d \log \nu_\alpha}{dx} e^{-w} y \right\}.$$

Eine Function der Form

$$(5.)\quad e^{w}(x-a)^{r}\sum_{0}^{\infty}c_{\alpha}(x-a)^{\alpha},$$

wo w gleich Null oder von der Form $\sum_{1}^{n} c_{-\alpha}(x-a)^{-\alpha}$, ist ein ***normales Elementarintegral*** genannt worden, e^{w} ***der determinirende Factor***, r, wenn $\text{Mod}\, c_0 \gtrless 0$ ist, der ***Exponent*** in dem normalen Elementarintegral. Ist $e^{w}=1$, so hat man ein ***reguläres*** Elementarintegral. Ein Ausdruck der Form

$$(6.)\quad \mu_1\int dx\,\mu_1^{-1}\mu_2\int\ldots\int\mu_{s-1}^{-1}\mu_s\,dx,$$

worin die μ_α normale Elementarintegrale sind, ist ein ***System normaler Elementarintegrale*** $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_s$ $(s\geqq 1)$ genannt worden (Abh. Bd. 95, No. 5). Entsprechend werde der Ausdruck

$$(7.)\quad e^{w}\left\{\frac{de^{-w}y}{dx}-pe^{-w}y\right\},$$

wo $\frac{dy}{dx}-py$ bei $x=a$ den charakteristischen Index Null hat, w wie in (5.) beschaffen ist, ein ***normaler Elementardifferentialausdruck*** genannt, e^{w} ***der determinirende Factor*** in demselben, $\frac{dy}{dx}-py$ ein *regulärer* Elementardifferentialausdruck. Ein Ausdruck der Form

$$(8.)\quad g_{(1)}(y,x)=y_1,\quad g_{(2)}(y_1,x)=y_2,\quad \ldots\ g_{(s)}(y_s,x),$$

wo $g_{(\alpha)}$ ein normaler Elementardifferentialausdruck, heisse ein ***System normaler Elementardifferentialausdrücke***, die Ausdrücke g_1 bis g_s $(s\geqq 1)$ sind die Bestandtheile des Systemes.

II. Es sei der Differentialausdruck $F_m(y,x)$ durch das System

$$(9.)\quad P_\chi(y,x) = s,\quad Q_\lambda(s,x)$$

dargestellt, wo P_χ gleich einem Systeme normaler Elementardifferentialausdrücke, Q_λ ein homogener linearer Differentialausdruck mit dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1, dessen Coefficienten für $x=a$ nur in endlicher Ordnung unendlich werden, und so beschaffen, dass $Q_\lambda=0$ nicht mehr ein normales Elementarintegral enthält, oder die Ordnung von Q_λ gleich Null ist. Wenn S irgend ein System normaler Elementardifferentialausdrücke ist, so dass die Integrale von $S=0$ in $F_m=0$ enthalten sind, so sind dieselben auch in $P_\chi=0$ enthalten, wie sich auf folgende Weise ergiebt.

Zwei normale Elementardifferentialausdrücke φ und χ heissen ***ähnlich***, wenn die determinirenden Factoren e^{w} übereinstimmen, und die Wurzel der

Exponentengleichung von $e^{-w}\varphi(e^w y, x) = 0$ sich von der von $e^{-w}\chi(e^w y, x) = 0$ höchstens um eine ganze Zahl unterscheidet. Zwei *Systeme* von normalen Elementardifferentialausdrücken heissen *ähnlich*, wenn sie gleich viele Bestandtheile enthalten, und die Bestandtheile von derselben Stelle in beiden ähnlich sind. Sind die Integrale von $\varphi = 0$ und $\chi = 0$ linearunabhängig und werden dieselben in einer homogenen linearen Differentialgleichung vereinigt, so erhält letztere die Formen

$$(10.)\quad \begin{cases} \varphi(y, x) = y_1, & \chi_1(y_1, x) = 0, \\ \chi(y, x) = y'_1, & \varphi_1(y'_1, x) = 0, \end{cases}$$

wo χ_1 ein normaler Elementardifferentialausdruck, der χ ähnlich ist, φ_1 ein solcher, der φ ähnlich ist. Da nun in $F_m = 0$ das Integral von $\chi = 0$ enthalten ist, wo χ der normale Elementardifferentialausdruck, der in S an der Spitze steht, so folgt durch successive Anwendung von (10.) in Bezug auf χ und die Bestandtheile von P_χ, dass auch eine Darstellung durch ein System normaler Elementardifferentialausdrücke besitzt, in welcher χ an der Spitze steht, und hierauf folgt ein System, welches dem System von P_χ in (9.) ähnlich ist, nachdem ein gewisser χ ähnlicher Bestandtheil herausgenommen ist. In gleicher Weise ergiebt sich, dass der auf χ folgende Ausdruck in P_χ eine Darstellung hat, in welcher der zweite Bestandtheil von S an der Spitze steht, und indem man in derselben Weise fortfährt, erhält man den Satz, dass die Integrale von $S = 0$ auch $P_\chi = 0$ erfüllen; vgl. hierüber No. 8 (Abh. Bd. 76, No. 5, wo die Systeme normaler Elementarintegrale angewandt sind, Abh. Bd. 91, No. 7, III *a*)).

III. $F_m(y, x)$ sei ein homogener linearer Differentialausdruck m^{ter} Ordnung mit dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1, dessen Coefficienten bei $x = a$, abgesehen von diesem Punkte, einwerthig und stetig und für $x = a$ in endlicher Ordnung unendlich seien. Wenn w ein Ausdruck gleich Null oder von der Form $\sum_1^n c_{-\alpha}(x-a)^{-\alpha}$ ist, so dass in $e^{-w}F_m(e^w y, x) = 0$ der charakteristische Index bei $x = a$ kleiner als m, so heisse e^w *ein fundamentaler determinirender Factor von* $F_m(y, x)$ *bei* $x = a$ und die Exponentengleichung von $e^{-w}F_m(e^w y, x) = 0$ bei $x = a$ die *diesem fundamentalen determinirenden Factor zugehörige Exponentengleichung.* In $F_m(y, x)$ sollen ausserhalb eines Kreises um $x = 0$, abgesehen von $x = \infty$, die Coefficienten einwerthig und stetig und für $x = \infty$ in endlicher Ordnung unendlich sein. Wenn w gleich Null oder von der Form $\sum_1^n c_\alpha x^\alpha$ ist, so dass in $e^{-w}F_m(e^w y, x) = 0$

bei $x=\infty$ der charakteristische Index kleiner als m ist, so werde e^{w} *ein fundamentaler determinirender Factor von* $F_m(y,x)$ *bei* $x=\infty$ und die Exponentengleichung in $e^{-w}F_m(e^{w}y,x)=0$ bei $x=\infty$ die *demselben zugehörige Exponentengleichung* genannt. $e^{-w}F_m(e^{w}y,x)$ geht über, wenn $x=t^{-1}$, $F_m(y,x)=(-t^2)^m F'_m(y,t)$, $w(x)=w'(t)$ gesetzt wird, in $(-t^2)^m e^{-w'}F'_m(e^{w'}y,t)$, so dass also der charakteristische Index in $e^{-w'}F'_m(e^{w'}y,t)=0$ bei $t=0$ kleiner als m werden muss (No. 1, III), demnach die Aufsuchung der fundamentalen determinirenden Factoren bei $x=\infty$, wie bei $x=a$ vorzunehmen ist. Wenn bei $x=a$ der charakteristische Index gleich Null ist, so ist ein Ausdruck w gleich $\sum_1^n c_{-\alpha}(x-a)^{-\alpha}$ mit der angegebenen Eigenschaft nicht möglich, wie aus dem Systeme (3.) und Satz No. 2, II *a*) hervorgeht. Die bei einem *singulären* Punkte von $F_m(y,x)=0$ mit rationalen Coefficienten zu den fundamentalen determinirenden Factoren gehörenden Exponentengleichungen werden *fundamentale Exponentengleichungen* genannt.

$F_m(y,x)$ sei durch das System

$$(11.)\qquad F_{m-k}(y,x) = s,\quad f_k(s,x)$$

dargestellt, wo F_{m-k} und f_k homogene lineare Differentialausdrücke mit dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1 sind, deren Coefficienten bei $x=a$, bezüglich $x=\infty$ abgesehen von diesem Punkte einwerthig und stetig und in diesem Punkte nur in endlicher Ordnung unendlich sind. Dann geht aus $e^{-w}F_m(e^{w}y,x)$ das System

$$(12.)\qquad e^{-w}F_{m-k}(e^{w}y,x) = s',\quad e^{-w}f_k(e^{w}s',x)$$

hervor. Hieraus folgt: Ist e^{w} fundamentaler determinirender Factor von $F_m(y,x)$, so auch von wenigstens einem der Ausdrücke F_{m-k} und f_k und umgekehrt (No. 2, II *a*), IV). Die Wurzeln der Exponentengleichung von $e^{-w}F_{m-k}(e^{w}y,x)=0$ und die von $e^{-w}f_k(e^{w}s,x)=0$, letztere nachdem eine ganze Zahl hinzuaddirt ist, bilden zusammen die Wurzeln der Exponentengleichung von $e^{-w}F_m(e^{w}y,x)=0$ (No. 2, II *b*), IV).

Der reciproke Differentialausdruck von $F_m(y,x)$ sei $\underline{F}_m(y,x)$ (No. 2, I), so ist der zu $e^{-w}F_m(e^{w}y,x)$ reciproke Differentialausdruck $e^{w}\underline{F}_m(e^{-w}y,x)$, wie aus der reciproken Beziehung der Integrale von $F_m=0$ und $\underline{F}_m=0$ (No. 2, (7.), (8.)) hervorgeht, indem dieselben bei einem nichtsingulären Punkte genommen werden. Daher sind die fundamentalen determinirenden Factoren von $\underline{F}_m$ die reciproken Ausdrücke derer von F_m (No. 2, II *c*), IV). Die

Wurzeln der zugehörigen Exponentengleichungen von $\overline{F}_m$ sind die mit entgegengesetzten Vorzeichen genommenen Wurzeln der zugehörigen Exponentengleichungen von F_m, zu denen eine ganze Zahl addirt ist. (No. 2, II *d*), IV.)

4.

Ermittelung der fundamentalen determinirenden Factoren.

I. Bei dem Differentialausdrucke $F_m(y, x)$ in No. 3, III sollen die Ausdrücke w von der Form $\sum_1^n c_{-\alpha}(x-a)^{-\alpha}$ aufgestellt werden, für welche der charakteristische Index in $e^{-w}F_m(e^w y, x)$ bei $x = a$ kleiner als die Ordnung m wird. (Abh. Bd. 76, No. 6; Bd. 83, No. 6; Bd. 91, No. 7, III *b*) und *c*).) Hierzu muss in $F_m(y, x)$ bei $x = a$ der charakteristische Index $h > 0$ sein (No. 3, III). Setzt man $e^{-w}\frac{d^r}{dx^r}e^w T = T_r$, $\frac{dw}{dx} = z$, so ist

$$(1.)\quad \begin{cases} T_r = \dfrac{d^rT}{dx^r} + rA_1\dfrac{d^{r-1}T}{dx^{r-1}} + \dfrac{r(r-1)}{1.2}A_2\dfrac{d^{r-2}T}{dx^{r-2}} + \cdots + A_rT, \\ A_\alpha = e^{-w}\dfrac{d^\alpha e^w}{dx^\alpha},\ A_1 = z,\ A_\alpha = zA_{\alpha-1} + \dfrac{dA_{\alpha-1}}{dx}. \end{cases}$$

In dem entwickelten Ausdruck von $e^{-w}F_m(e^w y, x)$ kommt daher w nur in $\frac{dw}{dx} = z$ und in Ableitungen von z vor. Aus dem Coefficienten von y in $e^{-w}F_m(e^w y, x)$ geht als nothwendige Bedingung dafür, dass der charakteristische Index in $e^{-w}F_m(e^w y, x)$ kleiner als m werden soll, die hervor, dass, wenn man in den Ausdruck

$$(2.)\quad z^h + p_1 z^{h-1} + \cdots + p_h$$

$z = \frac{dw}{dx}$, $w = \sum_1^n c_{-\alpha}(x-a)^{-\alpha}$ einsetzt, die höchste Potenz von $(x-a)^{-1}$, die in den Entwickelungen der $h+1$ Summanden z^h, p_1z^{h-1} bis p_h vorkommt, und die $n-1$ niedrigeren Potenzen aus dem Gesammtausdrucke (2.) ausfallen müssen.

A) Diese Bedingung bestimmt zunächst die möglichen Werthe des Gliedes mit dem höchsten Exponenten von $(x-a)^{-1}$ in z, der Grösse $-nc_{-n}(x-a)^{-(n+1)}$. π_α $(\alpha = 0, \ldots m)$ seien die in No. 1, I definirten positiven ganzen Zahlen. Die Exponenten der höchsten Potenzen von $(x-a)^{-1}$, die in den Summanden von (2.) vorkommen, sind in der Reihe enthalten

$$(3.)\quad h(n+1),\quad \pi_1 + (h-1)(n+1),\quad \pi_2 + (h-2)(n+1),\ \ldots\ \pi_h,$$

wenn $\pi_\alpha > 0$ ist; und wenn $\pi_\alpha = 0$ ist, so ist der höchste Exponent von

$(x-a)^{-1}$ in dem betreffenden Summanden von (2.) und ebenso die zu a gehörige Zahl in der Reihe (3.) kleiner als $h(n+1)$. Die grösste Zahl in der Reihe (3.) muss nun wenigstens zweimal vorkommen. Die Zahlen dieser Reihe seien auf die Form

$$(4.)\quad \begin{cases} h(n+1), \quad h(n+1)+\pi_1-(n+1), \\ h(n+1)+2\left(\frac{\pi_2}{2}-(n+1)\right), \dots h(n+1)+h\left(\frac{\pi_h}{h}-(n+1)\right) \end{cases}$$

gebracht. Die grösste der positiven Zahlen

$$(5.)\quad \pi_1, \frac{\pi_2}{2}, \dots \frac{\pi_h}{h},$$

von denen die letzte jedenfalls > 0 ist, sei g und trete zuletzt in $\frac{\pi_c}{c}$ auf. Ist $c < h$, so sei die grösste positive der Zahlen

$$(6.)\quad \pi_{c+1}-\pi_c, \frac{\pi_{c+2}-\pi_c}{2}, \dots \frac{\pi_h-\pi_c}{h-c},$$

von denen die letzte jedenfalls > 0 ist (weil h der charakteristische Index ist), $g^{(1)}$ und trete zuletzt in $\frac{\pi_{c^{(1)}}-\pi_c}{c^{(1)}-c}$ auf. Ist $c^{(1)} < h$, so sei die grösste positive der Zahlen

$$(7.)\quad \pi_{c^{(1)}+1}-\pi_{c^{(1)}}, \frac{\pi_{c^{(1)}+2}-\pi_{c^{(1)}}}{2}, \dots \frac{\pi_h-\pi_{c^{(1)}}}{h-c^{(1)}}$$

$g^{(2)}$ und trete zuletzt in $\frac{\pi_{c^{(2)}}-\pi_{c^{(1)}}}{c^{(2)}-c^{(1)}}$ auf. In dieser Weise ist fortzufahren, bis in einer solchen Reihe die grösste positive Zahl in der letzten Zahl auftritt. Dann erfüllen die positiven Zahlen g, $g^{(1)}$, $g^{(2)}$, etc. die Bedingung $g > g^{(1)} > g^{(2)} \dots > 0$. Diejenigen unter diesen Zahlen, die $\geqq 2$ und zugleich ganzzahlig sind, geben die Werthe des Exponenten $n+1$, die der Bedingung entsprechen, dass, wenn in (2.)

$$(8.)\quad \sigma(x-a)^{-(n+1)}$$

eingesetzt wird, σ sich so bestimmen lässt, dass die höchste Potenz von $(x-a)^{-1}$, die in den Entwickelungen der Summanden von (2.) z^h, $p_1 z^{h-1}$ bis p_h vorkommt, aus dem Gesammtausdrucke (2.) ausfällt (Abh. Bd. 76, No. 6).

Die Coefficienten σ sind die Wurzeln folgender Gleichungen:

Ist g einer der gefundenen Exponenten $n+1$, so ist σ jede Wurzel der Gleichung

$$(9.)\quad \sigma^c+[p_1(x-a)^g]_{x=a}\sigma^{c-1}+[p_2(x-a)^{2g}]_{x=a}\sigma^{c-2}+\dots+[p_c(x-a)^{cg}]_{x=a} = 0,$$

n welcher das absolute Glied von Null verschieden ist. Und ist $g^{(\nu)}$ ein Werth des Exponenten $n+1$, so ist σ jede Wurzel der Gleichung

$$(10.)\quad \begin{cases} \sigma^{c^{(\nu)}-c^{(\nu-1)}}+\left[-\dfrac{p_{c^{(\nu-1)}+1}}{p_{c^{(\nu-1)}}}(x-a)^{g^{(\nu)}}\right]_{x=a}\sigma^{c^{(\nu)}-c^{(\nu-1)}-1}+\cdots \\ \cdots+\left[-\dfrac{p_{c^{(\nu)}}}{p_{c^{(\nu-1)}}}(x-a)^{(c^{(\nu)}-c^{(\nu-1)})g^{(\nu)}}\right]_{x=a} = 0, \end{cases}$$

in der das absolute Glied von Null verschieden ist. Diese Gleichungen sind *Coefficientengleichungen* genannt worden. Mit jedem der gefundenen Werthe des Exponenten $n+1$ und den sämmtlichen Wurzeln der zugehörigen Coefficientengleichung seien die Ausdrücke $\sigma(x-a)^{(n+1)}$ (8.) gebildet. Dieselben sind die *Hauptpotenzen* von $F_m(y, x)$ bei $x = a$ genannt worden (Abh. Bd. 83, No. 6). Ihre Anzahl ist gleich oder kleiner als h. Einer einfachen Wurzel entspricht eine einfache, einer mehrfachen Wurzel eine mehrfache Hauptpotenz.

B) Aus einer Hauptpotenz geht das Anfangsglied in w hervor $c_{-n}(x-a)^{-n}$. Die übrigen Glieder in w werden in folgender Weise bestimmt.

Es werde eine einfache Hauptpotenz $\sigma(x-a)^{-(n+1)}$ von $F_m(y, x)$ angenommen. Die bei (2.) angegebene Bedingung liefert alsdann weitere $n-1$ Gleichungen, aus denen successive einwerthig die übrigen $n-1$ Glieder in z bestimmt werden. Denn wenn der Ausdruck (2.) durch $f(z)$ bezeichnet wird, so verschwindet in $\dfrac{\partial f(z)}{\partial z}$ der Coefficient der höchsten Potenz von $(x-a)^{-1}$, die in den Summanden hz^{h-1}, $p_1(h-1)z^{h-2}$ bis p_{h-1} vorkommt, nicht. Und mit diesem Coefficienten ist in jeder folgenden Gleichung der Coefficient eines folgenden Gliedes aus z multiplicirt. Der charakteristische Index in $e^{-w}F_m(e^w y, x)$ wird gleich $m-1$, also die zugehörige Exponentengleichung vom ersten Grade (Abh. Bd. 76, No. 6).

Es werde eine ϱ-fache Hauptpotenz genommen. w sei gleich $c_{-n}(x-a)^{-n}+w^{(1)}$ gesetzt. Wird

$$(11.)\quad e^{-c_{-n}(x-a)^{-n}}F_m(e^{c_{-n}(x-a)^{-n}}y, x) = F_m^{(1)}(y, x)$$

gesetzt, so ist nun $w^{(1)} = \sum\limits_1^{n-1} c_{-\lambda}(x-a)^{-\lambda}$, wo n gegeben ist und Coefficienten $c_{-\alpha}$ gleich Null sein dürfen, so zu bestimmen, dass in $e^{-w^{(1)}}F_m^{(1)}(e^{w^{(1)}}y, x)$ der charakteristische Index kleiner als m wird. Der charakteristische Index in $F_m^{(1)}$ sei $m-\tau$, so ist $\tau \leqq \varrho$ (Abh. Bd. 91, No. 7, III *b*)). Die Hauptpotenzen von $F_m^{(1)}$, in denen der Exponent von $(x-a)^{-1}$ kleiner als $n+1$ ist, kommen

höchstens in der Anzahl $\varrho-\tau$ vor (l. c.). Denn wenn durch $p_\lambda^{(1)}$ die Coefficienten von $F_m^{(1)}$ bezeichnet sind, so sind die Hauptpotenzen von $F_m^{(1)}$, in denen der Exponent kleiner als $n+1$ ist, unter den Hauptpotenzen enthalten, die der Ausdruck

$$(12.)\qquad z^{(1)\varrho-\tau}+\frac{p_{m-\varrho+1}^{(1)}}{p_{m-\varrho}^{(1)}}z^{(1)\varrho-\tau-1}+\cdots+\frac{p_{m-\tau}^{(1)}}{p_{m-\varrho}^{(1)}}$$

ergiebt, in welchem der charakteristische Index des Coefficientensystemes 1, $\frac{p_{m-\varrho+1}^{(1)}}{p_{m-\varrho}^{(1)}}$ bis $\frac{p_{m-\tau}^{(1)}}{p_{m-\varrho}^{(1)}}$ gleich $\varrho-\tau$ ist, und dieser Ausdruck liefert überhaupt höchstens $\varrho-\tau$ Hauptpotenzen. Ein Ausdruck $w^{(1)}$, in dem alle Coefficienten $c_{-\alpha}$ $(\alpha=n-1,\dots 1)$ gleich Null sind, besteht, wenn $\tau>0$ ist. Es sind nun diejenigen Ausdrücke $w^{(1)}$, in denen nicht alle Coefficienten Null sind, aufzustellen. Hierzu ist eine Hauptpotenz von $F_m^{(1)}$ mit dem Exponenten $\nu+1<n+1$ zu nehmen. Ist $\nu+1<n$, so wird $c_{-\alpha}$ $(\alpha=n-1,\dots\nu+1)$ gleich Null. Vermittelst der angenommenen Hauptpotenz $-\nu c_{-\nu}(x-a)^{-(\nu+1)}$ wird das Glied $c_{-\nu}(x-a)^{-\nu}$ in $w^{(1)}$ gebildet. Um die übrigen Coefficienten in $w^{(1)}$ zu bestimmen, tritt nun wieder das vorige Verfahren ein. Ist die angenommene Hauptpotenz $-\nu c_{-\nu}(x-a)^{-(\nu+1)}$ einfach, so ergeben sich die übrigen Coefficienten in $\frac{dw^{(1)}}{dx}$ eindeutig durch die bei (2.) angegebene Bedingung. Die Exponentengleichung von $e^{-w^{(1)}}F_m^{(1)}(e^{w^{(1)}}y,x)$ wird vom ersten Grade. Ist die angenommene Hauptpotenz mehrfach, so wird $w^{(1)}=c_{-\nu}(x-a)^{-\nu}+w^{(2)}$,

$$(13.)\qquad e^{-c_{-\nu}(x-a)^{-\nu}}F_m^{(1)}(e^{c_{-\nu}(x-a)^{-\nu}}y,x) = F_m^{(2)}(y,x)$$

gesetzt, und es sind die Coefficienten in $w^{(2)}$ zu bestimmen.

Die Anzahl τ $(\geqq 0)$ der Wurzeln der Exponentengleichung von $F_m^{(1)}$ und die Anzahl der Hauptpotenzen von $F_m^{(1)}$, in denen der Exponent von $(x-a)^{-1}$ kleiner als $n+1$ ist, sind zusammen gleich oder kleiner als ϱ. Indem man nun das angegebene Verfahren fortsetzt, ergiebt sich bei einer ϱ-fachen Hauptpotenz von $F_m(y,x)$:

Wenn man die von einander verschiedenen fundamentalen determinirenden Factoren e^w bildet, bei denen das Glied von $\frac{dw}{dx}$ mit dem höchsten Exponenten von $(x-a)^{-1}$ dieser Hauptpotenz gleich ist, so ist die Gesammtanzahl der Wurzeln der zu $e^{-w}F_m(e^w y,x)$ gehörenden Exponentengleichungen gleich oder kleiner als ϱ.

C) Ist $F_m(y, x)$ durch das System

$$(14.)\quad F_{m-k}(y, x) = s, \quad f_k(s, x)$$

dargestellt, wo F_{m-k} und f_k homogene lineare Differentialausdrücke mit dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1 sind, deren Coefficienten für $x = a$ nur in endlicher Ordnung unendlich werden, so folgt aus den Gleichungen zwischen den Coefficienten No. 2 (14.) und Satz No. 2, II *a*): Die Hauptpotenzen von F_{m-k} und die von f_k bei $x = a$ sind zusammen die von F_m (Abh. Bd. 83, No. 6, III).

Wird nun vorausgesetzt, dass der Ausdruck $Q_\lambda(s, x)$ in No. 3 II keine Hauptpotenz enthalte, so folgt aus dem vorhergehenden Satze, dass, wenn man das in *A*) und *B*) angegebene allgemeine Verfahren zur Herleitung der fundamentalen determinirenden Factoren von $F_m(y, x)$ anwendet, dieses Verfahren gerade successive die einzelnen Summanden der Grössen w liefert, die in den determinirenden Factoren der Bestandtheile von $P_\varkappa(y, x)$ in (No. 3, II) vorkommen. Es ergiebt sich dabei zugleich, indem die gleich vielfachen Wurzeln einer Coefficientengleichung aus einer Gleichung hervorgehen, die diese Wurzeln einfach enthält, dass gewöhnlich zur Bestimmung der Summanden in den Grössen w Gleichungen ersten oder zweiten Grades, überhaupt niedriger Grade auftreten, namentlich dann, wenn die Hauptpotenzen von F_m ermittelt sind (Abh. Bd. 91, No. 7, III *c*)).

II. Ist in $F_m(y, x)$ bei $x = a$ der charakteristische Index $h > 0$, so ist die Gesammtanzahl der Wurzeln der Exponentengleichungen, die zu den von 1 verschiedenen fundamentalen determinirenden Factoren gehören, nach I *A*) und *B*) gleich oder kleiner als h; die Anzahl der Wurzeln der zu dem fundamentalen determinirenden Factor 1 gehörenden Exponentengleichung ist $m-h$. Ist der charakteristische Index $h = 0$, so ist nur der fundamentale determinirende Factor 1 vorhanden und die Anzahl der Wurzeln der Exponentengleichung m. Also ist in allen Fällen die Gesammtanzahl der Wurzeln der zu den fundamentalen determinirenden Factoren bei $x = a$ gehörenden Exponentengleichungen gleich oder kleiner als die Ordnungszahl m (Abh. Bd. 91, No. 7, III *b*)).

Zweite Abtheilung.

Es werden homogene lineare Differentialausdrücke mit rationalen Coefficienten betrachtet, in denselben ist der Coefficient der höchsten Ableitung immer gleich 1 angenommen.

5.

Reguläre und normale Differentialausdrücke.

Eine homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten, die nur reguläre Integrale enthält, hat bei jedem singulären Punkte im Endlichen oder Unendlichen den charakteristischen Index gleich Null und umgekehrt. Der Differentialausdruck derselben hat daher, wenn a_1 bis $a_\varkappa$ die singulären Punkte im Endlichen sind, und $(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_\varkappa) = \varphi(x)$ gesetzt wird, die Form

$$(1.)\quad \frac{d^l y}{dx^l}+\frac{\psi_1(x)}{\varphi(x)}\frac{d^{l-1}y}{dx^{l-1}}+\frac{\psi_2(x)}{(\varphi(x))^2}\frac{d^{l-2}y}{dx^{l-2}}+\dots+\frac{\psi_l(x)}{(\varphi(x))^l}y,$$

wo $\psi_\alpha(x)$ ein ganzer rationaler Ausdruck höchstens $\alpha(\varkappa-1)^{\text{ten}}$ Grades ist (s. die Abh. des Herrn *Fuchs* Bd. 66, p. 139); und wenn im Endlichen kein singulärer Punkt sich findet, so ist der Differentialausdruck $\frac{d^l y}{dx^l}$. Ein solcher Differentialausdruck ist von dem Verfasser ein ***regulärer Differentialausdruck*** genannt worden (Abh. Bd. 83, No. 1).

Ist $\Phi_l(y, x)$ ein homogener linearer Differentialausdruck l^{ter} Ordnung mit rationalen Coefficienten und soll $\Phi_l(y, x)$ gleich $\omega\varphi_l(\omega^{-1}y, x)$ sein, wo φ_l ein regulärer Differentialausdruck, so ergiebt sich $\Phi_l(y, x) = e^W\overline{\Phi}_l(e^{-W}y, x)$, wo W eine rationale Function, $\overline{\Phi}_l$ ein regulärer Differentialausdruck ist. Dieser Ausdruck $e^W\overline{\Phi}_l(e^{-W}y, x)$, in welchem die in Partialbrüche zerlegte rationale Function W zum absoluten Gliede Null haben soll, ist ein ***normaler Differentialausdruck*** genannt worden, e^W ***der determinirende Factor***, $\overline{\Phi}_l(\bar{y}, x)$ der ***reguläre*** Differentialausdruck in dem normalen. Ein regulärer Differentialausdruck ist demnach selbst ein normaler mit dem determinirenden Factor 1. Ein Differentialausdruck, der sich unter der Form eines normalen darstellen lässt, nimmt diese Form nur auf ***eine*** Weise an (Abh. Bd. 83, No. 1).

$F_m = 0$ sei eine homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten, welche die Integrale von $\Phi_l = 0$ enthält. Wird $W = w + W - w$ gesetzt, wo w die Glieder der in Partialbrüche zerlegten rationalen Function W sind, die in einem Punkte unendlich werden, wobei auch der Fall, dass $w = 0$ ist, betrachtet wird, so ist der charakteristische Index in $e^{-W}F_m(e^W y, x) = 0$ bei diesem Punkte derselbe wie in $e^{-w}F_m(e^w y, x) = 0$; zugleich stimmen die Exponentengleichungen überein. Daher ist, wenn w von Null ver-

schieden ist, e^w einer der fundamentalen determinirenden Factoren (No. 3, III) bei einem singulären Punkte von $F_m(y, x) = 0$, und e^W ist das Product von fundamentalen determinirenden Factoren, von denen je einer je einem singulären Punkte von F_m angehört. Der Ausdruck $e^{-W} F_m(e^W y, x) = G_m(y, x)$ muss sich dann durch ein System von zwei homogenen linearen Differentialausdrücken darstellen lassen, von denen der erste ein regulärer ist (No. 2, (9.), (14.)).

6.

Ermittelung, ob ein homogener linearer Differentialausdruck mit rationalen Coefficienten sich in ein System von zwei solchen Ausdrücken zerlegen lässt, von denen der erste regulär ist.

Es ist zu untersuchen, ob der homogene lineare Differentialausdruck m^{ter} Ordnung $G_m(y, x)$ mit rationalen Coefficienten sich durch ein System von zwei homogenen linearen Differentialausdrücken $(m-k)^{\text{ter}}$ und k^{ter} Ordnung

$$(1.) \qquad F_{m-k}(y, x) = s, \quad f_k(s, x)$$

darstellen lässt, von denen F_{m-k} ein regulärer Ausdruck ist. (Abh. Bd. 78; 81; 83, No. 5; 91, No. 7, II). Die Coefficienten von G_m seien durch p_λ, die von F_{m-k} durch $p_\lambda^{(k)}$, die von f_k durch g_λ bezeichnet. Es besteht zwischen den Coefficienten das Gleichungssystem No. 2, (14.). Der charakteristische Index von $G_m = 0$ bei einem beliebigen Punkte muss $\leqq k$ sein (No. 2, II a), IV).

I. A) Zunächst ist $p_1^{(k)}$ zu bestimmen (vgl. Abh. Bd. 83, No. 5). $G_m = 0$ habe im Endlichen $\varkappa (\geqq 0)$ singuläre Punkte; dieselben seien, wenn $\varkappa > 0$ ist, a_1 bis $a_\varkappa$. $F_{m-k} = 0$ besitze im Endlichen $\lambda (\geqq 0)$ singuläre Punkte, die in $G_m = 0$ nicht vorkommen, dieselben seien, wenn $\lambda > 0$ ist, $a_{\varkappa+1}$ bis $a_{\varkappa+\lambda}$. Ist $\varkappa + \lambda = 0$, so wird $F_{m-k} = \frac{d^{m-k} y}{dx^{m-k}}$. Ist $\varkappa + \lambda > 0$, so wird

$$(2.) \qquad p_1^{(k)} = \sum_1^{\varkappa+\lambda} \frac{\alpha_\lambda}{x - a_\lambda}.$$

Die möglichen Werthe von

$$(3.) \qquad \alpha_\lambda = [p_1^{(k)}(x - a_\lambda)]_{x=a_\lambda} \qquad (\lambda = 1, \ldots \varkappa)$$

ergeben sich vermittelst der Exponentengleichung von $G_m = 0$ bei a_λ. Da $F_{m-k} = 0$ nur reguläre Integrale hat, die auch $G_m = 0$ erfüllen, so sind die Wurzeln der Exponentengleichung von $F_{m-k} = 0$ bei a_λ auch eben so viele Wurzeln der Exponentengleichung von $G_m = 0$ (No. 1, (2.), (4.)). Die Exponentengleichung von $F_{m-k} = 0$ ist

$$(4.) \quad \begin{cases} r(r-1)\ldots(r-(m-k)+1) + [p_1^{(k)}(x-a_\lambda)]_{x=a_\lambda} r(r-1)\ldots(r-(m-k)+2) + \cdots \\ \qquad \cdots + [p_{m-k}^{(k)}(x-a_\lambda)^{m-k}]_{x=a_\lambda} = 0, \end{cases}$$

die von $G_m = 0$, wo der charakteristische Index h_a ist,

$$(5.)\quad \begin{cases} r(r-1)\dots(r-(m-h_a)+1)+\left[\frac{p_{h_a+1}}{p_{h_a}}(x-a_a)\right]_{x=a_a} r(r-1)\dots(r-(m-h_a)+2)+\cdots \\ \cdots+\left[\frac{p_m}{p_{h_a}}(x-a_a)^{m-h_a}\right]_{x=a_a} = 0. \end{cases}$$

Also ergeben sich als die möglichen Werthe von α_a folgende in endlicher Anzahl

$$(6.)\quad [p_1^{(k)}(x-a_a)]_{x=a_a} = \frac{(m-k)(m-k-1)}{2} - R_a^{(m-k)},$$

wo $R_a^{(m-k)}$ die Summe von $m-k$ Wurzeln der Exponentengleichung von $G_m = 0$ ist.

Die Punkte $a_{\varkappa+1}$ bis $a_{\varkappa+\lambda}$ sind in $F_{m-k} = 0$ ausserwesentlich singuläre, d. h. die Integrale bleiben bei diesen Punkten einwerthig und stetig. Die von einander verschiedenen positiven ganzzahligen Exponenten in diesen Integralen können nicht die Zahlen 0 bis $m-k-1$ sein, da sonst ein nichtsingulärer Punkt vorhanden wäre. Also muss gemäss der Exponentengleichung von $F_{m-k} = 0$ der Coefficient $[p_1^{(k)}(x-a_a)]_{x=a_a}$ $(a = \varkappa+1, \dots \varkappa+\lambda)$ eine negative ganze Zahl sein. Daher ist

$$(7.)\quad \sum_{\varkappa+1}^{\varkappa+\lambda} \frac{\alpha_a}{x-a} = -\frac{d\log \Phi(x)}{dx},$$

wo $\Phi(x)$ eine ganze rationale Function von x ist, deren Grad $\tau = -\sum_{\varkappa+1}^{\varkappa+\lambda} \alpha_a$ und deren Coefficienten zu bestimmen sind. Um den Grad τ zu ermitteln, wird in (2.) $x = t^{-1}$ gesetzt, wodurch

$$(8.)\quad \tau = \sum_1^{\varkappa} \alpha_a - \left[\frac{p_1^{(k)}(t^{-1})}{t}\right]_{t=0}$$

hervorgeht. Die möglichen Werthe von $\left[\frac{p_1^{(k)}(t^{-1})}{t}\right]_{t=0}$ ergeben sich in endlicher Anzahl aus den Exponentengleichungen von $F_{m-k} = 0$ und $G_m = 0$ bei $x = \infty$ (No. 1, III). In den Differentialgleichungen, die nach Substitution von $x = t^{-1}$ aus $G_m = 0$, $F_{m-k} = 0$, $f_k = 0$ hervorgehen, seien die Coefficienten bezüglich durch p'_a, $p_a^{(k)'}$, g'_a bezeichnet. Dann ist

$$(9.)\quad \frac{p_1^{(k)}(t^{-1})}{t} = (m-k)(m-k-1) - tp_1^{(k)'}.$$

Und es ist ferner

$$(10.)\quad [tp_1^{(k)'}]_{t=0} = \frac{(m-k)(m-k-1)}{2} - R_{x=\infty}^{(m-k)},$$

wo durch $R^{(m-k)}_{x=\infty}$ die Summe von $m-k$ Wurzeln der Exponentengleichung von $G_m = 0$ bei $x = \infty$ bezeichnet ist. Also wird

$$(11.)\qquad \tau = \sum_1^{\varkappa} \alpha_\mathfrak{a} - \frac{(m-k)(m-k-1)}{2} - R^{(m-k)}_{x=\infty},$$

und es ist zunächst nothwendig, dass sich für den Ausdruck rechts in (11.) eine ganze Zahl gleich oder grösser als Null ergiebt.

Nachdem ein Werth für τ, den Grad von $\Phi(x)$, angenommen ist, sind die Coefficienten in $\Phi(x)$ zu bestimmen.

Zu dem Zwecke ist zu zeigen, wie man die formelle Entwickelung der Coefficienten $p^{(k)}_\mathfrak{a}$ und hier speciell die von $p^{(k)}_1$ bei einem Punkte $a_\mathfrak{a} = A$ $(\mathfrak{a} = 1, \dots \varkappa)$ nach Potenzen von $x-A$, oder bei $x = \infty$, also nach Substitution von $x = t^{-1}$, bei $t = 0$ nach Potenzen von t aufstellt. Man erhält dieselbe, indem man vermittelst der angenommenen Exponentengleichung von $F_{m-k} = 0$ bei einem solchen Punkte nach No. 1, II die formelle Entwickelung der Integrale von $F_{m-k} = 0$ unter der Form v_1, $v_1\int v_2\,dx$, etc. aus der Differentialgleichung $G_m = 0$ herleitet, s. II. Kennt man die formelle Entwickelung von $p^{(k)}_1$ bei $x = A$, so ergiebt sich aus (2.)

$$(12.)\qquad p^{(k)}_1 - \sum_1^{\varkappa} \frac{\alpha_\mathfrak{a}}{x-A-(a_\mathfrak{a}-A)} = -\sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ \sum_{\mathfrak{a}=\varkappa+1}^{\mathfrak{a}=\varkappa+\lambda} \alpha_\mathfrak{a} \frac{(x-A)^n}{(a_\mathfrak{a}-A)^{n+1}} \right\}.$$

Hierdurch werden die Werthe der Coefficienten von $(x-A)^0$ bis $(x-A)^{\tau-1}$ rechts bekannt. Diese Coefficienten sind die Summen der gleich hohen Potenzen mit den Exponenten 1 bis τ der Wurzeln der Gleichung

$$(13.)\qquad \prod_{\varkappa+1}^{\varkappa+\lambda} \left(z - \frac{1}{a_\mathfrak{a}-A}\right)^{-\alpha_\mathfrak{a}} = 0.$$

Demnach werden die Coefficienten dieser Gleichung $\Psi(z) = 0$ bekannt. Das absolute Glied B in $\Psi(z)$ darf nicht verschwinden, wofern $\Phi(x)$ bestehen soll, und man erhält

$$(14.)\qquad \frac{(x-A)^\tau}{B} \Psi\left(\frac{1}{x-A}\right) = \Phi(x).$$

Ist die formelle Entwickelung von $p^{(k)\prime}_1$ bei $t = 0$ bekannt, und daher nach (9.) die von $p^{(k)}_1(t^{-1})$, so ergiebt sich aus (2.)

$$(15.)\qquad -\frac{p^{(k)}_1(t^{-1})}{t} + \sum_1^{\varkappa} \frac{\alpha_\mathfrak{a}}{1-a_\mathfrak{a} t} = -\sum_{n=0}^{n=\infty} t^n \sum_{\mathfrak{a}=\varkappa+1}^{\mathfrak{a}=\varkappa+\lambda} \alpha_\mathfrak{a} a_\mathfrak{a}^n.$$

Hierdurch werden die Werthe der Grössen $-\sum_{\mathfrak{a}=\varkappa+1}^{\mathfrak{a}=\varkappa+\lambda} \alpha_\mathfrak{a} a_\mathfrak{a}^n$ $(n = 1, \dots \tau)$ bekannt, und aus diesen ergeben sich die Coefficienten von $\Phi(x)$.

B) Nun wird $\Phi(x)$ durch den grössten gemeinschaftlichen Theiler der Polynome $\Phi(x)$ und $\frac{d\Phi(x)}{dx}$ getheilt, hierdurch gehe das Polynom $\chi(x)$ λ^{ten} Grades hervor. Wird $(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_\varkappa) = \varphi(x)$ gesetzt, und gleich 1, wenn $\varkappa = 0$ ist, so muss jeder Coefficient $p_{\mathfrak{b}}^{(k)}$ ($\mathfrak{b} = 1, \dots m-k$) die Form haben

$$(16.)\qquad p_{\mathfrak{b}}^{(k)} = \frac{\psi_{\mathfrak{b}}(x)}{[\varphi(x)\chi(x)]^{\mathfrak{b}}},$$

wo $\psi_{\mathfrak{b}}(x)$ eine ganze rationale Function, deren Grad $\leqq (\varkappa+\lambda-1)\mathfrak{b}$ ist (No. 5, (1.)). Aus der formellen Entwickelung von $p_{\mathfrak{b}}^{(k)}$ nach Potenzen von $x-A$, oder aus der formellen Entwickelung von $t^{-\mathfrak{b}}p_{\mathfrak{b}}^{(k)}(t^{-1})$, welches eine homogene lineare Function von $t^{\mathfrak{c}}p_{\mathfrak{c}}^{(k)\prime}$ ($\mathfrak{c} = 0, \dots \mathfrak{b}$, $p_0^{(k)\prime} = 1$) mit numerischen Coefficienten ist, nach Potenzen von t erhält man mittelst der Gleichung

$$(17.)\qquad p_{\mathfrak{b}}^{(k)}[\varphi(x)\chi(x)]^{\mathfrak{b}} = \psi_{\mathfrak{b}}(x)$$

die Grössen $\psi_{\mathfrak{b}}(x)$, wobei in der Entwickelung von $p_{\mathfrak{b}}^{(k)}$ bei $x = A$ $(\varkappa+\lambda-1)\mathfrak{b}+1$ Glieder von $\frac{1}{(x-A)^{\mathfrak{b}}}$ an, oder in der Entwickelung von $p_{\mathfrak{c}}^{(k)\prime}$ $(\varkappa+\lambda-1)\mathfrak{b}+1$ Glieder von $\frac{1}{t^{\mathfrak{c}}}$ an bekannt sein müssen. (Vgl. Abh. Bd. 91, No. 7, II.)

Es genügt $p_{\mathfrak{b}}^{(k)}$ ($\mathfrak{b} = 1, \dots \bar{k}$) auf die angegebene Weise zu bestimmen, wo $\bar{k}$ die kleinere der beiden Zahlen k und $m-k$ ist. Dann ergiebt das Gleichungssystem No. 2, (14.) aus den k ersten Gleichungen successive eindeutig die Coefficienten g_1 bis g_k in $f_k(s, x)$ und hierauf, wenn $k < m-k$ ist, aus den $m-k-k$ folgenden Gleichungen successive die übrigen $p_{\mathfrak{b}}^{(k)}(k+1, \dots m-k)$.

Damit nun G_m sich durch das System (1.) darstellen lässt und zugleich F_{m-k} regulärer Differentialausdruck ist, ergiebt sich als nothwendig und hinreichend, dass auch noch die übrigen Gleichungen des Gleichungssystems No. 2, (14.) durch die gefundenen Ausdrücke $p^{(k)}$ und g erfüllt werden.

Dass, wenn diese Bedingung erfüllt ist, F_{m-k} ein regulärer Differentialausdruck ist, also bei jedem Punkte im Endlichen und Unendlichen den charakteristischen Index Null hat, folgt daraus, dass bei jedem Punkte der charakteristische Index von $G_m = 0$ gleich der Summe derer von $F_{m-k} = 0$ und $f_k = 0$ ist (No. 2, II *a*), IV) und dass der charakteristische Index von $f_k = 0$ gleich dem von $G_m = 0$ sein muss, weil der charakteristische Index von $p_{\mathfrak{b}}^{(k)}$ ($\mathfrak{b} = 0, \dots \bar{k}$) bei jedem Punkte im Endlichen und der von $p_{\mathfrak{b}}^{(k)\prime}$ ($\mathfrak{b} = 0, \dots \bar{k}$) bei $t = 0$ gleich Null ist, daher der von $p_{\mathfrak{b}}$ ($\mathfrak{b} = 0, \dots k$) gleich dem von $g_{\mathfrak{b}}$ ($\mathfrak{b} = 0, \dots k$) und der von $p_{\mathfrak{b}}'$ ($\mathfrak{b} = 0, \dots k$) gleich dem von $g_{\mathfrak{b}}'$ ($\mathfrak{b} = 0, \dots k$), und weil in $G_m = 0$ der charakteristische Index $\leqq k$ ist.

II. Die formelle Entwickelung der Coefficienten von F_{m-k} erhält man durch die formelle Entwickelung der Integrale von $F_{m-k}=0$ bei einem der Punkte $a_{\mathfrak{a}}=A$ ($\mathfrak{a}=1,\dots \varkappa$) oder bei $x=t^{-1}$, $t=0$. Die Wurzeln der Exponentengleichung von $F_{m-k}=0$ bei einem solchen Punkte, die gemäss (6.) oder (11.) angenommen sind, seien r_1 bis r_{m-k} und so geordnet, dass diejenigen, die sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, auf einander folgen und unter diesen die vorhergehende einen reellen Theil hat, der nicht kleiner ist, als der der folgenden. Die Integrale von $F_{m-k}=0$ bei einem solchen Punkte nehmen dann, da der charakteristische Index von $F_{m-k}=0$ gleich Null ist, nach No. 1, II die Form an

$$(18.)\qquad v_1,\quad v_1\!\int v_2 d\xi,\quad v_1\!\int d\xi\, v_2\!\int\cdots\int v_{m-k}d\xi,$$

wo $v_{\mathfrak{b}}=\xi^{\varepsilon_{\mathfrak{b}}}\sum\limits_{0}^{\infty}c_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\xi^{\mathfrak{a}}$, $\xi=x-A$ oder $\xi=t$, $\varepsilon_{\mathfrak{b}}=r_{\mathfrak{b}}-r_{\mathfrak{b}-1}-1$, $\varepsilon_1=r_1$, Mod $c_{0\mathfrak{b}}\gtrless 0$ ist. Die Exponenten r_1 bis r_{m-k} sind Wurzeln der Exponentengleichung von $G_m=0$. Nun soll über die Exponenten r_1 bis r_{m-k} folgende Voraussetzung gemacht werden. Wenn diejenigen Wurzeln der Exponentengleichung von $G_m=0$, die sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, so geordnet sind, dass der reelle Theil der vorhergehenden nicht kleiner als der der folgenden ist, so mögen, wenn s Wurzeln der Exponentengleichung von $F_{m-k}=0$ aus einer solchen Gruppe hervorgehen, dieselben die s ersten Wurzeln dieser Gruppe sein. Unter dieser Voraussetzung ergeben sich aus $G_m=0$ die Entwickelungen $\sum\limits_{0}^{\infty}\frac{c_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}}{c_{0\mathfrak{b}}}\xi^{\mathfrak{a}}$ eindeutig (No. 1, II). Mittelst (18.) erhält man die Entwickelung der Coefficienten von $F_{m-k}^{(k)}(y,x)=0$ bei $x=A$, bezüglich derer von $F_{m-k}^{(k)\prime}(y,t)=0$, wenn $F_m^{(k)}(y,x)=(-t^2)^{m-k}F_m^{(k)\prime}(y,t)$ gesetzt ist, bei $t=0$, indem man successive die Differentialgleichungen für v_{m-k}, $v_{m-k-1}\int v_{m-k}d\xi$ etc. bildet, oder wenn $v_1v_2\dots v_{\mathfrak{a}}=\mu_{\mathfrak{a}}$ gesetzt ist, successive die Differentialgleichungen für μ_{m-k}, $\mu_{m-k-1}\int\mu_{m-k-1}^{-1}\mu_{m-k}d\xi$ etc. nach No. 2, (9.), (10.), (11.). Wenn man l Coefficienten in der Entwickelung von $v_{\mathfrak{b}}$ ($\mathfrak{b}=1,\dots m-k$) kennt, so erhält man dadurch l Glieder in $p_{\mathfrak{b}}^{(k)}$ ($\mathfrak{b}=1,\dots m-k$), bezüglich $p_{\mathfrak{b}}^{(k)\prime}$ von $\xi^{-\mathfrak{b}}$ an. Nach (12.), (15.) ist hier l zunächst gleich $\tau+1$ zu setzen, dann nach (17.), wenn die kleinste der Zahlen $m-k$ und k durch $\bar{k}$ bezeichnet ist, $l=(\varkappa+\lambda-1)\bar{k}+1$.

Wenn die Exponenten r_1 bis r_{m-k} nicht der angegebenen Voraussetzung entsprechen, so kommen in der formellen Entwickelung der Grössen

v und daher der $p^{(k)}$ zunächst unbestimmte Constanten in endlicher Anzahl in dem Zähler der Ausdrücke der Coefficienten vor, die durch die weiteren Bedingungen zu bestimmen sind. Es genügt aber zur Anwendung des Vorhergehenden, dass bei einem einzigen der singulären Punkte von $G_m = 0$ im Endlichen a_α $(\alpha = 1, \dots \varkappa)$ oder bei dem Punkte $x = \infty$ die Wurzeln der Exponentengleichung von $F_{m-k} = 0$ die angegebene Voraussetzung erfüllen. Ist $G_m = e^{-W}F_m(e^W y, x)$, wo e^W Product von fundamentalen determinirenden Factoren von je einem singulären Punkte von $F_m = 0$ (No. 5) ist, und giebt es in $F_m = 0$ einen singulären Punkt, bei welchem die fundamentalen Exponentengleichungen (No. 3, III) so beschaffen sind, dass in jeder einzelnen nicht zwei Wurzeln sich um eine ganze Zahl unterscheiden, so weiss man von vorn herein, (No. 5), dass man bei diesem Punkte die formellen Entwickelungen der Integrale vornehmen kann, so dass sie eindeutig bestimmt ausfallen. Vgl. auch Satz No. 9, II *d*.

7.

Herleitung der homogenen linearen Differentialgleichung, welche die Integrale zweier anderer solcher Differentialgleichungen enthält. Zerlegbare und unzerlegbare Differentialausdrücke.

I. $\Phi_m(y, x) = 0$ und $\Psi_n(y, x) = 0$ seien zwei homogene lineare Differentialgleichungen m^{ter} und n^{ter} Ordnung, in denen die Coefficienten der höchsten Ableitungen gleich 1 sind; die Integrale derselben seien unter einander linearunabhängig. Es soll die Differentialgleichung $\Phi_m(y, x) = s$, $\psi_n(s, x) = 0$ aufgestellt werden, wo $\psi_n = 0$ die homogene lineare Differentialgleichung mit dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1 ist, welche durch die n linearunabhängigen Grössen s_1 bis s_n erfüllt wird, die man durch Einsetzen von n linearunabhängigen Integralen von $\Psi_n = 0$ in $\Phi_m(y, x) = s$ erhält. Zu dem Zwecke werden vermittelst $\Psi_n(y, x) = 0$ die Differentialquotienten höherer als $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung in $\Phi_m(y, x) = s$ durch solche $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung und niedrigerer Ordnungen ausgedrückt, wodurch $\Phi_m(y, x) = s$ in

$$(1.)\qquad Q_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + Q_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + Q_n y = s$$

übergehe, wo die Grössen Q nicht alle gleich Null sein können. Wird die Gleichung (1.) n-mal differentiirt und jedesmal die Ordnung mittelst $\Psi_n = 0$ reducirt, so erhält man

$$(2.)\qquad Q_1^{(\lambda)}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + Q_2^{(\lambda)}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + Q_n^{(\lambda)} y = \frac{d^\lambda s}{dx^\lambda}\qquad (\lambda = 1, \dots n).$$

Aus dem Systeme von $n+1$ linearen Gleichungen (1.) und (2.) geht durch Elimination von y bis $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ die gesuchte Differentialgleichung $\psi_n(s, x) = 0$ hervor. Der Coefficient von $\frac{d^n s}{dx^n}$, durch welchen zu dividiren ist, die Determinante $\Sigma \pm Q_1 Q_2^{(1)} \dots Q_n^{(n-1)}$ ist nicht identisch Null. Denn sonst würden sich vermittelst Unterdeterminanten dieser Determinante Grössen λ_1 bis λ_n, welche nicht alle verschwinden, bilden lassen, die das Gleichungssystem

$$(3.)\qquad \lambda_1 Q_\alpha + \lambda_2 Q_\alpha^{(1)} + \dots + \lambda_n Q_\alpha^{(n-1)} = 0 \qquad (\alpha = 1, \dots n)$$

befriedigen. Multiplicirt man dann Gleichung (1.) und die $n-1$ ersten Gleichungen (2.) bezüglich mit λ_1 bis λ_n und addirt, so würde sich die Differentialgleichung höchstens $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(4.)\qquad \lambda_n \frac{d^{n-1}s}{dx^{n-1}} + \lambda_{n-1} \frac{d^{n-2}s}{dx^{n-2}} + \dots + \lambda_1 s = 0$$

mit Coefficienten, die nicht alle verschwinden, ergeben, der die n linearunabhängigen Grössen s_1 bis s_n genügen müssten.

Sind die Coefficienten von $\Phi_m = 0$ und $\Psi_n = 0$ rational, so werden auch die von $\psi_n = 0$ rational (Abh. Bd. 83, No. 2, I; Bd. 91, No. 7, I).

II. Die Differentialgleichungen $\Phi_m = 0$ und $\Psi_n = 0$ mögen k und nicht mehr linearunabhängige Integrale gemeinsam haben, dieselben erfüllen eine homogene lineare Differentialgleichung k^{ter} Ordnung $F_k(y, x) = 0$. Alsdann sind (No. 2 (9.), (15.)) Φ_m und Ψ_n unter der Form darstellbar

$$(5.)\qquad F_k(y, x) = s, \quad \xi_{m-k}(s, x),$$

$$(6.)\qquad F_k(y, x) = s, \quad \zeta_{n-k}(s, x),$$

wo ξ_{m-k} und ζ_{n-k} homogene lineare Differentialausdrücke $(m-k)^{\text{ter}}$ und $(n-k)^{\text{ter}}$ Ordnung sind. Nach I werde die Differentialgleichung aufgestellt, welche die Integrale von $\xi_{m-k} = 0$ und $\zeta_{n-k} = 0$ enthält, dieselbe sei $f_{m+n-2k} = 0$. Dann enthält die Differentialgleichung

$$(7.)\qquad F_k(y, x) = s, \quad f_{m+n-2k}(s, x) = 0$$

die linearunabhängigen Integrale von $\Phi_m = 0$ und $\Psi_n = 0$.

Der Ausdruck von $F_k(y, x)$ ergiebt sich, indem man auf $\Phi_m(y, x)$ und $\Psi_n(y, x)$ das Verfahren, welches der Methode zur Aufsuchung des gemeinschaftlichen Theilers zweier Polynome analog ist, anwendet (s. die Note des Herrn *Brassinne* zu *Sturm* Cours d'Analyse T. II). Man stellt, wenn $m \geqq n$ ist, die Identität

$$(8.)\quad \Phi_m(y,x) = \alpha_0 \frac{d^{m-n}\Psi_n}{dx^{m-n}} + \alpha_1 \frac{d^{m-n-1}\Psi_n}{dx^{m-n-1}} + \cdots + \alpha_{m-n}\Psi_n + \beta_0 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + \beta_n y$$

auf, in welcher die Coefficienten α und β eindeutig bestimmt sind, wendet auf die Ausdrücke Ψ_n und $\beta_0 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + \beta_n y$ dasselbe Verfahren an, und hat in gleicher Weise fortzufahren, bis man zu dem Reste Null gelangt, worauf der vorhergehende Differentialausdruck, wenn er höherer als nullter Ordnung ist, gleich Null gesetzt die Differentialgleichung ergiebt, welche die gemeinschaftlichen Integrale von $\Phi_m = 0$ und $\Psi_n = 0$ liefert. Sind die Coefficienten in Φ_m und Ψ_n rational, so werden demnach die Coefficienten in $F_k(y,x)$ rational, daher auch (No. 2, (14.)) die Coefficienten in ξ_{m-k} und ζ_{n-k}, also auch in der Differentialgleichung (7.). Es ergiebt sich ebenso aus (8.), dass Φ_m und Ψ_n durch die Ausdrücke (5.), (6.) darstellbar sind, in welchen die Coefficienten rational sind (Abh. Bd. 83, No. 2, II).

III. Aus II folgt, wenn eine homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten mit einer anderen solchen Differentialgleichung Integrale gemeinsam hat, ohne dass alle Integrale der ersteren auch in der zweiten enthalten sind, so ist der Differentialausdruck der ersteren unter der Form

$$(9.)\quad \varphi(y,x) = s, \quad \psi(s,x)$$

darstellbar, wo φ und ψ homogene lineare Differentialausdrücke höherer als nullter Ordnung mit rationalen Coefficienten sind. Ein homogener linearer Differentialausdruck mit rationalen Coefficienten, der unter der Form (9.) darstellbar ist, heisse *zerlegbar*, und demnach, wenn er unter dieser Form nicht darstellbar ist, so heisse derselbe *ein unzerlegbarer Differentialausdruck* (s. die Abhandlungen des Herrn *Frobenius:* „Ueber den Begriff der Irreductibilität in der Theorie der linearen Differentialgleichungen" Bd. 76 dieses Journals, p. 236 und 256; „Ueber die regulären Integrale der linearen Differentialgleichungen" Bd. 80 dieses Journals). Unzerlegbare reguläre Differentialausdrücke einer beliebigen Ordnung kann man bilden, wenn man den regulären Differentialausdruck so einrichtet, dass sich für die Grösse τ No. 6, (11.) keine ganze Zahl $\geqq 0$ ergiebt (Abh. Bd. 83, p. 147).

Die Integrale der homogenen linearen Differentialgleichungen

$$\Phi_m(y,x) = 0 \quad \text{und} \quad \Psi_n(y,x) = 0$$

mit rationalen Coefficienten seien unter einander linearunabhängig und nach I vereinigt in der Differentialgleichung

$$(10.)\qquad \Phi_m(y,x) = s,\quad \psi_n(s,x) = 0.$$

Sind in $\psi_n = 0$ die Integrale von $\chi_l = 0$ enthalten, wo χ_l ein homogener linearer Differentialausdruck l^{ter} Ordnung mit rationalen Coefficienten und $l < n$, so sind in $\Psi_n = 0$ die Integrale von $X_l = 0$ enthalten, wo X_l ein homogener linearer Differentialausdruck l^{ter} Ordnung mit rationalen Coefficienten ist. Denn aus $m+l$ linearunabhängigen Integralen y_1 bis y_{m+l} von

$$(11.)\qquad \Phi_m(y,x) = s,\quad \chi_l(s,x) = 0,$$

unter denen m von $\Phi_m = 0$ y_1 bis y_m sind, ergeben sich, wenn $Y_\mathfrak{b}$ $(\mathfrak{b} = 1,\dots n)$ n linearunabhängige Integrale von $\Psi_n = 0$ sind, die Ausdrücke

$$(12.)\qquad y_{m+\mathfrak{a}} = \sum_1^m c_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} y_\mathfrak{b} + \sum_1^n k_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} Y_\mathfrak{b} \qquad {\scriptstyle (\mathfrak{a} = 1,\dots l)},$$

und hieraus folgen die Grössen

$$(13.)\qquad y_{m+\mathfrak{a}} - \sum_1^m c_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} y_\mathfrak{b} \qquad {\scriptstyle (\mathfrak{a} = 1,\dots l)}$$

als l linearunabhängige Integrale von $\Psi_n = 0$. $\Psi_n = 0$ kann nicht mehr als l linearunabhängige Integrale mit (11.) gemeinsam haben, weil diese Integrale eben so viele linearunabhängige Werthe von s in (11.) liefern würden, die $\chi_l = 0$ erfüllen müssten. Es ergiebt sich demnach gemäss (8.), dass $\Psi_n = 0$ mit (11.) die Integrale einer Differentialgleichung l^{ter} Ordnung mit rationalen Coefficienten gemeinsam hat.

Hieraus folgt: Ist Ψ_n unzerlegbar, so auch ψ_n. Ist Ψ_n zerlegbar, so muss auch ψ_n zerlegbar sein (Abh. Bd. 83, No. 2, III).

8.

Systeme normaler Differentialausdrücke.

I. Ein Differentialausdruck der Form

$$(1.)\qquad f_{\mathfrak{a}_0}(y,x) = y_1,\ f_{\mathfrak{a}_1}(y_1,x) = y_2, \dots f_{\mathfrak{a}_l}(y_l,x),$$

worin $f_{\mathfrak{a}_k}$ ein homogener linearer Differentialausdruck $\mathfrak{a}_k^{\text{ter}}$ Ordnung mit rationalen Coefficienten ist, heisst ein *System* solcher Differentialausdrücke; die Ausdrücke $f_{\mathfrak{a}_k}$ $(k = 0,\dots l)$, deren Anzahl $l+1 \geqq 1$ ist, sind die Bestandtheile des Systemes.

Ist ein regulärer Differentialausdruck (No. 5) durch ein System (1.) dargestellt, so müssen die Bestandtheile regulär sein (No. 2, II *a*), IV); daher wenn ein normaler Differentialausdruck (No. 5) durch ein System (1.) dargestellt ist, so müssen die Bestandtheile normale Differentialausdrücke mit

demselben determinirenden Factor wie in dem ursprünglichen Differentialausdrucke sein (Abh. Bd. 83, No. 3).

II. ***Zwei normale Differentialausdrücke sind ähnlich*** genannt worden, wenn sie unzerlegbar, von derselben Ordnung und demselben determinirenden Factor sind, und wenn die in ihnen enthaltenen regulären Differentialausdrücke gleich Null gesetzt Differentialgleichungen ergeben, bei denen in jedem Punkte die Wurzeln der Exponentengleichung der einen sich mit den Wurzeln der Exponentengleichung der anderen so paaren lassen, dass die Wurzeln in jedem Paare sich höchstens um eine ganze Zahl unterscheiden. Diese ganzen Zahlen brauchen bei demselben Punkte nicht einander gleich zu sein. Hierbei sind nur die singulären Punkte der Differentialgleichungen ins Auge zu fassen, da bei einem Punkte, der in beiden Differentialgleichungen nichtsingulär ist, die Exponentengleichungen übereinstimmen.

Zwei Systeme normaler Differentialausdrücke sind ähnlich genannt worden, wenn sie gleich viele Bestandtheile enthalten, und die Bestandtheile von derselben Stelle ähnliche normale Differentialausdrücke sind. (Abh. Bd. 83, No. 7, III, IV).

A) Es bestehen folgende beiden Hülfssätze, die selbst besondere Fälle allgemeinerer in II, *C*) vorkommender Sätze sind, und welche bei dem Beweise der übrigen Sätze in II verwandt werden. (Vgl. Abh. Bd. 83, No. 7, II).

$\Phi_m(y, x)$ sei ein homogener linearer Differentialausdruck mit rationalen Coefficienten m^{ter} Ordnung, $\Psi_n(y, x)$ ein solcher n^{ter} Ordnung. Die Integrale von $\Phi_m = 0$ und $\Psi_n = 0$ seien unter einander linearunabhängig und in der Differentialgleichung

$$(2.)\qquad \Phi_m(y, x) = s, \quad \psi_n(s, x) = 0$$

vereinigt, wo ψ_n ein homogener linearer Differentialausdruck n^{ter} Ordnung mit rationalen Coefficienten ist (No. 7, I).

a) Ist Ψ_n ein unzerlegbarer normaler Differentialausdruck, so ist ψ_n ein solcher, der ähnlich Ψ_n ist.

ψ_n ist unzerlegbar (No. 7, III). In $\Psi_n(y, x)$ sei e^W der determinirende Factor, $\overline{\Psi}_n(\bar{y}, x) = 0$ der reguläre Differentialausdruck. Bei irgend einem Punkte werden die n regulären Integrale von $\overline{\Psi}_n = 0$, die zu den Wurzeln der Exponentengleichung gehören (No. 1, II), in $e^{-W}\Phi_m(e^W y, x) = s'$ gesetzt, wodurch sich n linearunabhängige reguläre Integrale von $e^{-W}\psi_n(e^W s', x) = 0$

ergeben, daher ist $e^{-W}\psi_n(e^W s', x)$ ein regulärer Differentialausdruck. Eine Gruppe letzterer Integrale, in denen die Exponenten sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, muss sich durch eben so viele linearunabhängige Integrale von $e^{-W}\psi_n(e^W s', x) = 0$ ausdrücken lassen, die zu Wurzeln der Exponentengleichung dieser Differentialgleichung gehören, welche sich von jenen Exponenten nur um ganze Zahlen unterscheiden (Abh. Bd. 74, No. 1, (5.); s. Einleitung).

b) Φ_m sei ein normaler Differentialausdruck. Ist ψ_n ein unzerlegbarer normaler Differentialausdruck, so ist Ψ_n ein solcher, der ähnlich ψ_n ist.

Ψ_n ist unzerlegbar (No. 7, III). Die Differentialgleichung, welche die Integrale von $\Phi_m = 0$ und $\Psi_n = 0$ vereinigt enthält, sei auf die Form

$$(3.)\qquad \Psi_n(y, x) = s,\quad \varphi_m(s, x) = 0$$

gebracht. φ_m ist ein normaler Differentialausdruck mit dem determinirenden Factor von Φ_m; denn wenn Ω der determinirende Factor von Φ_m ist, und die Integrale von $\Omega^{-1}\Phi_m(\Omega y, x) = 0$ in $\Omega^{-1}\Psi_n(\Omega y, x) = s'$ eingesetzt werden, so ergiebt sich $\Omega^{-1}\varphi_m(\Omega s', x)$ als regulärer Differentialausdruck. Es sei ω der determinirende Factor von ψ_n. Die beiden Ausdrücke

$$(4.)\qquad \omega^{-1}\Phi_m(\omega y, x) = s',\quad \omega^{-1}\psi_n(\omega s', x),$$

$$(5.)\qquad \omega^{-1}\Psi_n(\omega y, x) = s_1',\quad \omega^{-1}\varphi_m(\omega s_1', x)$$

sind einander gleich. Der charakteristische Index eines solchen Ausdruckes ist bei jedem Punkte gleich der Summe derer in den Bestandtheilen. $\omega^{-1}\Phi_m(\omega y, x)$ und $\omega^{-1}\varphi_m(\omega s_1', x)$ haben bei jedem Punkte den charakteristischen Index übereinstimmend als normale Ausdrücke von derselben Ordnung und demselben determinirenden Factor (in einem Punkte, in welchem der Exponent des determinirenden Factors unendlich wird, ist der charakteristische Index gleich der Ordnung (No. 3, (3.), sonst gleich Null). Daher muss der charakteristische Index in $\omega^{-1}\Psi_n(\omega y, x)$ derselbe wie in $\omega^{-1}\psi_n(\omega s', x)$ sein, also gleich Null. Ψ_n ist ähnlich ψ_n nach *a*).

B) Der homogene lineare Differentialausdruck m^{ter} Ordnung mit rationalen Coefficienten $F_m(y, x)$ sei durch das System

$$(6.)\qquad \Phi_N(y, x) = s,\quad F_{m-N}(s, x),$$

$$(7.)\qquad f_{\alpha_0}(y, x) = y_1,\quad f_{\alpha_1}(y_1, x) = y_2,\ \dots\ f_{\alpha_l}(y_l, x) = \Phi_N(y, x)$$

dargestellt, wo $f_{\alpha_k}(k = 0, \dots l)$ ein normaler Differentialausdruck α_k^{ter} Ordnung, Φ_N N^{ter} Ordnung ist, der homogene lineare Differentialausdruck mit rationalen Coefficienten F_{m-N} sich entweder auf s reducirt, oder, wenn $m - N > 0$ ist,

gleich Null gesetzt eine Differentialgleichung ergiebt, die nicht mehr die Integrale einer Differentialgleichung mit normalem Differentialausdruck enthält. Da nach I ein normaler Differentialausdruck gleich einem Systeme unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke mit demselben determinirenden Factor ist, so können die Bestandtheile in (7.) als unzerlegbar vorausgesetzt werden.

a) Sind in $F_m = 0$ die Integrale von $\psi_\alpha(y, x) = 0$ enthalten, wo ψ_α ein unzerlegbarer normaler Differentialausdruck α^{ter} Ordnung ist, so hat der Differentialausdruck Φ_N eine Darstellung durch ein System unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke, an dessen Spitze ψ_α steht, und auf ψ_α folgt ein System, welches ähnlich ist dem System (7.), nachdem aus diesem ein gewisser ψ_α ähnlicher Bestandtheil herausgenommen ist.

Ist f_{λ_0} nicht identisch ψ_α, so müssen die Integrale von $f_{\lambda_0} = 0$ und $\psi_\alpha = 0$ linearunabhängig sein, weil f_{λ_0} und ψ_α unzerlegbar (No. 7, III). Werden die Integrale von $f_{\lambda_0} = 0$ und $\psi_\alpha = 0$ in einer Differentialgleichung $F_{\lambda_0+\alpha} = 0$ vereinigt, so erhält der Differentialausdruck $F_{\lambda_0+\alpha}$ die Formen

$$(8.)\quad \begin{cases} f_{\lambda_0}(y, x) = y_1, & \psi_\alpha^{(1)}(y_1, x), \\ \psi_\alpha(y, x) = y_1', & \varphi_{\lambda_0}(y_1', x), \end{cases}$$

wo nach *A*, *a*) $\psi_\alpha^{(1)}$ ähnlich ψ_α und φ_{λ_0} ähnlich f_{λ_0}. Ist f_{λ_1} nicht identisch $\psi_\alpha^{(1)}$ und werden die Integrale von $f_{\lambda_1} = 0$ und $\psi_\alpha^{(1)} = 0$ in einer Differentialgleichung $G_{\lambda_1+\alpha} = 0$ vereinigt, so erhält der Differentialausdruck $f_{\lambda_0}(y, x) = y_1$, $G_{\lambda_1+\alpha}(y_1, x)$ die Darstellungen

$$(9.)\quad \begin{cases} f_{\lambda_0}(y, x) = y_1, & f_{\lambda_1}(y_1, x) = y_2, & \psi_\alpha^{(2)}(y_2, x), \\ f_{\lambda_0}(y, x) = y_1, & \psi_\alpha^{(1)}(y_1, x) = y_2', & \varphi_{\lambda_1}(y_2', x), \\ \psi_\alpha(y, x) = y_1', & \varphi_{\lambda_0}(y_1', x) = y_2', & \varphi_{\lambda_1}(y_2', x), \end{cases}$$

wo nach *A*, *a*) $\psi_\alpha^{(2)}$ ähnlich $\psi_\alpha^{(1)}$, φ_{λ_1} ähnlich f_{λ_1}. Indem man in dieser Weise fortfährt und die über F_{m-N} gemachte Voraussetzung berücksichtigt, erhält man den Satz.

b) Durch successive Anwendung des vorigen Satzes ergiebt sich:

Sind in $F_m = 0$ die Integrale von $\Psi = 0$ enthalten, wo Ψ ein System unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke ist, so hat der Differentialausdruck Φ_N eine Darstellung durch ein System unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke, an dessen Spitze Ψ steht, und auf Ψ folgt ein System, welches ähnlich ist dem System (7.), nachdem aus diesem gewisse Bestandtheile herausgenommen sind, die mit den Bestandtheilen von Ψ so gepaart sind, dass in einem Paare ähnliche Differentialausdrücke stehen.

Es giebt daher nur einen einzigen durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbaren Differentialausdruck $\Phi_N(y, x)$ der Art, dass F_{m-N} die angegebene Bedingung erfüllt (Abh. Bd. 83, No. 4, 7, III; Bd. 91, No. 6, I *a*).

c) Sind in $\Phi_N(y, x) = 0$ die Integrale von $F_k = 0$ enthalten, wo F_k ein unzerlegbarer Differentialausdruck ist, so muss F_k ein normaler Differentialausdruck sein.

Denn wenn F_k nicht normal wäre und an Stelle von ψ_a in *a*) gesetzt wird, so ergiebt sich $\psi_a^{(1)}$ unzerlegbar (No. 7, III) und nicht normal (*A, b*)). Wird nun das Verfahren von *a*) fortgesetzt, so würde sich ergeben, dass $\Phi_N = 0$ die Integrale von $F_k = 0$ nicht enthalten könnte. Aus diesem Satze und *a*) folgt:

Enthält $\Phi_N(y, x) = 0$ die Integrale von $F_s = 0$, wo F_s ein System unzerlegbarer Differentialausdrücke ist, so müssen die Bestandtheile von F_s normale Differentialausdrücke sein.

Aus letzterem Satze und *b*) ergiebt sich nun:

Bei zwei Darstellungen von $\Phi_N(y, x)$ durch Systeme unzerlegbarer Differentialausdrücke können die Bestandtheile des einen Systemes mit denen des anderen so gepaart werden, dass in demselben Paare ähnliche normale Differentialausdrücke stehen (Abh. Bd. 83, No. 7, III).

d) Aus *c*) folgt: Wenn der Differentialausdruck $\Phi_N(y, x)$ durch ein System von $l+1$ unzerlegbaren normalen Differentialausdrücken darstellbar ist, von denen je zwei nicht ähnlich sind, so hat Φ_N höchstens $(l+1)l(l-1)\dots 1$ verschiedene Darstellungen durch Systeme unzerlegbarer Differentialausdrücke.

Kommen dagegen in der ursprünglichen Darstellung einander ähnliche Bestandtheile vor, so kann Φ_N unzählig viele Darstellungen durch Systeme unzerlegbarer Differentialausdrücke haben (Abh. Bd. 83, No. 7, III).

C) $F_m(y, x)$ sei ein homogener linearer Differentialausdruck m^{ter} Ordnung mit rationalen Coefficienten und $G_n(y, x)$ ein solcher n^{ter} Ordnung. Die Integrale von $F_m = 0$ und $G_n = 0$ seien unter einander linearunabhängig und in der Differentialgleichung

$$(10.) \qquad F_m(y, x) = s, \quad g_n(s, x) = 0$$

vereinigt, wo g_n ein homogener linearer Differentialausdruck n^{ter} Ordnung mit rationalen Coefficienten ist (No. 7, I).

a) Enthält $G_n = 0$ die Integrale von $G_k = 0$, wo G_k ein System un-

zerlegbarer normaler Differentialausdrücke ist, so enthält $g_n = 0$ die Integrale von $g_k = 0$, wo g_k ein System solcher Ausdrücke, welches dem Systeme G_k ähnlich ist.

Zum Beweise werden die Integrale von $F_m = 0$ und $G_k = 0$ in einer Differentialgleichung vereinigt. Die Bestandtheile von G_k seien durch $f_{\mathfrak{a}_0}$ bis $f_{\mathfrak{a}_l}$ bezeichnet. Man verfährt nach dem Schema (8.), (9.), wobei unter ψ_a F_m verstanden wird. Die Integrale von $\psi_a^{(\mathfrak{b})} = 0$ sind linearunabhängig von den Integralen von $f_{\mathfrak{a}_\mathfrak{b}} = 0$, weil die Integrale von $F_m = 0$ und $f_{\mathfrak{a}_0} = y_1$, $f_{\mathfrak{a}_1} = y_2, \ldots; f_{\mathfrak{a}_\mathfrak{b}} = 0$ linearunabhängig sind.

b) F_m sei gleich einem Systeme unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke. Enthält $g_n = 0$ die Integrale von $g_k = 0$, wo g_k ein System unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke ist, so enthält $G_n = 0$ die Integrale von $G_k = 0$, wo G_k ein System solcher Ausdrücke, welches dem Systeme g_k ähnlich ist.

Der erste Bestandtheil von g_k sei $\gamma_{\mathfrak{a}_0}$, so hat (No. 7, III) $F_m = s$, $\gamma_{\mathfrak{a}_0}(s, x) = 0$ mit $G_n = 0$ die Integrale von $\Gamma'_{\mathfrak{a}_0} = 0$ gemeinsam, wo $\Gamma'_{\mathfrak{a}_0}$ ein unzerlegbarer Differentialausdruck ist; $\Gamma'_{\mathfrak{a}_0}$ ist normal (*B, c*)) und ähnlich $\gamma_{\mathfrak{a}_0}$ (*A, a*)). Der Differentialausdruck $F_m = s$, $\gamma_{\mathfrak{a}_0}(s, x)$ erhält dann die Form $\Gamma'_{\mathfrak{a}_0} = s'$, $F'_m(s', x)$, wo nach dem Verfahren von *B, a*) sich ergiebt, dass F'_m ein dem Systeme F_m ähnliches System normaler Differentialausdrücke ist. G_n erhält die Form $\Gamma'_{\mathfrak{a}_0} = s'$, $G'_{n-\mathfrak{a}_0}(s', x)$. g_n sei $\gamma_{\mathfrak{a}_0}(s, x) = s_1$, $\xi_{n-\mathfrak{a}_0}(s_1, x)$. Dann sind die Integrale von $F'_m = 0$ und $G'_{n-\mathfrak{a}_0} = 0$ linearunabhängig und in der Differentialgleichung $F'_m = u$, $\xi_{n-\mathfrak{a}_0}(u, x) = 0$ vereinigt, und es ist dasselbe Verfahren wieder anzuwenden (Abh. Bd. 83, No. 7, IV; Bd. 91, No. 6, II *a*)).

D). *a*) Wenn die beiden Differentialausdrücke F_m und G_n durch zwei Systeme unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke gegeben sind und nicht ein Bestandtheil des einen Systemes einem solchen des anderen ähnlich ist, so sind die Integrale von $F_m = 0$ und $G_n = 0$ von einander linearunabhängig.

Denn sonst müssten $F_m = 0$ und $G_n = 0$ die Integrale von $\varphi_k = 0$ enthalten, wo φ_k ein homogener linearer Differentialausdruck mit rationalen Coefficienten ist (No. 7, II). φ_k müsste alsdann (*B, c*)) durch ein System unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke darstellbar sein, dessen Bestandtheile sich mit solchen aus F_m und G_n als ähnlichen paaren lassen (*B, b*)).

b) Mittelst dieses Satzes ergiebt sich: Sind die Differentialausdrücke $\varphi_{\mathfrak{a}_0}, \varphi_{\mathfrak{a}_1}, \ldots \varphi_{\mathfrak{a}_r}$ durch Systeme unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke

darstellbar, und ist nicht bei je zweien dieser Ausdrücke ein Bestandtheil des einen einem solchen des anderen Ausdruckes ähnlich, so sind die Integrale von $\varphi_{a_0} = 0$, $\varphi_{a_1} = 0$ bis $\varphi_{a_r} = 0$ unter einander linearunabhängig.

Denn zunächst sind die Integrale von $\varphi_{a_0} = 0$ und $\varphi_{a_1} = 0$ von einander linearunabhängig. Werden sie in einer homogenen linearen Differentialgleichung $\varphi_{a_0} = y_1$, $\psi_{a_1}(y_1, x) = 0$ vereinigt, so ist $(C, a))$ ψ_{a_1} durch ein System darstellbar, welches ähnlich ist dem System φ_{a_1}. Nun sind nach dem vorhergehenden Satze die Integrale dieser Differentialgleichung und von $\varphi_{a_2} = 0$ von einander linearunabhängig und können in derselben Weise in einer Differentialgleichung vereinigt werden. Indem man in gleicher Weise fortfährt, erhält man den Satz. (Abh. Bd. 83, No. 7, IV.)

III. Es werden reciproke Differentialausdrücke No 2, I $F_m(y, x)$ und $\underline{F}_m(\underline{y}, x)$ mit rationalen Coefficienten

$$(11.) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + p_m y = F_m(y, x),$$

$$(12.) \qquad \frac{d^m \underline{y}}{dx^m} - \frac{d^{m-1} p_1 \underline{y}}{dx^{m-1}} + \cdots + (-1)^m p_m \underline{y} = \underline{F}_m(\underline{y}, x),$$

betrachtet.

A). *a*) Der reciproke Differentialausdruck von einem regulären ist selbst ein regulärer (No. 2, II *c*); IV).

Der reciproke Differentialausdruck von einem normalen F_m ist selbst ein normaler, in welchem der determinirende Factor den reciproken Werth des determinirenden Factors von F_m hat, der reguläre Differentialausdruck der reciproke des regulären Differentialausdruckes in F_m ist. Dieses ergiebt sich aus der reciproken Beziehung No. 2, (7.), (8.) der Integrale der reciproken Differentialgleichungen.

b) Wird ein Differentialausdruck durch ein System (1.) homogener linearer Differentialausdrücke mit rationalen Coefficienten dargestellt, so wird der reciproke Differentialausdruck durch das System der reciproken Differentialausdrücke in umgekehrter Reihenfolge gegeben (No. 2, III). Dieses System heisse das *reciproke System* von dem ersteren.

Die von zwei ähnlichen normalen Differentialausdrücken reciproken Differentialausdrücke sind selbst ähnliche normale Differentialausdrücke (No. 2, II *d*); IV).

Die von zwei ähnlichen Systemen normaler Differentialausdrücke reciproken Systeme sind selbst ähnliche Systeme normaler Differentialausdrücke (Abh. Bd. 83, No. 5).

B) Der Differentialausdruck $\Phi_N(y, x)$ sei durch ein System Σ unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke gegeben.

a) Von Φ_N sei eine zweite Darstellung $\xi(y, x) = s$, $\zeta(s, x)$ aufgestellt, wo ξ, ζ Systeme unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke sind. Dann giebt es auch eine Darstellung von Φ_N durch $\psi(y, x) = s$, $\zeta(s, x)$, wo ψ ein System unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke, welches ähnlich ist dem Systeme Σ, nachdem aus diesem gewisse Bestandtheile herausgenommen sind, die mit den Bestandtheilen von ζ so gepaart sind, dass in einem Paare ähnliche Differentialausdrücke stehen.

Der von Φ_N reciproke Differentialausdruck $\underline{\Phi}_N$ wird durch das von Σ reciproke System $\underline{\Sigma}$ gegeben und wird zweitens durch das System $\underline{\zeta}(\underline{y}, x) = s'$, $\underline{\xi}(s', x)$ dargestellt, wo $\underline{\zeta}$ das reciproke System von ζ, $\underline{\xi}$ dasjenige von ξ ist. Nun giebt es für $\underline{\Phi}_N$ auch eine Darstellung $\underline{\zeta}(\underline{y}, x) = s'$, $\underline{\psi}(s', x)$, wo $\underline{\psi}$ ein System ist ähnlich $\underline{\Sigma}$, wenn aus dem Systeme $\underline{\Sigma}$ gewisse Bestandtheile, die mit denen von $\underline{\zeta}$ als ähnliche gepaart sind, ausfallen (II *B, b*)). Hieraus folgt für Φ_N die angegebene Darstellung.

b) Durch Verbindung des vorigen Satzes und II *B, b*) ergiebt sich: Von Φ_N sei eine zweite Darstellung

$$(13.)\qquad R(y, x) = y_1,\quad S(y_1, x) = y_2,\quad T(y_2, x)$$

aufgestellt, wo R, S, T Systeme unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke. Dann giebt es auch eine Darstellung von Φ_N

$$(14.)\qquad R(y, x) = y_1,\quad S'(y_1, x) = y_2,\quad T(y_2, x),$$

wo S' ein System unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke, welches ähnlich ist dem Systeme Σ, nachdem aus diesem gewisse Bestandtheile herausgenommen sind, die mit denen in R und T so gepaart sind, dass in einem Paare ähnliche Differentialausdrücke stehen (Abh. Bd. 91, No. 6, I *b*).

9.

Differentialausdrücke, die bei einem Punkte normal sind, und Systeme solcher Differentialausdrücke.

I. $f_l(y, x)$ sei ein homogener linearer Differentialausdruck l^{ter} Ordnung mit rationalen Coefficienten, der sich auf die Form $e^w \bar{f}_l(e^{-w}y, x)$ bringen lässt, wo w gleich Null oder bei $x = a$ von der Form $\sum_1^n c_{-\lambda}(x-a)^{-\alpha}$, bei

$x = \infty$ von der Form $\sum_1^n c_\lambda x^\lambda$ ist, der charakteristische Index in $\bar{f}_t = 0$ bei $x = a$ bezüglich $x = \infty$ gleich Null. f_t nimmt eine solche Form nur auf eine Weise an. Alsdann heisse der Differentialausdruck mit rationalen Coefficienten $f_t(y, x)$ ein ***bei dem Punkte $x = a$ bezüglich $x = \infty$ normaler Differentialausdruck.*** e^w heisse ***der determinirende Factor bei diesem Punkte,*** $\bar{f}_t$ ***der bei diesem Punkte reguläre Differentialausdruck in*** f_t. e^w ist zugleich der einzige fundamentale determinirende Factor von $f_t(y, x)$ bei diesem Punkte (No. 3, (3.), III); die Exponentengleichung von $\bar{f}_t = 0$ bei diesem Punkte ist daher ***die zu dem determinirenden Factor bei diesem Punkte gehörende Exponentengleichung*** von $f_t(y, x)$.

Ein normaler Differentialausdruck ist demnach (vgl. No. 5) ein bei jedem Punkte normaler und umgekehrt. Ein Differentialausdruck der Form No. 8, (1.), in welcher Form die Bestandtheile bei einem Punkte normale Differentialausdrücke sind, bildet ein System solcher Ausdrücke. Wird ein bei einem Punkte normaler Differentialausdruck durch ein System homogener linearer Differentialausdrücke mit rationalen Coefficienten dargestellt, so sind alle Bestandtheile bei diesem Punkte normale Differentialausdrücke mit demselben determinirenden Factor (Abh. Bd. 91, No. 5, I).

II. *A*) Zwei bei demselben Punkte normale Differentialausdrücke heissen ***bei diesem Punkte ähnlich,*** wenn sie unzerlegbare Differentialausdrücke (No. 7, III) von derselben Ordnung und demselben zu diesem Punkte gehörenden determinirenden Factor sind, und wenn die Wurzeln der zu diesem determinirenden Factor gehörenden Exponentengleichung des einen Ausdruckes sich mit denen des anderen Ausdruckes so paaren lassen, dass die Wurzeln desselben Paares sich nur um eine ganze Zahl unterscheiden.

Zwei Systeme bei einem Punkte normaler Differentialausdrücke heissen ***bei diesem Punkte ähnlich,*** wenn sie gleich viele Bestandtheile enthalten und die Bestandtheile derselben Stelle bei diesem Punkte ähnlich sind.

Es sind nun alle Sätze der vorigen Nummer mit ihren Beweisen, welche dort über Systeme normaler Differentialausdrücke gegeben sind, übertragbar auf Systeme bei einem Punkte normaler Differentialausdrücke.

B) Eine Folgerung aus diesen Sätzen ist nachstehende:

Es seien s Differentialausdrücke $F^{(\mathfrak{c})}(y, x)$ $(\mathfrak{c} = 1, \ldots s)$ durch Systeme bei einem Punkte $x = a$ bezüglich $x = \infty$ normaler Differentialausdrücke

$$(1.)\qquad \Phi^{(\mathfrak{c})}(y, x) = y_1, \quad \Psi^{(\mathfrak{c})}(y_1, x)$$

gegeben, in denen $\Phi^{(c)}$ solche Systeme, $\Psi^{(c)}$ bei diesem Punkte normale Differentialausdrücke sind. Diejenigen Wurzeln der zu den determinirenden Factoren gehörenden Exponentengleichungen der einzelnen Bestandtheile, die sich von einer Grösse ϱ nur um ganze Zahlen unterscheiden, sollen in den Exponentengleichungen der $\Psi^{(c)}$ $(c = 1, \dots s)$ und nur in diesen vorkommen.

Es kommen nun die Sätze No. 7, II und die den Sätzen No. 8, II, *B, c*), *D*) entsprechenden zur Anwendung. Zunächst seien diejenigen Integrale von $\Phi^{(c)} = 0$ $(c = 1, \dots s)$, die unter einander linearunabhängig sind, in der Differentialgleichung $G_n = 0$ vereinigt. Die Integrale von $G_n = 0$ und $F^{(c)} = 0$ seien dann in der Differentialgleichung

$$(2.) \qquad G_n = s, \quad f^{(c)} = 0$$

vereinigt. Hier ist G_n ein System bei dem betrachteten Punkte normaler Differentialausdrücke, in dessen Bestandtheilen die zu den determinirenden Factoren bei diesem Punkte gehörenden Exponentengleichungen eine Wurzel, die sich von ϱ nur um eine ganze Zahl unterscheidet, nicht enthalten. $f^{(c)}$ ist ein bei dem Punkte normaler Differentialausdruck mit dem determinirenden Factor aus $\Psi^{(c)}$. Alsdann seien die Integrale von $f^{(c)} = 0$ $(c = 1, \dots s)$ in der Differentialgleichung $H_\nu = 0$ vereinigt.

a) Die zu dem betreffenden Punkte gehörenden determinirenden Factoren in den $\Psi^{(c)}$ seien unter einander verschieden, so sind die Integrale der Differentialgleichungen $f^{(c)} = 0$ $(c = 1, \dots s)$ aus (2.) unter einander linearunabhängig (vgl. No. 8, II *D*)).

b) Die zu demselben Punkte gehörenden determinirenden Factoren in den $\Psi^{(c)}$ seien einander gleich. Dann sind die Integrale von $F^{(c)} = 0$ $(c = 1, \dots s)$ in der Differentialgleichung

$$(3.) \qquad G_n(y, x) = s, \qquad H_\nu(s, x) = 0$$

vereinigt, in welcher ein System bei diesem Punkte normaler Differentialausdrücke gleich Null gesetzt ist, H_ν ein bei diesem Punkte normaler Differentialausdruck mit dem determinirenden Factor aus $\Psi^{(c)}$ ist und nur die zu dem determinirenden Factor gehörende Exponentengleichung von H_ν unter ihren Wurzeln solche enthält, die sich von ϱ nur um ganze Zahlen unterscheiden (vgl. Abh. Bd. 91, No. 5, II).

III. Der Differentialausdruck Φ_N sei durch ein System von $l+1$ unzerlegbaren normalen Differentialausdrücken gegeben. Der $\mathfrak{a}^{\text{te}}$ Bestand-

theil ($\alpha = 1, \dots l+1$) enthalte einen Punkt A_α im Endlichen oder Unendlichen der Art, dass eine Wurzel der zu dem determinirenden Factor bei diesem Punkte gehörenden Exponentengleichung in diesem Bestandtheile sich von einer Wurzel der entsprechenden Exponentengleichungen in denjenigen übrigen Bestandtheilen, die denselben determinirenden Factor bei diesem Punkte enthalten, nicht um eine ganze Zahl unterscheidet.

Dann sind je zwei Bestandtheile nicht ähnlich, und wenn alle Darstellungen des Differentialausdruckes Φ_N durch Systeme unzerlegbarer Differentialausdrücke aufgestellt werden sollen (No. 8, II *B, c), d)*), so können die nach No. 6 erforderlichen formellen Entwickelungen der Integrale bei den Punkten A_α ($\alpha = 1, \dots l+1$) vorgenommen werden, wobei man auf keine unbestimmten Constanten in den Entwickelungen stösst (No. 2, II *b*)). (Abh. Bd. 83, No. 7, VI *b*); Bd. 91, No. 6, II *b*).)

10.

Die canonische Form eines homogenen linearen Differentialausdruckes mit rationalen Coefficienten.

$F_m(y, x)$ sei ein homogener linearer Differentialausdruck m^{ter} Ordnung mit rationalen Coefficienten.

Es seien eine oder mehrere Differentialgleichungen, in denen normale Differentialausdrücke von demselben determinirenden Factor gleich Null gesetzt sind, vorhanden, deren Integrale $F_m = 0$ erfüllen. Werden die Integrale je zweier solcher Differentialgleichungen in einer homogenen linearen Differentialgleichung vereinigt, so enthält diese einen normalen Differentialausdruck mit demselben determinirenden Factor (No. 7, II; No. 8, I; II *C, a*)). Es giebt demnach von allen Differentialgleichungen mit normalen Differentialausdrücken und jenem determinirenden Factor, deren Integrale $F_m = 0$ erfüllen, nur eine, welche die höchste Ordnung hat, und diese Differentialgleichung enthält die Integrale aller anderen Differentialgleichungen derselben Art von niedrigeren Ordnungen. Alle solche Differentialgleichungen von höchster Ordnung, in deren Differentialausdrücken die determinirenden Factoren unter einander verschieden sind, seien aufgestellt. Die Integrale derselben sind unter einander linearunabhängig (No. 8, II *D*)). Diese Integrale seien in einer homogenen linearen Differentialgleichung $F_{(1)}(y, x)$ vereinigt, so ist $F_{(1)}$ durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar (No. 8, II *C, a*)). Alsdann wird $F_m(y, x)$ auf die Form

$$(1.) \qquad F_{(1)}(y, x) = y_1, \quad F_{m'}(y_1, x)$$

gebracht, wo $F_{m'}$ ein homogener linearer Differentialausdruck mit rationalen Coefficienten ist (No. 2, (14.)). $F_{(1)}(y, x)$ ist nun der erste canonische Bestandtheil von $F_m(y, x)$. Hierauf wird in derselben Weise der erste canonische Bestandtheil von $F_{m'}$ angenommen $F_{(2)}(y, x)$, und $F_{m'}$ durch das System

$$(2.)\qquad F_{(2)}(y_1, x) = y_2, \quad F_{m''}(y_2, x)$$

dargestellt, wo $F_{m''}$ ein homogener linearer Differentialausdruck mit rationalen Coefficienten ist, $F_{(2)}(y_1, x)$ wird dann der zweite canonische Bestandtheil von $F_m(y, x)$. Dieses Verfahren ist fortzusetzen, bis man in der Darstellung von $F_m(y, x)$ unter der Form

$$(3.)\qquad F_{(1)}(y, x) = y_1, \quad F_{(2)}(y_1, x) = y_2, \ldots F_{(\nu)}(y_{\nu-1}, x) = s, \quad F_{m-N}(s, x)$$

zu einem homogenen linearen Differentialausdruck mit rationalen Coefficienten $F_{m-N}(s, x)$ gelangt von der Ordnung $m-N$, wobei N gleich oder grösser als Null sein kann, bei dem entweder die Ordnung $m-N$ gleich Null ist, oder der die Eigenschaft hat, dass in $F_{m-N} = 0$ nicht mehr die Integrale einer Differentialgleichung mit normalem Differentialausdrucke enthalten sind. Die Darstellung (3.) von $F_m(y, x)$ besteht daher nur auf *eine* Weise. Dieselbe ist die *canonische Form von* $F_m(y, x)$ genannt worden (Abh. Bd. 91, No. 8, II; Bd. 95, No. 5, I). Die Bestandtheile $F_{(1)}$ bis $F_{(\nu)}$ haben die Benennung *normale canonische Bestandtheile von* F_m, der Bestandtheil F_{m-N}, wenn $m-N>0$ ist, *nichtnormaler canonischer Bestandtheil von* F_m erhalten. Das System der normalen canonischen Bestandtheile von F_m stellt den Differentialausdruck $\Phi_N(y, x)$ dar, der in No. 8, II (7.), B, b) definirt ist.

Eine oder mehrere homogene lineare Differentialgleichungen, deren Integrale unter einander linearunabhängig sind, werden als ein System von Unterdifferentialgleichungen derjenigen homogenen linearen Differentialgleichung bezeichnet, welche die Integrale derselben vereinigt enthält. Eine Differentialgleichung, die ein System von Unterdifferentialgleichungen mit normalen Differentialausdrücken und unter einander verschiedenen determinirenden Factoren besitzt, kann nur *ein* System dieser Art besitzen (No. 8, II D)). Diese Unterdifferentialgleichungen sind *Hauptunterdifferentialgleichungen* genannt worden (Abh. Bd. 91, No. 9). Die zur Bildung der canonischen Form von F_m aufzustellenden Differentialgleichungen sind also die Hauptunterdifferentialgleichungen der Differentialgleichungen, in denen die normalen canonischen Bestandtheile von F_m gleich Null gesetzt sind.

11.

Herleitung der canonischen Form.

Die Herleitung der canonischen Form eines homogenen linearen Differentialausdruckes $F_m(y, x)$ m^{ter} Ordnung mit rationalen Coefficienten wird in folgender Weise durchgeführt (vgl. Abh. Bd. 91, No. 8, III).

I. Bei jedem singulären Punkte von $F_m = 0$ im Endlichen und bei $x = \infty$, wenn dieser Punkt in $F_m = 0$ singulär ist, werden die fundamentalen determinirenden Factoren aufgestellt und sind die Wurzeln der zu denselben gehörenden Exponentengleichungen (No. 3, III) zu ermitteln. Die Anzahl der Wurzeln dieser Gleichungen bei demselben Punkte ist $\leqq m$ (No. 4, II).

II. Wenn in $F_m = 0$ die Integrale einer Differentialgleichung mit normalem Differentialausdrucke enthalten sein sollen, so muss der determinirende Factor e^W in diesem Ausdrucke das Product von fundamentalen determinirenden Factoren sein, von denen je einem singulären Punkte von $F_m = 0$ einer angehört (No. 5). Es sei also dem entsprechend aus fundamentalen determinirenden Factoren bei den singulären Punkten von $F_m = 0$ ein Product e^W gebildet. Die Exponentengleichung von $e^{-W}F_m(e^W y, x) = 0$ bei einem singulären Punkte von $F_m = 0$ ist die zu dem fundamentalen determinirenden Factor in e^W gehörende Exponentengleichung von $F_m = 0$ (No. 5); ein in $F_m = 0$ nichtsingulärer Punkt ist auch in $e^{-W}F_m(e^W y, x) = 0$ nichtsingulär.

Es ist nun zuzusehen, ob $e^{-W}F_m(e^W y, x)$ sich in ein System von zwei Differentialausdrücken zerlegen lässt, von denen der erste ein regulärer Differentialausdruck ist. Hierzu ist auf den Ausdruck $e^{-W}F_m(e^W y, x)$ das Verfahren von No. 6 anzuwenden und dadurch zu ermitteln, ob die betreffende Zerlegung möglich, und zugleich, welches in derselben der erste Bestandtheil von höchster Ordnung ist; es kann nur einen solchen geben (No. 7, II; No. 8, I). Es sei bei einem Werthe von $e^W = e^{W^{(1)}}$ ein solcher regulärer Differentialausdruck $\overline{\Phi}^{(1)}(y, x)$ gefunden und der normale Differentialausdruck $\Phi^{(1)}(y, x) = e^{W^{(1)}}\overline{\Phi}^{(1)}(e^{-W^{(1)}}y, x)$ gebildet.

Nun werden bei jedem singulären Punkte von $F_m = 0$ aus der Reihe der Wurzeln der zu dem fundamentalen determinirenden Factor in $e^{W^{(1)}}$ gehörenden Exponentengleichung von $F_m = 0$ so viele, und zwar diese, gestrichen, als sich mit den Wurzeln der Exponentengleichung von $\overline{\Phi}^{(1)} = 0$

bei diesem Punkte paaren lassen, so dass die in einem Paare stehenden sich nur um eine ganze Zahl unterscheiden.

Wenn ein zweiter normaler Differentialausdruck $\Phi^{(2)}(y, x)$ mit einem von dem vorigen verschiedenen determinirenden Factor $e^{W^{(2)}}$ und mit dem regulären Differentialausdruck $\overline{\Phi}^{(2)}(y, x)$ besteht, so dass die Integrale von $\Phi^{(2)} = 0$ in $F_m = 0$ enthalten sind, so ergiebt sich, dass die fundamentalen determinirenden Factoren bei den singulären Punkten von $F_m = 0$, deren Product $e^{W^{(2)}}$ ist, solche sind, bei denen Wurzeln der zugehörigen Exponentengleichung übrig geblieben sind, und dass die Wurzeln der Exponentengleichung von $\overline{\Phi}^{(2)} = 0$ bei einem singulären Punkte von $F_m = 0$ sich mit eben so vielen übrig gebliebenen Wurzeln der zu dem fundamentalen determinirenden Factor in $e^{W^{(2)}}$ gehörenden Exponentengleichung paaren lassen, so dass die Wurzeln eines Paares sich nur um eine ganze Zahl unterscheiden. Dieses ergiebt sich, indem man die Integrale von $\Phi^{(1)} = 0$ und $\Phi^{(2)} = 0$ in einer Differentialgleichung $\Phi^{(1)} = y_1$, $\varphi^{(2)}(y_1, x) = 0$ vereinigt gemäss No. 8, II *C, a*) und den Satz No. 3, III, (12.) anwendet.

Es ist nun dem entsprechend ein zweiter determinirender Factor $e^{W^{(2)}}$ aufzustellen, alsdann nach No. 6 zuzusehen, ob sich $e^{-W^{(2)}} F_m(e^{W^{(2)}} y, x)$ in ein System von zwei Differentialausdrücken zerlegen lässt, von denen der erste ein regulärer Differentialausdruck ist, wobei in Betreff der Wurzeln der Exponentengleichungen dieses Ausdruckes die vorhin gemachte Angabe anzuwenden ist. Ergiebt sich ein solcher regulärer Differentialausdruck $\overline{\Phi}^{(2)}(y, x)$, der zugleich von höchster Ordnung sei, so werden nun weiter bei jedem singulären Punkte von $F_m = 0$ so viele der vorhin übrig gebliebenen Wurzeln der zu dem fundamentalen determinirenden Factor in $e^{W^{(2)}}$ gehörenden Exponentengleichung von F_m gestrichen und zwar diese, als sich mit den Wurzeln der Exponentengleichung von $\overline{\Phi}^{(2)} = 0$ bei diesem Punkte paaren lassen, so dass die Wurzeln eines Paares sich nur um eine ganze Zahl unterscheiden.

Mit den fundamentalen determinirenden Factoren bei den singulären Punkten von $F_m = 0$, bei denen Wurzeln der zugehörigen Exponentengleichungen übrig geblieben sind, ist dann in derselben Weise zu verfahren. Es werden auf diese Weise die Hauptunterdifferentialgleichungen des ersten canonischen Bestandtheiles von F_m ermittelt. Nun wird nach No. 7, I die Differentialgleichung gebildet, welche die Integrale dieser Hauptunterdiffe-

rentialgleichungen vereinigt enthält. Der Differentialausdruck derselben stellt sich als ein System normaler Differentialausdrücke dar (No. 8, II C, a)) und ist der erste canonische Bestandtheil $F_{(1)}(y, x)$ von $F_m(y, x)$. Alsdann wird $F_m(y, x)$ durch das System

$$(1.)\quad F_{(1)}(y, x) = y_1, \quad F_{m'}(y_1, x)$$

dargestellt. Es ist nun der homogene lineare Differentialausdruck mit rationalen Coefficienten $F_{m'}$ in derselben Weise zu behandeln.

III. Die fundamentalen determinirenden Factoren von F_m, bei denen Wurzeln der zugehörigen Exponentengleichungen übrig geblieben waren, bei einem singulären Punkte von $F_m = 0$ sind die fundamentalen determinirenden Factoren von $F_{m'}$ bei diesem Punkte, und die übrig gebliebenen Wurzeln jener Exponentengleichungen lassen sich mit den Wurzeln der zu den fundamentalen determinirenden Factoren gehörenden Exponentengleichungen von $F_{m'}$ so paaren, dass die Wurzeln eines Paares sich nur um eine ganze Zahl unterscheiden (No. 3, III, (12.)).

Es können nun in $F_{m'} = 0$ noch neue singuläre Punkte auftreten. Bei einem solchen Punkte ist der charakteristische Index in $F_{m'} = 0$ gleich Null, die Integrale sind gemäss $F_{(1)} = y_1$ einwerthig, daher die Wurzeln der Exponentengleichung ganzzahlig. Die im Endlichen liegenden neu hinzutretenden singulären Punkte in $F_{m'} = 0$ sind ((1.); No. 2, (14.)) auch in $F_{(1)} = 0$ singulär und umgekehrt, zugleich sind dieselben in $F_{(1)} = 0$ ausserwesentlich singulär (No. 6, I A)). Ein solcher Punkt sei $x = a$, die Coefficienten in $F_{(1)}$ seien durch q_α bezeichnet, so ist $|q_1(x-a)|_{x=a}$ eine negative ganze Zahl. Die singulären Punkte von $F_m = 0$ im Endlichen seien $a_\alpha (\alpha = 1, \dots \varkappa)$, $(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_\varkappa) = \varphi(x)$, bei $x = 0$ sei $\varphi = 1$ gesetzt. q_1 sei gleich $\frac{Z_1}{N_1}$, wo Z_1, N_1 keinen gemeinschaftlichen Factor haben; es sei aus N_1 das Polynom hergeleitet, welches die von einander verschiedenen linearen Factoren von N_1 einfach enthält. Wird dieses Polynom durch den grössten gemeinschaftlichen Theiler zwischen demselben und $\varphi(x)$ dividirt, so werde das Polynom $\chi(x)$ erhalten. Dann liefern die Wurzeln von $\chi(x) = 0$ die neu hinzutretenden singulären Punkte im Endlichen, dieselben seien $a_{\varkappa+\alpha}(\alpha = 1, \dots \lambda)$. Aus dem Umstande, dass die Wurzeln der Exponentengleichungen von $F_{(1)} = 0$ und $F_{m'} = 0$ bei $a_{\varkappa+\alpha}$ ganzzahlig sind, und aus der Form der Exponentengleichungen ergiebt sich, dass die verschiedenen linearen Factoren $x-a_{\varkappa+\alpha}(\alpha = 1, \dots \lambda)$ im Allgemeinen in dem einen oder anderen

Nenner der rationalen Coefficienten in $F_{(1)}$ und $F_{m'}$ mit verschiedenen Exponenten vorkommen werden. Alsdann ergeben sich, indem man die Polynome herleitet, welche die in den Nennern gleichvielfach vorkommenden Factoren $x-a_{\varkappa+\lambda}$ einfach enthalten, Divisoren von $\chi(x)$ (Abh. Bd. 91, p. 179).

Nachdem nun bei den singulären Punkten von $F_{m'} = 0$ die fundamentalen determinirenden Factoren und die Wurzeln der zugehörigen Exponentengleichungen bestimmt sind, wird $F_{m'}$ in derselben Weise behandelt wie F_m. Dieses Verfahren ist fortzusetzen, so lange Wurzeln aller fundamentalen Exponentengleichungen (No. 3, III) von $F_m = 0$ noch übrig sind, bis entweder F_m vollständig durch ein System normaler canonischer Bestandtheile dargestellt ist, oder bis man auf einen Differentialausdruck stösst, der, gleich Null gesetzt, eine Differentialgleichung ergiebt, die nicht mehr die Integrale einer Differentialgleichung mit normalem Differentialausdruck enthält; dieser Differentialausdruck ist dann der nichtnormale canonische Bestandtheil von F_m.

12.

Die verschiedenen Fälle in der canonischen Form: Beispiele.

I. Die canonische Form von $F_m(y, x)$ bestehe aus nur einem normalen canonischen Bestandtheile. Dann sind die Integrale von $F_m = 0$ durch die Hauptunterdifferentialgleichungen dieser Differentialgleichung gegeben. Die Integrale einer Hauptunterdifferentialgleichung sind das Product eines determinirenden Factors und der Integrale einer Differentialgleichung mit regulärem Differentialausdrucke. Einen Differentialausdruck F_m mit nur einem normalen canonischen Bestandtheile bildet man durch Herleitung der homogenen linearen Differentialgleichung, welche die Integrale mehrerer Differentialgleichungen mit normalen Differentialausdrücken und von einander verschiedenen determinirenden Factoren vereinigt enthält. Zu solchen Differentialausdrücken gehört derjenige, in dem die Coefficienten constant sind (vgl. Abh. Bd. 91, No. 9, I), ferner jeder reguläre und überhaupt jeder normale Differentialausdruck.

II. Die canonische Form von $F_m(y, x)$ bestehe aus mehreren normalen canonischen Bestandtheilen. Die Integrale von $F_m = 0$, wenn die canonische Form aus normalen canonischen Bestandtheilen besteht, werden in der dritten Abtheilung behandelt.

Einen Differentialausdruck F_m von mehreren canonischen Bestand-

theilen kann man wie in Abh. Bd. 95, No. 6, I angegeben ist, bilden. Wenn man bereits eine canonische Form von $s-1$ normalen canonischen Bestandtheilen hat

$$(1.)\qquad F_{(1)} = y_1,\quad F_{(2)} = y_2,\quad \dots\quad F_{(s-2)} = y_{s-2},\quad F_{(s-1)}$$

und wenn

$$(2.)\qquad F_{(s-1)} = y_{s-1},\quad F_{(s)}$$

eine canonische Form von zwei canonischen Bestandtheilen $F_{(s-1)}$ und $F_{(s)}$ ist, so bildet auch das System

$$(3.)\qquad F_{(1)} = y_1,\quad F_{(2)} = y_2,\quad \dots\quad F_{(s-1)} = y_{s-1},\quad F_{(s)}$$

eine canonische Form mit den Bestandtheilen $F_{(1)}$ bis $F_{(s)}$. $F_{(s)}$ kann dabei normaler oder nichtnormaler canonischer Bestandtheil sein. Denn die Integrale einer Differentialgleichung mit normalem Differentialausdruck, welche das System (3.) zu Null machen, müssen wegen (2.) auch das System (1.) gleich Null machen (No. 7, II; No. 8, II *B, b*); *C, a*)), woraus folgt, dass $F_{(1)}$ erster canonischer Bestandtheil des Differentialausdruckes (3.) ist. Auf dieselbe Weise ergiebt sich, dass $F_{(2)}$ zweiter canonischer Bestandtheil von (3.) ist, u. s. w. Um ein System (2.) mit normalen canonischen Bestandtheilen zu bilden, werden n solche Systeme (2.) mit zwei normalen Differentialausdrücken aufgestellt $f_r = y_1$, φ_r $(r = 1, \dots n)$ gemäss Abh. Bd. 95, No. 6, I. Die determinirenden Factoren in $\varphi_r (r = 1, \dots n)$ seien unter einander und von denen in $f_r = 0$ $(r = 1, \dots n)$ verschieden. $f_r = 0$ $(r = 1, \dots n)$ seien die Hauptunterdifferentialgleichungen von $F_{(s-1)} = 0$. Die Integrale von $F_{(s-1)} = 0$ und $f_r = y_1$, $\varphi_r = 0$ werden vereinigt in $F_{(s-1)} = y'$, $\psi_r = 0$, die von $\psi_r = 0$ $(r = 1, \dots n)$ in $F_{(s)} = 0$, so hat das hierdurch erhaltene System $F_{(s-1)} = y_{s-1}$, $F_{(s)}$ die verlangte Eigenschaft (s. Abh. Bd. 95, No. 6, I). Einen Differentialausdruck $F_{(s)}$ als nichtnormalen canonischen Bestandtheil erhält man, wenn bei einem singulären Punkte in $F_{(s)}$ der charakteristische Index gleich der Ordnung ist und die Coefficienten so gewählt sind, dass in $F_{(s)}$ keine Hauptpotenzen (No. 4, I) vorhanden sind.

III. Die canonische Form von $F_m(y, x)$ enthalte einen nichtnormalen canonischen Bestandtheil. Derselbe sei $F_{m-N}(s, x)$. Wird der reciproke Differentialausdruck von F_{m-N} genommen $\underline{F}_{m-N}(\underline{s}, x)$ und nun von diesem die canonische Form, so sei dieselbe $\underline{\varphi}_{N'}(\underline{s}, x) = s_1$, $\underline{F}_M(s_1, x)$, wo $\varphi_{N'}$ das System N'^{ter} Ordnung der normalen canonischen Bestandtheile, $\underline{F}$ der nicht-

normale canonische Bestandtheil von der Ordnung M. Die von $\varphi_{N'}$ und F_M reciproken Differentialausdrücke seien durch $\underline{\varphi}_{N'}$ und $\underline{F}_M$ bezeichnet. Dann wird $\underline{F}_{m-N}$ durch das System

$$(4.)\qquad \underline{F}_M(y, x) = s', \quad \underline{\varphi}_{N'}(s', x)$$

dargestellt, wo $\underline{\varphi}_{N'}$ sich auch auf s' reduciren kann. $\underline{F}_M$ lässt sich also nicht mehr durch ein System von homogenen linearen Differentialausdrücken mit rationalen Coefficienten darstellen, von denen der erste oder der letzte Bestandtheil ein normaler Differentialausdruck ist (Abh. Bd. 91, No. 9, III). Bei den singulären Punkten von F_{m-N}, die auch in F_m singulär sind, werden nach No. 11 die fundamentalen determinirenden Factoren von F_{m-N} aus solchen von F_m bekannt und die Wurzeln der zugehörigen Exponentengleichungen bis auf ganze Zahlen. Hieraus leitet man bei denselben Punkten nach No. 3, III (Schluss) die fundamentalen determinirenden Factoren und Wurzeln der zugehörigen Exponentengleichungen des reciproken Ausdruckes $\underline{F}_{m-N}$ her. Bei allen anderen singulären Punkten von $\underline{F}_{m-N}$ ist der charakteristische Index Null, sind die Wurzeln der Exponentengleichung ganzzahlig.

$F_m(y, x)$ hat nun gemäss No. 10 die Darstellung

$$(5.)\qquad \Phi_N(y, x) = s, \quad F_M(s, x) = s', \quad \varphi_{N'}(s', x).$$

Bei dem von F_m reciproken Ausdrucke $\underline{F}_m$ braucht nicht $\underline{\varphi}_{N'}$ gleich dem Systeme der normalen canonischen Bestandtheile zu sein. Auch braucht, wenn ein Differentialausdruck aus mehreren normalen canonischen Bestandtheilen besteht, der von dem letzten dieser Bestandtheile reciproke Ausdruck nicht der erste canonische Bestandtheil des von dem ursprünglichen Differentialausdrucke reciproken zu sein (Abh. Bd. 91, No. 9, III).

Die Betrachtung von Integralen der Differentialgleichung $F_m = 0$, wenn F_m die Form

$$(6.)\qquad \Phi_N(y, x) = s, \quad F_{m-N}(s, x)$$

hat, kommt in folgenden Fällen auf die der Differentialgleichung $\Phi_N = 0$ zurück. Wenn in F_{m-N} bei einem Punkte der charakteristische Index $m-N$ ist, so müssen reguläre Integrale von $F_m = 0$ bei diesem Punkte in $\Phi_N = 0$ enthalten sein. Dasselbe findet in Bezug auf irgend ein System normaler Elementarintegrale (No. 3, I) von $F_m = 0$ mit demselben determinirenden Factor e^w statt, wenn in $e^{-w}F_{m-N}(e^w s, x)$ der charakteristische Index $m-N$ ist. Ist e^w bei einem Punkte ein fundamentaler determinirender

Factor von F_m und in $e^{-w}F_m(e^w y, x)$ der charakteristische Index bei diesem Punkte Null, so wird ein zu untersuchendes Integral von $e^{-w}F_m(e^w y, x) = 0$ durch einen homogenen linearen Ausdruck mit constanten Coefficienten von m regulären Integralen dargestellt, wobei die constanten Coefficienten rationale Ausdrücke von Constanten in den Entwickelungen der Integrale bei diesem Punkte sind (No. 20, I B, b)); hieraus ist zu ermitteln, ob in den Ausdruck eines Integrales nur Integrale von $e^{-w}\Phi_N(e^w y, x) = 0$ eingehen. Wenn F_M ein bei einem singulären Punkte von $F_m = 0$ normaler Differentialausdruck (No. 9) ist, so erhält man die Integrale von $F_m = 0$ bei diesem Punkte wie in dem Falle II.

In Betreff der weiteren Betrachtung von $F_M(s, x)$ s. No. 26.

Dritte Abtheilung.

Die Integrale der Differentialgleichungen, deren Differentialausdruck durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar ist.

13.

Darstellung der Integrale durch Systeme normaler Elementarintegrale und Form der Entwickelung der Integrale.

I. Der Differentialausdruck $F_m(y, x)$ m^{ter} Ordnung sei durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar. $F_m = 0$ enthalte die Integrale einer Differentialgleichung $\Psi_L = 0$ L^{ter} Ordnung, wo Ψ_L durch ein System bei dem Punkte $x = a$ normaler Differentialausdrücke (No. 9)

$$(1.)\qquad F_{\alpha_1}(y, x) = y_1,\quad F_{\alpha_2}(y_1, x) = y_2,\quad \ldots\quad F_{\alpha_l}(y_{l-1}, x)$$

dargestellt sei, worin

$$(2.)\qquad F_{\alpha_k} = e^{w_k}\bar{F}_{\alpha_k}(e^{-w_k}y, x),$$

e^{w_k} der determinirende Factor bei $x = a$, $\bar{F}_{\alpha_k}(\bar{y}, x)$ der bei $x = a$ reguläre Differentialausdruck α_k^{ter} Ordnung ist. Alsdann hat $\bar{F}_{\alpha_k} = 0$ ein System von Integralen folgender Form. Die Wurzeln der Exponentengleichung von $\bar{F}_{\alpha_k} = 0$ bei $x = a$ seien $r_{k\mathfrak{b}}$ ($\mathfrak{b} = 1, \ldots \alpha_k$) und so geordnet, dass diejenigen, die sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, auf einander folgen, und unter diesen der reelle Theil der vorhergehenden nicht kleiner sei als derjenige

der folgenden. Die Integrale von $\bar{F}_{\alpha_k} = 0$ haben dann die Form

$$(3.)\qquad v_1\int dx\, v_2\int\ldots\int v_{\mathfrak{b}}\,dx \qquad\qquad (\mathfrak{b}=1,\ldots\alpha_k),$$

wo $v_{\mathfrak{b}} = (x-a)^{\varepsilon_{k\mathfrak{b}}}\varphi_{k\mathfrak{b}}(x)$, $\varepsilon_{k\mathfrak{b}} = r_{k\mathfrak{b}}-r_{k(\mathfrak{b}-1)}-1$, $\varepsilon_{k1} = r_{k1}$ ist, $\varphi_{k\mathfrak{b}}$ eine Entwickelung der Form $c_0\sum_0^\infty \frac{c_\mathfrak{a}}{c_0}(x-a)^\mathfrak{a}$, Mod $c_0 \gtrless 0$, hat, worin c_0 willkürlich, $\frac{c_\mathfrak{a}}{c_0}$ eindeutig bestimmt ist, welche in einem Kreise um $x = a$ als Mittelpunkt convergirt (No. 1, II). Die Integrale (3.) werden auf die Form gebracht

$$(4.)\qquad \nu_{k1}\int dx\,\nu_{k1}^{-1}\nu_{k2}\int\ldots\int\nu_{k(\mathfrak{b}-1)}^{-1}\nu_{k\mathfrak{b}}\,dx \qquad\qquad (\mathfrak{b}=1,\ldots\alpha_k),$$

wo

$$(5.)\qquad \nu_{k\mathfrak{b}} = (x-a)^{r_{k\mathfrak{b}}-\mathfrak{b}+1}\psi_{k\mathfrak{b}}(x) \qquad\qquad (\mathfrak{b}=1,\ldots\alpha_k)$$

ist, $\psi_{k\mathfrak{b}}$ eine Entwickelung der Form $\sum_0^\infty c_\mathfrak{a}(x-a)^\mathfrak{a}$, Mod $c_0 \gtrless 0$, hat. Die Integrale von $F_{\alpha_k} = 0$ sind nun

$$(6.)\qquad \mu_{k1}\int dx\,\mu_{k1}^{-1}\mu_{k2}\int\ldots\int\mu_{k(\mathfrak{b}-1)}^{-1}\mu_{k\mathfrak{b}}\,dx \qquad\qquad (\mathfrak{b}=1,\ldots\alpha_k),$$

wo

$$(7.)\qquad \mu_{k\mathfrak{b}} = e^{w_k}\nu_{k\mathfrak{b}} \qquad\qquad (\mathfrak{b}=1,\ldots\alpha_k)$$

ist. Alsdann werden gemäss No. 2 (9.), (10.), (11.) die Integrale von $\Psi_L = 0$ dargestellt durch

$$(8.)\qquad \mu_1\int dx\,\mu_1^{-1}\mu_2\int\ldots\int\mu_{\mathfrak{a}-1}^{-1}\mu_\mathfrak{a}\,dx \qquad\qquad (\mathfrak{a}=1,\ldots L),$$

wo der Zeiger

$$(9.)\qquad \mathfrak{a} = \sum_{\mathfrak{c}=0}^{\mathfrak{c}=k-1}\alpha_\mathfrak{c}+\mathfrak{b} = k\mathfrak{b} \qquad\qquad \begin{cases}(k=1,\ldots l) & (\alpha_0=0)\\ (\mathfrak{b}=1,\ldots\alpha_k)\end{cases}$$

zu setzen ist, dann die μ aus (7.) zu entnehmen sind (vgl. Abh. Bd. 83, No. 9).

In einem Systeme normaler Elementarintegrale (8.) werden die Integrationen successive in den einzelnen Gliedern der Entwickelungen ausgeführt, wobei jedes Mal das constante Glied in der Entwickelung (Integrationsconstante) annullirt wird. Hierzu werden folgende Formeln in Bezug auf die Integralfunction

$$(10.)\qquad \int(x-a)^r\psi(x-a)(\log(x-a))^n dx$$

angewandt, wo $\psi(x-a)$ eine analytische Function ist, die in einem Kreise um $x = a$ als Mittelpunkt, abgesehen von diesem Punkte, einwerthig und stetig ist, daher eine Entwickelung der Form $\sum_0^\infty c_\mathfrak{a}(x-a)^\mathfrak{a}+\sum_{-1}^{-\infty}c_\mathfrak{a}(x-a)^\mathfrak{a}$ hat,

n ganzzahlig und gleich oder grösser als Null ist. r sei nicht ganzzahlig, so tritt die Formel ein

$$(11.)\quad \begin{cases} \int \xi(x-a)(\log(x-a))^n dx = \eta(x-a)(\log(x-a))^n - n\int \zeta(x-a)(\log(x-a))^{n-1}dx, \\ \xi(x-a) = (x-a)^r \psi(x-a), \quad \eta(x-a) = \int \xi(x-a)dx, \quad \zeta(x-a) = \frac{1}{x-a}\eta(x-a), \end{cases}$$

r sei ganzzahlig und $(x-a)^r\psi(x-a) = \Psi(x-a) = \frac{k_{-1}}{x-a} + \xi(x-a)$ gesetzt, so wird die Formel angewandt

$$(12.)\quad \begin{cases} \int \Psi(x-a)(\log(x-a))^n dx = \frac{k_{-1}}{n+1}(\log(x-a))^{n+1} \\ +\eta(x-a)(\log(x-a))^n - n\int \zeta(x-a)(\log(x-a))^{n-1}dx, \\ \eta(x-a) = \int \xi(x-a)dx, \quad \zeta(x-a) = \frac{1}{x-a}\eta(x-a), \end{cases}$$

wo das constante Glied in $\eta(x-a)$ annullirt wird.

Zunächst wird in einem Ausdrucke (8.) integrirt, so lange in je zwei auf einander folgenden Elementarintegralen $\mu_{\mathfrak{b}-1}$ und $\mu_{\mathfrak{b}}$ die determinirenden Factoren übereinstimmen. Hierdurch ergiebt sich ein Ausdruck $U = e^u \bar{U}$, e^u ist der determinirende Factor, $\bar{U}$ geht aus einem Integralausdrucke

$$(13.)\quad \bar{U}_{\mathfrak{b}} = \nu_1 \int dx\, \nu_1^{-1}\nu_2 \int \dots \int \nu_{\mathfrak{b}-1}^{-1}\nu_{\mathfrak{b}}\, dx$$

für $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ hervor, wo $\nu_{\mathfrak{b}}$ von der Form $(x-a)^{r_{\mathfrak{b}}-\mathfrak{b}+1}\sum_0^\infty c_\alpha (x-a)^\alpha$, Mod $c_0 \gtrless 0$, ist, und hat daher die Entwickelung

$$(14.)\quad (x-a)^\varrho \{\chi_1(x-a) + \chi_2(x-a)\log(x-a) + \dots + \chi_\sigma(x-a)(\log(x-a))^{\sigma-1}\},$$

in welcher die Grössen χ Entwickelungen der Form $\sum_0^\infty c_\alpha(x-a)^\alpha$ haben. Dann sind ferner in einem Integrale der Form

$$(15.)\quad \mu_1 \int dx\, \mu_1^{-1}\mu_2 \int \dots \int dx\, \mu_{k-1}^{-1}\mu_k \int \mu_k^{-1} U dx$$

die Integrationen auszuführen, in welchem, wenn e^{w_k} der determinirende Factor in μ_k ist, $u - w_k$ von Null verschieden ist. Aus (14.) und (15.) ergiebt sich als allgemeine Form der Entwickelung des Integrales (8.)

$$(16.)\quad (x-a)^{\varrho+\mathfrak{c}}\{\varphi_1(x-a) + \varphi_2(x-a)\log(x-a) + \dots + \varphi_\tau(x-a)(\log(x-a))^{\tau-1}\},$$

wo $\mathfrak{c}$ eine ganze Zahl ist, die Grössen φ Entwickelungen der Form $\sum_0^\infty c_\alpha(x-a)^\alpha + \sum_{-1}^{-\infty} c_\alpha(x-a)^\alpha$ haben, von denen zunächst ermittelt ist, dass sie in einem gewissen Kreise um $x = a$, abgesehen von diesem Punkte, gelten.

II. Wenn durch Y ein Ausdruck der Form (16.) bezeichnet wird und das Resultat eines Umganges um $x=a$ durch $[Y]$ und bei dem Integrale $\int Y dx$, in dessen Entwickelung das constante Glied annullirt wird, das Resultat des Umganges durch $\left[\int Y dx\right]$, so ist

$$(17.)\qquad \left[\int Y dx\right] = \int [Y] dx + c,$$

wo in $\int [Y] dx$ die Integrationsconstante annullirt wird, c das constante Glied in der Entwickelung von $\left[\int Y dx\right]$ ist. Wenn der Exponent ϱ in der Entwickelung von Y nicht ganzzahlig ist, so wird c gleich Null. Die Ausdrücke (13.), in denen der Exponent des letzten Elementarintegrales sich von ϱ nur um eine ganze Zahl unterscheidet, seien durch $\overline{U}_{\mathfrak{c}}$, $\overline{U}_{\mathfrak{c}_1}$ bis $\overline{U}_{\mathfrak{c}_{q-1}}$ bezeichnet, und wenn diese Ausdrücke statt U in (15.) eingesetzt werden, so seien die hierdurch erhaltenen Grössen (15.) y_{p+q}, y_{p+q-1} bis y_{p+1}. Alsdann seien diejenigen Ausdrücke (8.), in denen $\mathfrak{a} \leqq k$ ist, und der Exponent in dem letzten Elementarintegral sich von ϱ nur um eine ganze Zahl unterscheidet, die Grössen y_p bis y_1. Der Exponent $\tau-1$ in der Entwickelung (16.) von $y_\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a}=1, \dots p+q)$ ist höchstens gleich $\mathfrak{a}-1$. Nun erhält man bei einem positiven Umgange (in der Richtung von $+1$ nach $+i$)

$$(18.)\qquad [\overline{U}_{\mathfrak{c}}] = e^{2\pi i\varrho}\{\overline{U}_{\mathfrak{c}} + c_1 \overline{U}_{\mathfrak{c}_1} + \cdots + c_{q-1}\overline{U}_{\mathfrak{c}_{q-1}}\},$$

$$(19.)\qquad [y_{p+q}] = e^{2\pi i\varrho}\{y_{p+q} + c_1 y_{p+q-1} + \cdots + c_{q-1} y_{p+1} + c_q y_p + \cdots + c_{p+q-1} y_1\},$$

wo c_1 bis c_{p+q-1} Constante sind. Wird in der Entwickelung von y_{p+q} der Form (16.) der Umgang vorgenommen und werden für y_{p+q} bis y_1 die Entwickelungen der Form (16.) eingesetzt, so müssen die Coefficienten der gleich hohen Potenzen von $\log(x-a)$ auf beiden Seiten in (19.) übereinstimmen. Hieraus ergiebt sich, dass die Factoren derjenigen Potenzen von $\log(x-a)$ in y_{p+q}, in denen der Exponent $\geqq 1$ ist, sich als homogene lineare Ausdrücke mit constanten Coefficienten von den Factoren der Potenzen von $\log(x-a)$ in y_{p+q-1} bis y_1 darstellen.

Aus letzteren Relationen und indem man die Fortsetzung der Integrale von $F_m = 0$ in einem Gebiete betrachtet, in welchem kein singulärer Punkt dieser Differentialgleichung liegt, folgt nun successive, dass die Factoren der Potenzen von $\log(x-a)$ in den Entwickelungen

von y_1 bis y_{p+q} mit $(x-a)^{-\varrho}$ multiplicirt in dem Kreise um $x=a$ als Mittelpunkt, der durch den nächsten singulären Punkt von $F_m = 0$ hindurchgeht, abgesehen von $x = a$, einwerthige und stetige analytische Functionen sind. Das Innere des um den (singulären oder nichtsingulären) Punkt $x = a$ als Mittelpunkt geschlagenen Kreises, der durch den nächsten singulären Punkt einer homogenen linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten geht, ist der ***Bezirk*** des Punktes $x = a$ bei dieser Differentialgleichung genannt worden. Das Aeussere des Kreises um $x = 0$ als Mittelpunkt, der durch den entferntesten im Endlichen liegenden singulären Punkt hindurchgeht, ist der Bezirk des Punktes $x = \infty$ (vgl. Abh. Bd. 87, No. 1).

III. Wenn nun F_m in der Differentialgleichung $F_m = 0$ durch ein System bei $x = a$ normaler Differentialausdrücke dargestellt ist und man von den in diesen Ausdrücken vorkommenden determinirenden Factoren bei $x = a$ die zugehörigen Exponentengleichungen (No. 9) nimmt und deren Wurzeln aufstellt, so entspricht nach II einer Gruppe von λ Wurzeln, die sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, eine Gruppe von λ Integralen von $F_m = 0$ mit Entwickelungen der Form (16.), in denen der Exponent $\varrho + \mathfrak{c}$ sich von diesen Zahlen nur um eine ganze Zahl unterscheidet, der Exponent $\tau - 1$ successive höchstens gleich 0, 1, bis $\lambda - 1$ wird. Die Functionen $\varphi(x-a)$ sind in dem Bezirke von $x = a$ bei $F_m = 0$, abgesehen von diesem Punkte, einwerthige und stetige analytische Functionen und die Factoren derjenigen Potenzen von $\log(x-a)$ in der $\mathfrak{a}^{\text{ten}}$ Entwickelung, in denen der Exponent $\geqq 1$ ist, sind homogene lineare Ausdrücke mit constanten Coefficienten von den Factoren der Potenzen von $\log(x-a)$ in der ersten bis $(\mathfrak{a}-1)^{\text{ten}}$ Entwickelung.

IV. Enthält $F_m = 0$ die Integrale von $\Psi_L = 0$, wo Ψ_L durch ein System (1.) bei dem Punkte $x = \infty$ normaler Differentialausdrücke gegeben ist, so wird $x = t^{-1}$ gesetzt, $F_m(y, x) = (-t^2)^m F'_m(y, t)$, $\Psi_L(y, x) = (-t^2)^L \Psi'_L(y, t)$, $F_{\alpha_k}(y, x) = (-t^2)^{\alpha_k} F'_{\alpha_k}(y, t)$ und $t^{-2(\alpha_1 + \cdots + \alpha_{k-1})} F'_{\alpha_k}(t^{2(\alpha_1 + \cdots + \alpha_{k-1})} y, t) = F''_{\alpha_k}(y, t)$. Dann ergiebt sich für $\Psi'_L(y, t)$ das System bei $t = 0$ normaler Differentialausdrücke (No. 2, IV; No. 3, III)

$$(20.) \qquad F'_{\alpha_1}(y, t) = y_1, \quad F''_{\alpha_2}(y_1, t) = y_2, \quad \ldots \quad F''_{\alpha_l}(y_{l-1}, t),$$

und es sind nun die Integrale von $\Psi'_L = 0$ bei $t = 0$ darzustellen. In die Entwickelung derselben von der Form (16.) wird $t = \frac{1}{x}$ eingesetzt, alsdann gelten diese Entwickelungen in dem Bezirke von $x = \infty$ bei $F_m = 0$.

14.

Darstellung der normalen Elementarintegrale; Differentialdeterminanten.

Die m linearunabhängigen Functionen y_1 bis y_m seien auf die Form gebracht

$$(1.)\quad y_1 = v_1,\quad y_2 = v_1\int v_2 dx,\quad \dots\quad y_m = v_1\int dx\, v_2 \dots \int v_m dx.$$

Werden diese Ausdrücke und ihre $m-1$ ersten Ableitungen in die Determinante

$$(2.)\quad \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} & \dots & \frac{dy_m}{dx} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d^{m-1}y_1}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-1}y_2}{dx^{m-1}} & \dots & \frac{d^{m-1}y_m}{dx^{m-1}} \end{vmatrix} = D$$

eingesetzt, so ergiebt sich nach einem Satze von *Hesse* (dieses Journal Bd. 54, p. 249)

$$(3.)\quad D = v_1^m v_2^{m-1} \dots v_m.$$

Sind die Grössen (1.) m linearunabhängige particuläre Integrale einer homogenen linearen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung, in welcher der Coefficient der höchsten Ableitung gleich 1, der Coefficient der $(m-1)^{\text{ten}}$ Ableitung gleich p_1 ist, so ergiebt sich nach einem Satze von *Liouville*

$$(4.)\quad D = e^{-\int p_1 dx}$$

(vgl. Abh. Bd. 87, p. 260). Bildet man mit den α ersten Grössen (1.) die Determinante (2.) für $m = \alpha$, so ist dieselbe

$$(5.)\quad D_\alpha = v_1^\alpha v_2^{\alpha-1} \dots v_\alpha.$$

Hieraus folgt

$$(6.)\quad v_1 = D_1,\quad v_2 = \frac{D_2}{D_1^2},\quad v_3 = \frac{D_1 D_3}{D_2^2},\quad \dots\quad v_m = \frac{D_{m-2} D_m}{D_{m-1}^2}$$

(*Hesse* l. c. (71.)). Bringt man die Grössen (1.) auf die Form

$$(7.)\quad \mu_1,\quad \mu_1\int \mu_1^{-1}\mu_2 dx,\quad \dots\quad \mu_1\int dx\, \mu_1^{-1}\mu_2 \int \dots \int \mu_{m-1}^{-1}\mu_m dx,$$

wo $\mu_\alpha = v_1 v_2 \dots v_\alpha$, so wird

$$(8.)\quad D_\alpha = \mu_1 \mu_2 \dots \mu_\alpha,$$

daher

$$(9.)\quad \mu_1 = D_1,\quad \mu_\alpha = \frac{D_\alpha}{D_{\alpha-1}} \qquad (\alpha = 2, \dots m).$$

(Vgl. Abh. Bd. 87, No. 7, III b)). Die Determinante (2.) von m Grössen y_1 bis y_m möge die ***Differentialdeterminante*** dieser Grössen heissen.

Um nun die Grössen $\nu_{k\mathfrak{b}}$ No. 13, (5.) vollständig darzustellen, hat man von $\bar{F}_{\alpha_k}=0$ die α_k Integrale No. 13, (4.) durch Ausdrücke der Form No. 13, (14.) zu entwickeln, aus diesen Integralen die α_k Differentialdeterminanten (2.) für $m=1$ bis α_k zu bilden und erhält $\nu_{k\mathfrak{b}}$ gemäss (9.). Die $\mathfrak{a}^{\text{te}}$ der genannten Determinanten hat gemäss (8.) eine Entwickelung der Form

$$(10.)\qquad D_{\mathfrak{a}} = (x-a)^{\sum\limits_1^{\mathfrak{a}} r_{k\mathfrak{b}}-\frac{(\mathfrak{a}-1)\mathfrak{a}}{2}}\,\Psi_{\mathfrak{a}}(x),$$

wo $\Psi_{\mathfrak{a}}(x)$ eine Entwickelung der Form $\sum\limits_0^{\infty} c_{\mathfrak{a}}(x-a)^{\mathfrak{a}}$, Mod $c_0 \gtrless 0$, hat. Nachdem daher in den Ausdruck (2.) für $m=\mathfrak{a}$ die Entwickelungen der $\mathfrak{a}$ ersten Integrale No. 13, (4.) unter der Form No. 13, (14.) eingesetzt sind, hat man die Glieder, welche $(\log(x-a))^n$, $n \geqq 1$, enthalten, wegzulassen. Es stellt sich $\Psi_{\mathfrak{a}}(x)$ dann als eine ganze rationale Function von Potenzreihen mit positiven ganzzahligen Exponenten dar, die in den Entwickelungen der Integrale von $F_{\alpha_k}=0$ enthalten sind, von Ableitungen dieser Potenzreihen und von Potenzen $(x-a)^n$, wo n ganzzahlig und positiv, mit Coefficienten, die ganze rationale Ausdrücke der Exponenten $r_{k\mathfrak{b}}$ mit rationalen Zahlcoefficienten sind. (Vgl. Abh. Bd. 87, No. 7, III b); Bd. 91, p. 110.)

Was nun die Entwickelung der Integrale No. 13, (4.) unter der Form No. 13, (14.) angeht, wenn diese Integrale zu einer Gruppe von Wurzeln ϱ_1 bis ϱ_s als Exponenten gehören (No. 1, II), die sich nur um ganze Zahlen unterscheiden und in der in No. 13, I angegebenen Reihenfolge stehen, so gilt Folgendes: Wenn in den Grössen $v_{\mathfrak{b}}$ No. 13, (3.) die $\beta \geqq \varrho_1-\varrho_s+1$ ersten Glieder entwickelt sind (zu dem Zwecke sind in dem Coefficienten von $\frac{d^{\alpha_k-l}y}{dx^{\alpha_k-l}}$ in $\bar{F}_{\alpha_k}=0$ die β ersten Glieder von $(x-a)^{-l}$ an zu entwickeln), so erhält man die β ersten Glieder von $(x-a)^0$ an in den Grössen $\chi(x-a)$ in dem Ausdrucke No. 13, (14.), der zu dem Exponenten ϱ gehört, gemäss No. 13, (11.), (12.) durch Integration der analogen β ersten Glieder in den Summanden der successive zu integrirenden Ausdrücke; und zwar verschwinden diese Glieder in dem Factor der höchsten Potenz von $\log(x-a)$, die mit von Null verschiedenem Factor in je einem solchen Ausdrucke vorkommt, nicht alle. (Abh. Bd. 83, No. 9, (21.)). Die vollständige Darstellung der Grössen $\chi(x-a)$ geht dann aus den Sätzen der folgenden Nummer hervor.

15.

Homogene lineare Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten, welchen die Factoren der Potenzen des Logarithmus in der Entwickelung der Integrale genügen.

I. Wird ein Integral der Form No. 13, (16.) in die Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten

$$(1.)\quad \frac{d^m y}{dx^m}+p_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+p_m y = F_m(y, x) = 0$$

eingesetzt, und wird alsdann nach Potenzen von $\log(x-a)$ geordnet, so muss der Coefficient jeder solchen Potenz verschwinden. Daraus ergiebt sich

$$(2.)\quad F_m((x-a)^{\varrho+c}\varphi_\tau(x-a), x) = 0,$$

$$(3.)\quad F_m((x-a)^{\varrho+c}\varphi_\alpha(x-a), x) = f_{\tau-\alpha}, \qquad (\alpha=\tau-1, \dots 1),$$

wo $f_{\tau-\alpha}$ ein homogener linearer Ausdruck von folgenden Grössen ist: $(x-a)^{\varrho+c}\varphi_{\alpha+1}$ und den Ableitungen dieser Function bis zur $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, $(x-a)^{\varrho+c}\varphi_{\alpha+2}$ und den Ableitungen bis zur $(m-2)^{\text{ten}}$ Ordnung u. s. w. bis $(x-a)^{\varrho+c}\varphi_\tau$ und den Ableitungen bis zur $(m-(\tau-\alpha))^{\text{ten}}$ Ordnung. Die Coefficienten in diesem Ausdrucke sind ganze rationale Functionen der Grössen p_1 bis p_{m-1} und $(x-a)^{-s}$, wo s ganzzahlig und positiv ist, mit rationalen Zahlcoefficienten und werden daher rationale Functionen von x. (S. die Abh. des Herrn *Fuchs* Bd. 68, No. 1, II).

Die Gleichungen (2.) und (3.) werden angewandt, um direct für die Function $(x-a)^{\varrho+c}\varphi_k(x-a)$, ohne dass über die Functionen $(x-a)^{\varrho+c}\varphi_\alpha(x-a)$ $(\alpha=\tau, \dots 1)$ irgend etwas bekannt ist, eine homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1 herzuleiten, welche alsdann zur weiteren Untersuchung der Function $(x-a)^{\varrho+c}\varphi_k(x-a)$ gebraucht wird. Hierzu dient der Satz, dass, wenn y_1 ein Integral einer homogenen linearen Differentialgleichung $F^{(1)}=0$ und y_2 ein Integral einer homogenen linearen Differentialgleichung $F^{(2)}=0$ ist, alsdann die Summe y_1+y_2 ein Integral derjenigen homogenen linearen Differentialgleichung ist, welche die linearunabhängigen Integrale von $F^{(1)}=0$ und $F^{(2)}=0$ vereinigt enthält und welche man nach No. 7, I und II bildet.

Es wird noch das Verfahren angewandt, aus der homogenen linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1 $\Phi_n(y, x)=0$ diejenige herzuleiten, welcher die s^{ten} Ableitungen der Integrale und nur diese genügen. Man erhält eine

Differentialgleichung, welcher die ersten Ableitungen der Integrale von $\Phi_n = 0$ und nur diese genügen, indem man in $\Phi_n = 0$, wenn der Coefficient von y von Null verschieden ist, durch denselben dividirt, alsdann differentiirt und in diesem Falle, so wie wenn der Coefficient von y verschwindet, $\frac{dy}{dx} = y_1$ setzt. In derselben Weise ist dann weiter fortzufahren (vgl. die Abhandlung des Herrn *Fuchs* Bd. 68 dieses Journals, p. 383). In der erhaltenen Differentialgleichung wird der Coefficient der höchsten Ableitung gleich 1 gesetzt; die höchste Ableitung kann auch nullter Ordnung sein, so dass die Differentialgleichung $y_s = 0$ wird. Ist ferner $R(x)$ eine rationale Function, so erhält man aus $\Phi_n(y, x) = 0$ eine Differentialgleichung, welcher $R(x)y = y'$ genügt, $R(x)\Phi_n[(R(x))^{-1}y', x] = 0$ mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1.

II. *A*) Setzt man nun in (3.) $\mathfrak{a} = \tau - 1$, so werden vermittelst der Differentialgleichung (2.) nach dem Vorhergehenden die homogenen linearen Differentialgleichungen für die Summanden in f_1 aufgestellt, und durch successive Vereinigung der Integrale derselben in einer Differentialgleichung wird die Differentialgleichung für f_1 hergeleitet; dieselbe enthält rationale Coefficienten und den Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1. Wird in diese Differentialgleichung für f_1 der in (3.) links stehende Ausdruck eingesetzt, so erhält man für $(x-a)^{\varrho+c}\varphi_{\tau-1}$ eine homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1.

Nun kann man vermittelst dieser Differentialgleichung und der Differentialgleichung (2.) in derselben Weise aus (3.) für $\mathfrak{a} = \tau - 2$ die Differentialgleichung für $(x-a)^{\varrho+c}\varphi_{\tau-2}$ herleiten; u. s. w. Es ist hierbei über die Beschaffenheit der Grössen $(x-a)^{\varrho+c}\varphi_{\mathfrak{a}}$ $(\mathfrak{a} = \tau, \dots 1)$ in dem Integrale der Form No. 13, (16.) von $F_m = 0$ nichts vorausgesetzt, so dass auch irgend welche derselben, darunter $(x-a)^{\varrho+c}\varphi_\tau$ verschwinden dürfen. (Abh. Bd. 87, No. 7, I *A*)).

B) $F_m(y, x)$ sei ein Differentialausdruck, wie der in No. 13, (1.). Unter den in No. 13, III betrachteten Gruppen von Integralen von $F_m = 0$, in deren Entwickelungen sich die Potenzen von $x-a$ nur um ganze Zahlen unterscheiden, enthalte diejenige, in welcher die grösste Anzahl von Integralen vorkommt, q derselben. Setzt man τ in (2.), (3.) gleich q und bildet nun nach *A*) die Differentialgleichung für $(x-a)^{\varrho+c}\varphi_1$, so sei dieselbe

durch $S(y, x)$ bezeichnet. Dann genügen dieser Differentialgleichung die Factoren von $(\log(x-a))^{\nu}$ in den Integralen jeder Gruppe, und da sich als homogene lineare Ausdrücke dieser Factoren mit constanten Coefficienten nach No. 13, III alle Factoren der Potenzen von $\log(x-a)$ einer Gruppe darstellen, so genügen $S=0$ alle Factoren der Potenzen von $\log(x-a)$. Kennt man von $F_m = 0$ die höchste Potenz des $\log(x-a)$, die in den Entwickelungen bei $x=a$ thatsächlich vorkommt, und ist dieses die l^{te}, so kann man in (2.), (3.) $\tau = l$ setzen und die Differentialgleichung für $(x-a)^{\varrho+\mathfrak{c}}\varphi_1$ herleiten $T(y, x) = 0$; derselben genügen dann ebenfalls alle Factoren der Potenzen von $\log(x-a)$. (Abh. Bd. 87, No. 7, I *B*) etc.).

C) Ist in $F_m = 0$ (1.) der charakteristische Index bei $x=a$ gleich Null, so dass die Integrale von $F_m = 0$ bei $x=a$ regulär sind, so ist dieses auch der Fall bei den Differentialgleichungen, welche die Ableitungen enthalten. Daher enthält die Differentialgleichung für f_1 auch nur reguläre Integrale und in der nach *A*) gebildeten Differentialgleichung für $(x-a)^{\varrho+\mathfrak{c}}\varphi_{\tau-1}$ ist der charakteristische Index bei $x=a$ gleich Null (No. 2, II *A*)). Dasselbe findet demnach allgemein statt für die nach *A*) hergeleiteten Differentialgleichungen für $(x-a)^{\varrho+\mathfrak{c}}\varphi_{\mathfrak{a}}$ ($\mathfrak{a} = \tau-1, \dots 1$). (Abh. Bd. 87, No. 7, I *C*)).

D) Wenn in (1.) die Coefficienten p in einem um den Punkt $x=a$ als Mittelpunkt geschlagenen Kreise, abgesehen von $x=a$, beliebige einwerthige und stetige analytische Functionen von x sind, so gelten auch die vorigen Betrachtungen. Die Coefficienten der Differentialgleichungen des Satzes *A*) setzen sich rational mit rationalen Zahlcoefficienten aus den p, ihren Ableitungen und $(x-a)^{\mathfrak{b}}$, $\mathfrak{b}$ ganzzahlig, zusammen. Nur kann die Herleitung dieser Differentialgleichungen auf Schwierigkeiten führen, die bei rationalen p im Allgemeinen nicht bestehen, indem nämlich diese Herleitung zu beurtheilen erfordert, ob ganze rationale Functionen der vorhin genannten Grössen identisch verschwinden. (Abh. Bd. 87, No. 7, I *D*)).

III. *A*) Wenn eine homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten mit dem gemeinschaftlichen Nenner der Coefficienten multiplicirt wird, so ergiebt sich aus der Differentialgleichung für die Coefficienten in einer Entwickelung $\sum_{0}^{\infty} c_{\mathfrak{a}}(x-a)^{\varrho+\mathfrak{a}} + \sum_{-1}^{-\infty} c_{\mathfrak{a}}(x-a)^{\varrho+\mathfrak{a}}$, die der Differentialgleichung genügen soll, eine Recursionsformel mit constanter Anzahl der Glieder. Diese Glieder können nicht alle identisch verschwinden, weil, wenn die Ordnung der Differentialgleichung M ist, die Potenz $\mathfrak{a}^M$ nicht aus

der Recursionsformel ausfallen kann. Es bleibt demnach eine endliche Anzahl Coefficienten zu bestimmen, worauf die übrigen die Recursionsformel liefert. Ist also eine Differentialgleichung des Satzes II A), welcher $(x-a)^{\varrho+c}\varphi_k$ genügt, hergestellt, so erhält man aus derselben eine solche Recursionsformel für die Coefficienten in der Entwickelung von φ_k.

B) Bei der in No. 14 betrachteten Differentialgleichung $\bar{F}_{a_k}=0$ ist der charakteristische Index bei $x=a$ gleich Null, daher ist dieses auch der Fall (II C)) bei der Differentialgleichung $S=0$ oder $T=0$, die nach II B) aus $\bar{F}_{a_k}=0$ hergeleitet wird, welcher die Functionen $(x-a)^{\varrho}\chi$ in der Entwickelung der Integrale von $\bar{F}_{a_k}=0$ No. 13, (14.) genügen. Man kann nun in χ nach No. 14 beliebig viele Coefficienten bestimmen und erhält aus $S=0$ oder $T=0$ eine Recursionsformel zur Bestimmung der übrigen (III A)). Zugleich wird diese Differentialgleichung, da sie bei $x=a$ den charakteristischen Index gleich Null hat, zur weiteren Untersuchung der Functionen χ angewandt (No. 18.). (Vgl. Abh. Bd. 87, No. 7, II, wo untersucht ist, welche Integrale der Form $(x-a)^{\varrho+c}\sum_0^{\infty} c_\alpha(x-a)^\alpha$, c ganzzahlig, diese Differentialgleichung erfüllen.)

16.

Darstellung der Factoren der Potenzen des Logarithmus in der Entwickelung der Integrale durch bestimmte Integrale.

I. Gemäss No. 13, (10.) ist die Darstellung der Integralfunction

$$(1.)\qquad \int (x-a)^r\psi(x-a)(\log(x-a))^n dx$$

zu geben, wo $\psi(x-a)$ eine Entwickelung der Form $\sum_0^{\infty} c_\alpha(x-a)^\alpha+\sum_{-1}^{-\infty} c_\alpha(x-a)^\alpha$ hat, n ganzzahlig $\geqq 0$ ist.

A) Der Exponent r in (1.) sei nicht ganzzahlig.

Die Integralfunction

$$(2.)\qquad \int (x-a)^r\psi(x-a)dx,$$

in deren Entwickelung die Integrationsconstante annullirt werden soll, wird in folgender Weise durch ein bestimmtes Integral dargestellt. Ein Integral, erstreckt über die Peripherie eines Kreises um den Nullpunkt der Constructionsebene als Mittelpunkt mit dem Radius 1 von 1 an in positiver Richtung (von +1 nach $+i$ hin) bis zu 1 zurück, werde durch $\int_1^{(1)}$ bezeichnet.

Dann ist, wenn der Anfangswerth von $\log\alpha$ für $\alpha = 1$ gleich Null genommen wird und $\mathfrak{a}$ ganzzahlig ist,

$$(3.)\qquad \frac{1}{e^{2\pi i r}-1}\int_1^{\prime}\alpha^{r+\mathfrak{a}}d\alpha = \frac{1}{e^{2\pi i r}-1}\int_1^{\prime}e^{(r+\mathfrak{a})\log\alpha}d\alpha = \frac{1}{r+\mathfrak{a}+1},$$

$$(4.)\qquad \sum_0^{\infty}\frac{c_{\mathfrak{a}}(x-a)^{r+\mathfrak{a}+1}}{r+\mathfrak{a}+1}+\sum_{-1}^{-\infty}\frac{c_{\mathfrak{a}}(x-a)^{r+\mathfrak{a}+1}}{r+\mathfrak{a}+1} = \frac{(x-a)^{r+1}}{e^{2\pi i r}-1}\int_1^{\prime}\psi((x-a)\alpha)\alpha^r d\alpha.$$

Die Integration in den einzelnen Gliedern der Potenzreihen ist gestattet, weil die Reihen für Werthe x innerhalb eines Kreises um $x = a$ (abgesehen von $x = a$) und die in Betracht kommenden Werthe α in gleichem Grade convergiren. (Ueber die Convergenz in gleichem Grade vgl. Abh. Bd. 87, No. 4, Anfang).

Wird nun

$$(5.)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_1^{\prime}\frac{d\alpha_1}{e^{2\pi i r}-1}\,\alpha_1^r\,\psi((x-a)\alpha_1) = U_1(x-a), \\ \displaystyle\int_1^{\prime}\frac{d\alpha_2}{e^{2\pi i r}-1}\,\alpha_2^r\,U_1((x-a)\alpha_2) = U_2(x-a), \\ \displaystyle\int_1^{\prime}\frac{d\alpha_3}{e^{2\pi i r}-1}\,\alpha_3^r\,U_2((x-a)\alpha_3) = U_3(x-a)\ \text{etc.} \end{cases}$$

gesetzt, so ergiebt sich durch Anwendung von Formel No. 13, (11.) für die Function (1.) die Darstellung

$$(6.)\qquad \begin{cases} (x-a)^{r+1}\{U_1(x-a)(\log(x-a))^n - n\,U_2(x-a)(\log(x-a))^{n-1} \\ +n(n-1)U_3(x-a)(\log(x-a))^{n-2}-\cdots+(-1)^n n(n-1)\dots 1\,U_{n+1}(x-a)\}. \end{cases}$$

In den bestimmten Integralen kann dann die Function $\psi(x-a)$ eine andere Darstellung als durch Reihenentwickelung erhalten. (Abh. Bd. 87, No. 7, III; Bd. 91, No. 1; Bd. 95, No. 1).

B) Der Exponent r in (1.) sei ganzzahlig.

$(x-a)^r\psi(x-a)$ sei gleich $\Psi(x-a)$ gesetzt,

$$\Psi(x-a) = \sum_0^{\infty}k_{\mathfrak{a}}(x-a)^{\mathfrak{a}}+\sum_{-1}^{-\infty}k_{\mathfrak{a}}(x-a)^{\mathfrak{a}} = \frac{k_{-1}}{x-a}+\xi(x-a).$$

k_{-1} wird gegeben durch

$$(7.)\qquad k_{-1} = \frac{R}{2\pi i}\int_1^{\prime}\Psi(R\lambda)d\lambda,$$

wo der Radius R einem Kreise um $x = a$ als Mittelpunkt innerhalb des Kreises für die Entwickelung von Ψ angehört. Es ist nun die Integralfunction

$$(8.)\qquad \int^x\xi(x-a)dx$$

darzustellen, in deren Entwickelung die Integrationsconstante annullirt wird. Der Anfangswerth von $\log\beta$ für $\beta = 1$ werde gleich Null genommen. Dann ist für positive ganzzahlige Werthe $\mathfrak{a}$, Null einbegriffen:

$$(9.)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_1^{'}\left(\frac{\log\beta}{2\pi i}\right)^{\mathfrak{a}}\frac{d\beta}{\beta} = \frac{1}{\mathfrak{a}+1}.$$

Es werde

$$(10.)\qquad \begin{cases} \sum\limits_0^{\infty} k_{\mathfrak{a}}(x-a)^{\mathfrak{a}} = \varphi(x-a), \\ \sum\limits_{-2}^{-\infty} k_{\mathfrak{a}}(x-a)^{\mathfrak{a}} = (x-a)^{-2}\chi((x-a)^{-1}) \end{cases}$$

gesetzt. Dann wird, weil die Potenzreihen $\varphi(x-a)$ und $\chi(u)$ in ihren Convergenzkreisen in gleichem Grade convergiren und $\frac{\log\beta}{2\pi i}$ von 0 bis 1 sich ändert,

$$(11.)\qquad \sum_0^{\infty}\frac{k_{\mathfrak{a}}(x-a)^{\mathfrak{a}+1}}{\mathfrak{a}+1} = \frac{x-a}{2\pi i}\int_1^{'}\varphi\left((x-a)\frac{\log\beta}{2\pi i}\right)\frac{d\beta}{\beta},$$

$$(12.)\qquad \sum_{-2}^{-\infty}\frac{k_{\mathfrak{a}}(x-a)^{\mathfrak{a}+1}}{\mathfrak{a}+1} = -\frac{(x-a)^{-1}}{2\pi i}\int_1^{'}\chi\left((x-a)^{-1}\frac{\log\beta}{2\pi i}\right)\frac{d\beta}{\beta}.$$

Es ergiebt sich ferner, wenn R' und R'' Radien von Kreisen um $x = a$ als Mittelpunkt innerhalb des Kreises für die Entwickelung von Ψ sind und $R' < R''$ ist, aus der *Cauchy-Laurent*schen Integralformel für $\Psi(x-a)$

$$(13.)\qquad \varphi(x-a) = \int_1^{'}\frac{d\lambda R''}{2\pi i}\,\frac{(R''\lambda)^{-1}}{1-(x-a)(R''\lambda)^{-1}}\,\Psi(R''\lambda),\quad \mathrm{Mod}(x-a)R''^{-1} < 1,$$

$$(14.)\qquad \chi((x-a)^{-1}) = \int_1^{'}\frac{d\lambda R'}{2\pi i}\,\frac{R'\lambda}{1-(x-a)^{-1}R'\lambda}\,\Psi(R'\lambda),\quad \mathrm{Mod}(x-a)^{-1}R' < 1.$$

Wird nun

$$(15.)\qquad \begin{cases} \int_1^{'}\frac{d\beta_1}{2\pi i\beta_1}\,\varphi\left((x-a)\frac{\log\beta_1}{2\pi i}\right) = V_1(x-a), \\ \int_1^{'}\frac{d\beta_2}{2\pi i\beta_2}\,V_1\left((x-a)\frac{\log\beta_2}{2\pi i}\right) = V_2(x-a), \\ \int_1^{'}\frac{d\beta_3}{2\pi i\beta_3}\,V_2\left((x-a)\frac{\log\beta_3}{2\pi i}\right) = V_3(x-a) \text{ etc.} \end{cases}$$

$$(16.)\qquad \begin{cases} \int_1^{'}\frac{d\beta_1}{2\pi i\beta_1}\,\chi\left((x-a)^{-1}\frac{\log\beta_1}{2\pi i}\right) = -W_1((x-a)^{-1}), \\ \int_1^{'}\frac{d\beta_2}{2\pi i\beta_2}\,W_1\left((x-a)^{-1}\frac{\log\beta_2}{2\pi i}\right) = -W_2((x-a)^{-1}), \\ \int_1^{'}\frac{d\beta_3}{2\pi i\beta_3}\,W_2\left((x-a)^{-1}\frac{\log\beta_3}{2\pi i}\right) = -W_3((x-a)^{-1}) \text{ etc.} \end{cases}$$

gesetzt, so ergiebt sich vermittelst Formel No. 13, (12.) für die Function (1.) die Darstellung:

$$(17.)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\int_1^{\prime} \dfrac{d\lambda R}{2\pi i}\,\Psi(R\lambda)(\log(x-a))^{n+1} \\ +[(x-a)V_1(x-a)+(x-a)^{-1}W_1((x-a)^{-1})](\log(x-a))^n \\ -n[(x-a)V_2(x-a)+(x-a)^{-1}W_2((x-a)^{-1})](\log(x-a))^{n-1}+\cdots \\ \cdots+(-1)^n n(n-1)\dots 1[(x-a)V_{n+1}(x-a)+(x-a)^{-1}W_{n+1}((x-a)^{-1})]. \end{cases}$$

Die Integrale V gelten für Werthe von x, bei denen $\mathrm{Mod}(x-a) < R''$ ist, die Integrale W für Werthe von x, bei denen $\mathrm{Mod}(x-a) > R'$ ist, und die Darstellung (17.) für Werthe von x, bei denen $R' < \mathrm{Mod}(x-a) < R''$ ist. In den bestimmten Integralen kann dann die Function Ψ eine andere Darstellung als durch Reihenentwickelung erhalten. (Abh. Bd. 95, No. 1).

II. Um nun vermittelst dieser Formeln die Functionen $(x-a)^{\varrho+\mathfrak{c}}\varphi(x-a)$ in No. 13, (16.) darzustellen, wird ein Kreis mit einem Radius R_0 so angenommen (s. No. 18), dass, wenn $\mathrm{Mod}(x-a) < R_0$ ist, die Functionen $\Psi_{\mathfrak{a}}(x)$ No. 14, (10.) und daher die Functionen $\psi_{k\mathfrak{b}}(x)$ No. 13, (5.) einwerthig, stetig und von Null verschieden, die Function $\chi(x-a)$ No. 13, (14.) einwerthig und stetig sind. Dann werden die Darstellungen (6.) und (17.) successive auf das Integral No. 13, (15.) angewandt. Wird der Exponent r in einem Ausdrucke (1.) ganzzahlig, so kommt Formel (17.) zur Anwendung. Die Darstellung gilt dann in einem Kreisringe um $x = a$ für $R_1' < \mathrm{Mod}(x-a) < R_1'' < R_0$. Kommt in der Folge wieder ein ganzzahliger Exponent r in der zu integrirenden Function vor, so ist zur Anwendung von (17.) ein Kreisring mit den Radien R_2' und R_2'' zu nehmen, sodass $R_1' < R_2' < R_2'' < R_1''$ ist, u. s. w. Man kann hierbei den Ausdruck (17.) mit $(x-a)^{-(r+1)}$ multipliciren und den Factor $(x-a)^{r+1}$ heraustreten lassen, wie in (6.), alsdann wird in No. 13, (16.) $\mathfrak{c} = k$. Man erhält also $\varphi_{\mathfrak{a}}(x-a)$ in No. 13, (16.) durch eine Summe von bestimmten Integralen, dieselben in endlicher Anzahl, dargestellt, und diese Darstellung gilt in einem Kreisringe um $x = a$ als Mittelpunkt. Die Integrationen in einem solchen bestimmten Integrale sind die durch $\int_1^{\prime}$ bezeichneten und die Integrationsvariabeln kommen vor wie die α in (5.), die β in $\frac{\log\beta}{2\pi i}$ in (15.), (16.), wie die λ in (7.), (13.), (14.). Jedes α führt einen Factor $\frac{\alpha^r}{e^{2\pi i r}-1}$ ein, wo r nicht ganzzahlig ist, jedes β einen Factor $\frac{1}{2\pi i\beta}$, jedes λ einen Factor $\frac{R}{2\pi i}$. Das Product dieser

Factoren sei durch A bezeichnet und das Product der übrigen unter den Integralzeichen vorkommenden Grössen durch B. Dann sei das Product AB unter die Gesammtheit der Integralzeichen gestellt. B enthält als eine Gruppe von Factoren $e^{w_k}\psi_{kb}$, $e^{-w_k}\psi_{kb}^{-1}$ aus den μ, μ^{-1}, $e^{u}\chi(x-a)$ aus No. 13, (14.), (15.) und $c(x-a)^{\mathfrak{a}}$, $\mathfrak{a}$ ganzzahlig, c eine rationale Zahl aus (6.) für $\mathfrak{a}=0$ und (17.). In Factoren dieser Gruppe ist $x-a$ mit 1 oder mit Integrationsvariabeln α multiplicirt, und ausserdem kann an Stelle von $x-a$ eine Integrationsvariable wie $R'\lambda$, $R''\lambda$ aus (7.), (13.), (14.) eintreten. Ferner kann B als eine zweite Gruppe von Factoren Grössen von der Art $\frac{(R''\lambda)^{-1}}{1-(x-a)(R''\lambda)^{-1}}$ und $\frac{R'\lambda}{1-(x-a)^{-1}R'\lambda}$ aus (13.), (14.) enthalten. In diesen Factoren steht mit $x-a$ bezüglich $(x-a)^{-1}$ multiplicirt ein Product von Variabeln $\frac{\log\beta}{2\pi i}$, sodann wie in den Factoren der ersten Gruppe mit $x-a$ multiplicirt 1 oder ein Product von Integrationsvariabeln α, und dabei kann noch an Stelle von $x-a$ eine andere Integrationsvariable $R'_{\mathfrak{c}}\lambda$, $R''_{\mathfrak{c}}\lambda$ eintreten.

III. Die Formeln (6.) und (17.) sind auch zur Darstellung der Integralfunction No. 13, (15.) anwendbar, wenn von den Grössen μ und U nur vorausgesetzt wird, dass sie in einem Kreisringe um $x=a$ als Mittelpunkt von der Form $(x-a)^{\lambda}\psi(x)$ sind und $\psi(x)$ in diesem Gebiete einwerthig, stetig und von Null verschieden ist, wie in den in der Einleitung (4.), (5.) betrachteten Integralen. Alsdann gilt auch für die Entwickelung der Form (1.), (2.) der Einleitung die Darstellung der Coefficienten, wie sie in der folgenden Nummer gegeben ist. (Vgl. Abh. Bd. 95.)

17.

Entwickelung der Factoren der Potenzen des Logarithmus in dem Ausdruck der Integrale.

Von der Entwickelung einer Function $\varphi(x-a)$ in No. 13, (16.) unter der Form $\sum_{0}^{\infty} c_{\mathfrak{a}}(x-a)^{\mathfrak{a}}+\sum_{-1}^{-\infty} c_{\mathfrak{a}}(x-a)^{\mathfrak{a}}$ (No. 13, I und II) braucht man nur eine endliche Anzahl Coefficienten zu bestimmen, alsdann liefert die übrigen eine bekannte Recursionsformel (No. 15, II B), III A)). Eine Function φ ist in einem Kreisringe um $x=a$ als Mittelpunkt durch eine Summe von bestimmten Integralen, dieselben in endlicher Anzahl, dargestellt (No. 16.). Die Entwickelung eines Summanden $f(x-a)$ unter der Form $\sum_{0}^{\infty} k_{\mathfrak{a}}(x-a)^{\mathfrak{a}}+\sum_{-1}^{-\infty} k_{\mathfrak{a}}(x-a)^{\mathfrak{a}}$ ist vorzunehmen. Der Coefficient $k_{\mathfrak{a}}$ wird durch das Integral

$$(1.)\quad k_\lambda = \int_1^{\prime\prime} \frac{d\zeta R}{2\pi i}(R\zeta)^{-\lambda-1} f(R\zeta)$$

gegeben, wo R der Radius eines Kreises um $x=a$ als Mittelpunkt in jenem Kreisringe ist. f ist durch ein bestimmtes Integral ausgedrückt, in f steht unter der Gesammtheit der Integralzeichen das in No. 16, II bezeichnete Product AB. Das Product B enthält Factoren der Form e^w, $w=\sum_1^n c_{-\lambda}(x-a)^{-\lambda}$, dieselben haben Entwickelungen der Form $1+\sum_1^\infty k_{-\lambda}(x-a)^{-\lambda}$, Factoren ψ_{kb}, ψ_{kb}^{-1} (No. 13, (5.)) aus den μ und μ^{-1}, χ (No. 13, (14.)) mit Entwickelungen der Form $\sum_0^\infty k_\lambda (x-a)^\lambda$, Factoren $c(x-a)^\alpha$, $\mathfrak{a}$ ganzzahlig, alsdann noch Factoren $\frac{(R''\lambda)^{-1}}{1-(x-a)(R''\lambda)^{-1}}$, $\frac{R'\lambda}{1-(x-a)^{-1}R'\lambda}$, deren Entwickelungen

$$(2.)\quad (R''\lambda)^{-1}\sum_0^\infty (x-a)^\lambda (R''\lambda)^{-\lambda},\quad R'\lambda\sum_0^\infty (x-a)^{-\lambda}(R'\lambda)^\lambda$$

sind. Diese Entwickelungen convergiren in ihren Convergenzgebieten unbedingt, d. h. die Reihen der Moduln convergiren. Nachdem an Stelle von $x-a$ bezüglich $(x-a)^{-1}$ die in No. 16, II bezeichneten Variabeln eingesetzt sind, sei eine solche Entwickelung durch S bezeichnet. Enthält eine Reihe S noch $x-a$, so tritt in (1.) $R\zeta$ an Stelle von $x-a$. Es ist

$$\text{Mod}\,\alpha = \text{Mod}\,\lambda = \text{Mod}\,\zeta = 1 \quad \text{und} \quad \frac{\log\beta}{2\pi i} \lesssim 1.$$

Da die an Stelle von $x-a$ tretenden Grössen $R'_\lambda\lambda'$, $R''_\lambda\lambda$, $R\zeta$ im Convergenzgebiete der Reihe liegen, so convergirt eine Reihe S noch, wenn die Coefficienten durch ihre Moduln ersetzt sind, und 1 an Stelle von α, $\frac{\log\beta}{2\pi i}$, λ, ζ tritt. Eine solche Reihe sei durch S_1 bezeichnet. Die Reihen S seien mit einander multiplicirt nach dem Schema, in welchem die Stellenzeiger der Glieder positiv genommen werden. Das Product sei die Reihe T. In derselben Weise seien die Reihen S_1 mit einander multiplicirt, deren Product sei T_1. Es steht nun unter der Gesammtheit der Integralzeichen in (1.) die Grösse $\frac{R}{2\pi i}(R\zeta)^{-\lambda-1}AT$. Die Reihe T werde in zwei Theile getheilt $T'+T''$, wo T' die Glieder bis zu einem Stellenzeiger n, T'' die übrigen enthält. Aus der Reihe T_1 ergiebt sich, dass die Reihe T für die in Betracht kommenden Werthe der Variabeln in gleichem Grade convergirt. Es besteht also ein Stellenzeiger ν, so dass für $n>\nu$ und jene Werthe der Variabeln $\text{Mod}\left[\frac{R}{2\pi i}(R\zeta)^{-\lambda-1}AT''\right]\lesssim\delta$ bleibt, wo δ eine beliebig klein

vorgeschriebene Grösse ist. Aus $T-T'=T''$ ersieht man, dass die Integrationen an der Grösse $\frac{R}{2\pi i}(R\zeta)^{-\mathfrak{a}-1}AT''$ vollzogen werden können, und aus dem Vorhergehenden, wenn α, β, λ, ζ gleich $e^{i\theta}$ gesetzt wird, dass der Modul dieses Integrales $\leqq \delta(2\pi)^s$ ist, wenn s-mal integrirt wird. Also ist die Reihe $\frac{R}{2\pi i}(R\zeta)^{-\mathfrak{a}-1}AT$ integrirbar durch Integration in den einzelnen Gliedern. Da jedes Integral $\int_1^{\prime}\frac{(R\lambda)^{\mathfrak{a}}R\,d\lambda}{2\pi i}$, $\int_1^{\prime}\frac{(R\zeta)^{\mathfrak{a}}R\,d\zeta}{2\pi i}$ gleich Null ist, wenn $\mathfrak{a}$ von -1 verschieden, sonst gleich 1, jedes Integral

$$\int_1^{\prime\prime}\frac{\alpha^{r+\mathfrak{a}}}{e^{2\pi ir}-1}\,d\alpha = \frac{1}{r+\mathfrak{a}+1},$$

r nicht ganzzahlig, jedes Integral $\int_1^{\prime\prime}\left(\frac{\log\beta}{2\pi i}\right)^{\mathfrak{a}}\frac{d\beta}{2\pi i\beta} = \frac{1}{\mathfrak{a}+1}$, $\mathfrak{a}$ ganzzahlig und $\geqq 0$, so werden die einzelnen Glieder in der integrirten Reihe unabhängig von den Radien $R'_{\mathfrak{a}}$, $R''_{\mathfrak{a}}$, R in der Darstellung von f durch die Formeln aus No. 16 und in (1.) und ergeben sich als ganze rationale Ausdrücke der Constanten in den Grössen (No. 13, (15.)) e^{w}, e^{u}, $\psi_{k\mathfrak{b}}$, $\psi_{k\mathfrak{b}}^{-1}$, χ und $\frac{1}{\varrho-r_{k\mathfrak{b}}+\mathfrak{a}}$, wenn $\varrho-r_{k\mathfrak{b}}$ nicht ganzzahlig, $\mathfrak{a}$ ganzzahlig ist, mit rationalen Zahlcoefficienten; man braucht daher, um diese Glieder aufzustellen, auch den Radius R_0 aus No. 16, II nicht vorher zu bestimmen. Eine einfach unendliche Reihe dieser Ausdrücke stellt den Coefficienten $k_{\mathfrak{a}}$ (1.) dar. Einen beliebig angenäherten Werth von $k_{\mathfrak{a}}$, sowie den vorhin genannten Stellenzeiger ν in der Reihe T kann man nach den Angaben der folgenden Nummer bestimmen. Eine Summe von Grössen $k_{\mathfrak{a}}$ in endlicher Anzahl giebt den Coefficienten $c_{\mathfrak{a}}$ in der Entwickelung von $\varphi(x-a)$. (Abh. Bd. 95, No. 2).

18.

Berechnung der in der vorigen Nummer betrachteten Functionen mit vorgeschriebener Annäherung.

I. Ein bestimmtes Integral $f(x-a)$ aus der Summe derjenigen, welche nach No. 16 eine Function φ No. 13, (16.) in einem Kreisringe um $x=a$ darstellen, enthält unter der Gesammtheit der Integralzeichen das in No. 16, II genannte Product AB, wo B ein Product von den Reihen S ist, die in No. 17 angegeben sind, dieselben seien in der Anzahl g vorhanden. Jede dieser Reihen $S_{(\mathfrak{a})}$ sei in zwei Theile getheilt $S'_{(\mathfrak{a})}+S''_{(\mathfrak{a})}$, wo $S'_{(\mathfrak{a})}$ die Glieder bis zu einem gewissen Stellenzeiger enthält. Dann wird $B=B'+B''$

gesetzt, wo $B' = S'_{(1)} S'_{(2)} \dots S'_{(g)}$ ist. Für die in Betracht kommenden Werthe der Integrationsvariabeln und für die Werthe x in einem Kreisringe um $x = a$ als Mittelpunkt innerhalb des Kreisringes, in welchem die Darstellung von $f(x-a)$ gilt, sei $\text{Mod}\, S_{(\alpha)} \leqq M_{(\alpha)}$, $\text{Mod}\, S''_{(\alpha)} \leqq \varepsilon_{(\alpha)}$, so ist $\text{Mod}\, S'_{(\alpha)} \leqq M_{(\alpha)} + \varepsilon_{(\alpha)}$. Wenn man daher die $\varepsilon_{(\alpha)}$ hinreichend klein nimmt, so wird $\text{Mod}\, B''$ kleiner als eine vorgeschriebene Grösse. Das Integral in Bezug auf den Ausdruck $AB - AB' = AB''$ kann daher auch dem Modul nach kleiner als eine vorgeschriebene Grösse gemacht werden (vgl. No. 17). Die Integration an AB' vollzogen liefert eine ganze rationale Function von $x-a$ und $(x-a)^{-1}$ mit Coefficienten, die ganze rationale Ausdrücke der am Schlusse der vorigen Nummer genannten Constanten sind. Diese Function sei $f'(x-a)$, und es sei $f(x-a) - f'(x-a) = f''(x-a)$. Durch Addition von Functionen f ergiebt sich eine Function $\varphi(x-a)$ (No. 13, (16.)). Die Summe der in diesen Grössen f vorkommenden f' sei durch φ' bezeichnet, die Summe der f'' durch φ''. Die Function φ' ist dann eine ganze rationale Function von $x-a$ und $(x-a)^{-1}$ mit Coefficienten, die ganze rationale Ausdrücke gegebener Constanten sind. Es ist in einem Kreisringe um $x = a$ als Mittelpunkt $\text{Mod}\, \varphi \leqq C$, $\text{Mod}\, \varphi'' \leqq \varkappa$, $\text{Mod}\, \varphi' \leqq C + \varkappa$, wo gemäss den Voraussetzungen ein Werth von C bekannt wird, $\varkappa$ kleiner als eine vorgeschriebene Grösse gemacht werden kann.

Wenn bei einer Entwickelung

$$(1.) \qquad \sum_{0}^{\infty} c_\alpha \xi^\alpha + \sum_{-1}^{-\infty} c_\alpha \xi^\alpha$$

eine positive Grösse M bekannt ist gleich oder grösser als der Modul der Entwickelung für Werthe ξ, bei denen $R' \leqq \text{Mod}\, \xi \leqq R''$ ist, R' und R'' innerhalb des Convergenzringes liegen, $R' < R''$ ist, so ist für $R' \leqq R \leqq R''$ $\text{Mod}\, c_\alpha \leqq \frac{M}{R^\alpha}$. Daraus ergiebt sich

$$(2.) \qquad \text{Mod}\, \frac{d^l}{d\xi^l} \sum_{0}^{\infty} c_\alpha \xi^\alpha \leqq 1.2 \dots l \frac{MR''}{(R'' - R''_1)^{l+1}} \qquad \text{Mod}\, \xi \leqq R''_1 < R''.$$

$$(3.) \qquad \text{Mod}\, \frac{d^l}{d\xi^l} \sum_{-1}^{-\infty} c_\alpha \xi^\alpha \leqq 1.2 \dots l \frac{MR'}{(R'_1 - R')^{l+1}} \qquad \text{Mod}\, \xi \geqq R'_1 > R'.$$

Wird in die Summe der Ausdrücke (2.) und (3.) rechts für M gesetzt C, $\varkappa$, $C+\varkappa$, so erhält man Werthe gleich oder grösser als bezüglich $\text{Mod}\, \frac{d^l \varphi}{dx^l}$, $\text{Mod}\, \frac{d^l \varphi''}{dx^l}$, $\text{Mod}\, \frac{d^l \varphi'}{dx^l}$ in dem Kreisringe mit den Radien R'_1 und R''_1.

Eine beliebig angenäherte Berechnung einer ganzen rationalen Function der Integrale No. 13, (16.) und ihrer Differentialquotienten mit rationalen Zahlcoefficienten geschieht nun dadurch, dass $\varphi = \varphi' + \varphi''$ gesetzt wird, und der Theil des Ausdruckes berechnet wird, in welchem φ' an Stelle von φ steht, während der übrige Theil des Ausdruckes in einem Kreisringe um $x = a$ nach dem Vorhergehenden dem Modul nach beliebig klein gemacht werden kann. In derselben Weise kann man den Coefficienten k_α No. 17, (1.) beliebig angenähert berechnen, und den in No. 17 genannten Stellenzeiger ν in der Reihe T bestimmen. (Abh. Bd. 91, No. 3; Bd. 95, No. 3).

II. Es bleibt also zu zeigen, wie man von einer Reihe S in I eine Grösse M ermittelt, so dass $\operatorname{Mod} S \leqq M$, und wie man $S = S' + S''$ setzen kann, so dass $\operatorname{Mod} S'' \leqq \varepsilon$, wo ε eine beliebig klein vorgeschriebene Grösse ist. Man erhält aus (1.) und $\operatorname{Mod} c_\alpha \leqq \frac{M}{R^\alpha}$

$$(4.)\qquad \operatorname{Mod} \sum_n^{\infty} c_\alpha \xi^\alpha \leqq \left(\frac{R_1''}{R''}\right)^n \frac{M}{1 - \frac{R_1''}{R''}} \qquad \operatorname{Mod} \xi \leqq R_1'' < R'',$$

$$(5.)\qquad \operatorname{Mod} \sum_{-n}^{-\infty} c_\alpha \xi^\alpha \leqq \left(\frac{R'}{R_1'}\right)^n \frac{M}{1 - \frac{R'}{R_1'}} \qquad \operatorname{Mod} \xi \geqq R_1' > R'.$$

Die Grössen rechts können, wenn M bekannt ist, durch hinreichende Vergrösserung von n beliebig klein gemacht werden; es bleibt also M zu bestimmen. In dieser Beziehung sind die Grössen ψ_{kb}, ψ_{kb}^{-1}, $\chi_\alpha(x-a)$ No. 13, (5.), (14.) zu betrachten, was darauf hinauskommt, die Ausdrücke $\Psi_\alpha(x)$ und $(\Psi_\alpha(x))^{-1}$ No. 14, (10.) zu untersuchen, da man von den übrigen Grössen S einen Werth M unmittelbar erhält. Die Untersuchung von $(\Psi_\alpha(x))^{-1}$ besteht darin, von $\Psi_\alpha(x)$, bei welchem $\operatorname{Mod} \Psi_\alpha(a) \gtrless 0$ ist, eine positive Grösse K zu ermitteln, so dass $\operatorname{Mod} \Psi_\alpha(x) > K$, wenn $\operatorname{Mod}(x-a) \leqq r$ ist. $\Psi_\alpha(x) = \Psi_\alpha(a) + (x-a)\Psi_\alpha^{(1)}(x-a)$. $\operatorname{Mod} \Psi_\alpha^{(1)}$ sei $< K'$ für $\operatorname{Mod}(x-a) \leqq r'$, und es sei $\operatorname{Mod} \Psi_\alpha(a) - rK' > 0$ für $r \leqq r'$, so ist $\operatorname{Mod} \Psi_\alpha(x) \geqq \operatorname{Mod} \Psi_\alpha(a) - rK'$ für $\operatorname{Mod}(x-a) \leqq r$. Das weitere Verfahren kommt nun unter Benutzung der Relation (2.) und der Relation (4.) für $n = 1$ darauf hinaus, für Functionen der Art wie die χ No. 13, (14.) in der Entwickelung der Integrale einer Differentialgleichung, deren Differentialausdruck bei dem Punkt a regulär ist (No. 9) eine Grösse $M \geqq \operatorname{Mod} \chi$ für $\operatorname{Mod}(x-a) \leqq L$ zu bestimmen. (Abh. Bd. 91, No. 3, III, p. 110—114.) Eine solche Function $\chi = \sum_0^\infty c_\alpha (x-a)^\alpha$ genügt selbst einer Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten und

dem charakteristischen Index bei $x = a$ gleich Null, die man aufstellen kann (No. 15, II *B, C*)). Dieselbe sei

$$(6.)\qquad \frac{d^s u}{dx^s} + P_1 \frac{d^{s-1} u}{dx^{s-1}} + \cdots + P_s u = 0.$$

Es werde

$$(7.)\qquad P_\alpha (x-a)^\alpha = Q_\alpha(a) + (x-a) Q_\alpha^{(1)}(x)$$

gesetzt. Nun sei M_0 eine reelle Grösse > 0, gleich oder grösser als die Moduln der rationalen Functionen $Q'_\alpha(x)$ $(\alpha = 1, \dots s)$ für Werthe x auf einem Kreise um $x = a$ als Mittelpunkt mit dem Radius R, der kleiner ist als der des Bezirkes von $x = a$ in der Differentialgleichung (6.). Dann ergiebt sich aus (6.)

$$(8.)\qquad \operatorname{Mod}\Big\{\sum_0^\infty c_\lambda (x-a)^\lambda\Big\} \leqq g_0 \Big(1 - \frac{R'}{R}\Big)^{-\left(1 + \frac{M_0 R}{\gamma}\right)}$$

für $\operatorname{Mod}(x-a) \leqq R' < R$. g_0 ist eine positive Grösse, die aus der Relation $g_0 \mathfrak{B}_\lambda \geqq \operatorname{Mod} c_\lambda$ $(\lambda = 0, \dots k'-1)$ hervorgeht, wo die Zahl k' und die positiven Grössen $\mathfrak{B}_\lambda$ sich ohne Weiteres bestimmen lassen, γ eine reelle Grösse, so dass $0 < \gamma < 1$ ist. (Abh. Bd. 91, No. 3, II.)

19.

Fortsetzung der Integrale durch Umgang um einen singulären Punkt.

In No. 13, II ist die Form des Resultates des in den Integralen vollzogenen Umganges um den Punkt $x = a$ gegeben (der Umgang ist in positiver Richtung vorgenommen, bei dem Umgange in negativer Richtung ist das Verfahren dasselbe). Die Constante c in No. 13, (17.) wird dadurch bestimmt, dass in der Entwickelung des Ausdruckes $\int Y dx$ der Umgang vorgenommen und das constante Glied ermittelt wird. Man erhält aus No. 13, (13.)

$$(1.)\qquad \Big[\int \nu_{\mathfrak{c}-1}^{-1} \nu_{\mathfrak{c}} dx\Big] = e^{2\pi i (r_{\mathfrak{c}} - r_{\mathfrak{c}-1} - 1)} \int \nu_{\mathfrak{c}-1}^{-1} \nu_{\mathfrak{c}} dx + k_1,$$

$$(2.)\qquad \begin{cases} \Big[\int dx \nu_{\mathfrak{c}-2}^{-1} \nu_{\mathfrak{c}-1} \int \nu_{\mathfrak{c}-1}^{-1} \nu_{\mathfrak{c}} dx\Big] = e^{2\pi i (r_{\mathfrak{c}} - r_{\mathfrak{c}-2} - 2)} \int dx \nu_{\mathfrak{c}-2}^{-1} \nu_{\mathfrak{c}-1} \int \nu_{\mathfrak{c}-1}^{-1} \nu_{\mathfrak{c}} dx \\ \qquad\qquad + k_1 e^{2\pi i (r_{\mathfrak{c}-1} - r_{\mathfrak{c}-2} - 1)} \int \nu_{\mathfrak{c}-2}^{-1} \nu_{\mathfrak{c}-1} dx + k_2, \text{ etc.} \end{cases}$$

Aus den Integralen, in deren Entwickelungen die Exponenten ganzzahlig sind, ergeben sich die Constanten in No. 13, (18.) unter der Form

$$(3.)\qquad c_\lambda = \sum_1^\lambda (2\pi i)^{\mathfrak{k}} g_{\mathfrak{k}},$$

wo die Grössen $g_{\mathfrak{b}}$ rationale Ausdrücke der Constanten in den ν, ν^{-1} mit rationalen Zahlcoefficienten sind. Man bestimmt die Grössen g, indem man in den Entwickelungen eine Anzahl Glieder bestimmt, in der Weise wie am Schlusse von No. 14 angegeben ist.

Um nun die übrigen Constanten in No. 13, (19.) zu bestimmen, ist dasselbe Verfahren auf das Integral No. 13, (15.) anzuwenden. Ein in diesem Integralausdrucke enthaltenes Integral wie $\int dx \mu_{\mathfrak{b}-1}^{-1} \mu_{\mathfrak{b}} \int \dots \int \mu_k^{-1} U dx$, in dessen Entwickelung die Exponenten ganzzahlig sind, aus welchem der Coefficient $c_{q-1+\mathfrak{a}}$ hervorgeht, ist nach No. 16 durch eine Summe von Ausdrücken wie No. 16, (17.) für $n = 0$ bis $n = s+\mathfrak{a}-1$ dargestellt, wenn s der höchste Exponent von $\log(x-a)$ in dem Ausdrucke von U ist. Wird in einem Ausdrucke der Form No. 16, (17.) der Umgang um $x = a$ vollzogen, so ergiebt sich als constantes Glied in der Entwickelung $\frac{(2\pi i)^{n+1}}{n+1} \int_1^{1'} \frac{d\lambda R}{2\pi i} \Psi(R\lambda)$. In dieser Grösse sei Ψ durch Ψ_n bezeichnet. Man erhält dann

$$(4.) \qquad c_{q-1+\mathfrak{a}} = \sum_{n=0}^{n=s+\mathfrak{a}-1} \frac{(2\pi i)^{n+1}}{n+1} \int_1^{1'} \frac{d\lambda R}{2\pi i} \Psi_n(R\lambda).$$

Jedes Integral in diesem Ausdrucke wird nach No. 17 entwickelt durch eine Reihe ganzer rationaler Ausdrücke gegebener Constanten und kann nach der vorigen Nummer mit beliebig vorgeschriebener Annäherung berechnet werden. (Vgl. Abh. Bd. 95, No. 4, I.)

20.

Fortsetzung der Integrale durch Uebergang von einem singulären Punkt zu einem anderen und allgemeine Fortsetzung.

I. *A*) Um bei der Differentialgleichung $F_m(y, x) = 0$ die Fortsetzung der Integrale darzustellen, wird nach Abh. Bd. 87 das Verfahren angewandt: Wenn zwei singuläre Punkte der Differentialgleichung $x = a$ und $x = b$ irgendwie in dem von einem Kreise begrenzten Gebiete liegen, welches auch den Punkt $x = \infty$ enthalten darf, ausserhalb welches die übrigen singulären Punkte sich finden, alsdann durch Vermittelung einer rationalen Substitution ersten Grades die Integrale bei dem einen Punkte durch die bei dem anderen auszudrücken. Wird ein Kreis von dieser Eigenschaft durch den Punkt b gelegt, liegt das von demselben begrenzte Gebiet im Endlichen, a innerhalb desselben und ist c der Mittelpunkt, so

wird dieser Kreis conform auf den Kreis in der ξ-Ebene um $\xi = 0$ als Mittelpunkt mit dem Radius 1 abgebildet, so dass dem Punkte $x = a$ der Punkt $\xi = 0$, dem Punkte $x = b$ der Punkt $\xi = 1$ entspricht. Dieses geschieht durch die Substitution

$$(1.)\qquad x = c+(b-c)\frac{\frac{1-d}{1-d'}\xi+d}{\frac{1-d}{1-d'}d'\xi+1},$$

$d = \frac{a-c}{b-c}$, d' der conjugirte Ausdruck zu d. Liegt der Punkt $x = \infty$ in dem betrachteten Gebiete, so ist $x = x_1+\frac{1}{t'}$ zu setzen, wo x_1 ein Punkt im Innern des Kreises ist, worauf die den Punkten $x = a$ und $x = b$ entsprechenden Punkte t' rücksichtlich der den übrigen singulären Punkten entsprechenden Punkte wieder die oben bezeichnete Lage in einem Gebiete im Endlichen haben. Bei der Substitution einer rationalen Function ersten Grades für die unabhängige Variable in einer homogenen linearen Differentialgleichung entspricht einem nichtsingulären Punkte der einen ein solcher der anderen, daher einem ausserwesentlich singulären Punkte der einen ein solcher der anderen. Also enthält die aus $F_m = 0$ hervorgehende Differentialgleichung, welche von ξ abhängt, $G_m(y, \xi) = 0$, wo

$$F_m(y, x) = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{-m} G_m(y, \xi)$$

ist, in dem Kreise um $\xi = 0$ als Mittelpunkt mit dem Radius 1, die Peripherie einbegriffen, abgesehen von den Punkten $\xi = 0$ und $\xi = 1$ keine singulären Punkte. Aus einer Differentialgleichung, in welcher ein System bei einem Punkte $x = x_0$ normaler Differentialausdrücke (No. 9) gleich Null gesetzt ist, geht durch eine rationale Substitution ersten Grades, in welcher dem Punkte $x = x_0$ der Punkt $\xi = \xi_0$ entspricht, eine Differentialgleichung mit einem Systeme bei $\xi = \xi_0$ normaler Differentialausdrücke hervor. (Vgl. Abh. Bd. 87, p. 234). Also bestehen (No. 13, III) die Entwickelungen der Integrale von $G_m(y, \xi) = 0$ unter der Form, die No. 13, (16.) entspricht, bei $\xi = 0$ in dem Kreise mit dem Radius 1, bei $\xi = 1$ in dem Bezirke dieses Punktes. Ein Integral bei $\xi = 0$ sei durch y_{0k}, ein System linearunabhängiger Integrale bei $\xi = 1$ durch $y_{1\alpha}$ ($\alpha = 1, \dots m$) bezeichnet, so erhält man

$$(2.)\qquad y_{0k} = C_{k1}y_{11}+C_{k2}y_{12}+\dots+C_{km}y_{1m},$$

wo die C Constante sind. Aus dieser Gleichung ergiebt sich durch $(m-1)$-malige Differentiation:

$$(3.)\qquad \frac{d^{\mathfrak{b}} y_{0k}}{d\xi^{\mathfrak{b}}} = C_{k1}\frac{d^{\mathfrak{b}} y_{11}}{d\xi^{\mathfrak{b}}} + C_{k2}\frac{d^{\mathfrak{b}} y_{12}}{d\xi^{\mathfrak{b}}} + \cdots + C_{km}\frac{d^{\mathfrak{b}} y_{1m}}{d\xi^{\mathfrak{b}}} \qquad (\mathfrak{b} = 1, \ldots m-1).$$

Das Gleichungssystem (2.), (3.) wird nach den Constanten C aufgelöst. Diese ergeben sich nun vermittelst der Entwickelungen der Integrale bei $\xi = 0$ und $\xi = 1$ in einem nichtsingulären Punkte in dem Gebiete, welches den Bezirken von $\xi = 0$ und $\xi = 1$ gemeinschaftlich ist, ausgedrückt. (Abh. Bd. 83, No. 3.) Die Determinante $\Sigma \pm y_{11}\frac{dy_{12}}{d\xi}\cdots\frac{d^{m-1}y_{1m}}{d\xi^{m-1}}$ verschwindet nicht in einem nichtsingulären Punkte (No. 14. (4.)). Diese Differentialdeterminante D' des Systemes der von ξ abhängenden Integrale $y_{1\mathfrak{a}}$ $(\mathfrak{a} = 1, \ldots m)$ erhält man aus der Differentialdeterminante D derselben von x abhängenden Integrale durch die Relation

$$(4.)\qquad D' = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{\frac{m(m-1)}{2}} D$$

(Abh. Bd. 87, No. 5, (10.)). D wird in No. 21 bestimmt.

Dieselben Betrachtungen bleiben, wenn einer der Punkte $x = a$, $x = b$, oder wenn jeder derselben nichtsingulär ist, und die Integrale bei dem einen durch die bei dem anderen ausgedrückt werden sollen.

Wenn $F_m(y, x) = 0$ die Integrale einer homogenen linearen Differentialgleichung L^{ter} Ordnung mit rationalen Coefficienten $\Psi_L(y, x) = 0$ enthält, deren Integrale bei $x = a$ und $x = b$ als solche von $F_m = 0$ aufgestellt sind, und nun die Integrale bei $x = a$ durch die bei $x = b$ ausgedrückt werden sollen, so tritt dieselbe Substitution ein; die Ausdrücke der Constanten, die aus dem Gleichungssysteme (2.), (3.) für $m = L$ hervorgehen, werden in einem nichtsingulären Punkte von $\Psi_L = 0$ angenommen. (Vgl. II).

B). *a*) Um die Entwickelung der Integrale von $G_m(y, \xi) = 0$ bei $\xi = 0$ und $\xi = 1$ aus den Ausdrücken der Integrale von $F_m(y, x) = 0$ bei $x = a$ und $x = b$ herzuleiten, ist in die Ausdrücke der Integrale bei einem Punkte $x = x_0$ im Endlichen gemäss *A*) eine rationale Function ersten Grades $x = R(\xi)$ einzusetzen, bei der dem Punkte $x = x_0$ der Punkt $\xi = \xi_0$ im Endlichen entspricht $\Big($wenn die Integrale bei $x = \infty$ als Functionen von $\frac{1}{x}$ dargestellt sind, so ist $\frac{1}{x} = t$, $t = (R\xi)^{-1}$, $t_0 = 0$ zu setzen$\Big)$,

$$(5.)\qquad x - x_0 = \frac{p(\xi-\xi_0)}{1-q(\xi-\xi_0)},\quad \xi - \xi_0 = \frac{\frac{1}{p}(x-x_0)}{1+\frac{q}{p}(x-x_0)}.$$

Ein Integral bei $x = x_0$ hat den Ausdruck No. 13, (16.) (wo $x - x_0$ an Stelle von $x - a$ steht), in welchem die Grössen φ durch Summen von bestimmten Integralen in einem Kreisringe um $x = x_0$ als Mittelpunkt nach No. 16 dargestellt sind. Man kann diesen Kreisring in einem Kreise um $x = x_0$ annehmen, in welchem $\operatorname{Mod} \frac{p}{q}(x - x_0) < 1$ ist. Nun ist

$$(6.) \qquad \left(1 + \frac{q}{p}(x - x_0)\right)(1 - q(\xi - \xi_0)) = 1.$$

Daher ist das diesem Kreise entsprechende Gebiet von ξ ein endliches, welches von einem Kreise, in dem ξ_0 liegt, begrenzt wird. Setzt man nun in den Ausdruck des Integrales No. 13, (16.) für $x - x_0$ die Grösse (5.) ein, so ergiebt sich ein Ausdruck der Form No. 13, (16.), der von $\xi - \xi_0$ abhängt, in welchem der Factor von $(\log(\xi - \xi_0))^{\lambda - 1}$ durch $(\xi - \xi_0)^{\varrho + \epsilon} \Phi_\lambda(\xi - \xi_0)$ bezeichnet sei. $\Phi_\lambda(\xi - \xi_0)$ ist dann dargestellt durch eine Summe von bestimmten Integralen (No. 16), in denen statt $x - x_0$ die Grösse (5.) zu setzen ist, dieselben multiplicirt mit Constanten, $(1 - q(\xi - \xi_0))^{-(\varrho + \epsilon)}$ und Potenzen von $\log(1 - q(\xi - \xi_0))$. Den Coefficienten einer Potenz von $\xi - \xi_0$ in der Entwickelung von $\Phi_\lambda(\xi - \xi_0)$ erhält man nach No. 17 durch ein bestimmtes Integral nach ξ genommen. Dasselbe kann man über einen Kreis erstrecken, der einem Kreise um $x = x_0$ als Mittelpunkt in dem angenommenen Kreisringe entspricht und alsdann wieder auf eine Integration nach x zurückführen. Man erhält nun unter Anwendung von No. 17 den gesuchten Coefficienten durch eine einfach unendliche Reihe ganzer rationaler Ausdrücke gegebener Constanten dargestellt, und kann den Werth dieses Coefficienten mit vorgeschriebener Annäherung nach No. 18 berechnen. Nachdem man in der Differentialgleichung, welcher das von x abhängende Integral genügt, die Substitution (5.) vorgenommen hat, leitet man aus dieser Differentialgleichung nach No. 15, II *B*), III *A*) eine solche her, aus welcher sich eine Recursionsformel für die Coefficienten in Φ_λ ergiebt, so dass man nur eine endliche Anzahl derselben zu bestimmen braucht (Abh. Bd. 95, No. 4, II *a*)).

b) Bei Anwendung einer rationalen Substitution ersten Grades bleiben in entsprechenden Punkten der charakteristische Index und die Exponentengleichung ungeändert und sind überhaupt die den entsprechenden fundamentalen determinirenden Factoren zugehörigen Exponentengleichungen (No. 3, III) dieselben. Der charakteristische Index in $F_m(y, x) = 0$ bei x_0 sei gleich Null, so ist dieses auch in $G_m(y, \xi) = 0$ bei ξ_0 der Fall. Dann kann man in die Ausdrücke der Integrale unter der Form No. 13, (14.) für

$x-x_0$ die Substitution (5.) einführen und die Integrale auch durch andere Integrale von $G_m(y, \xi) = 0$ bei $\xi = \xi_0$ ausdrücken, wobei die Constanten in diesen Ausdrücken rationale Functionen gegebener Constanten werden (Abh. Bd. 87, No. 2, 1).

C) Bei den Punkten $x = a$ und $x = b$ seien die Integrale von $F_m = 0$ (für die Differentialgleichung $\Psi_L(y, x) = 0$ in *A*) gelten dieselben Behauptungen) regulär, so ist dieses auch in $G_m(y, \xi) = 0$ der Fall. Die Ausdrücke für die Grössen $C_{k\alpha}$ (2.) kann man alsdann reduciren (vgl. die Abhandlung des Herrn *Fuchs* Bd. 75, p. 211, 212). In der Abhandlung des Verfassers Bd. 87, No. 3, 4, 10 ist diesen Ausdrücken die allgemeine Form gegeben $C_{k\alpha} = \lim\limits_{\xi=1} \mathfrak{P}_{k\alpha}(\xi)$, wo $\mathfrak{P}_{k\alpha}(\xi)$ eine Potenzreihe von ξ mit positiven ganzzahligen Exponenten, welche innerhalb des Kreises mit dem Radius 1 convergirt, und wo die durch $\mathfrak{P}_{k\alpha}(\xi)$ dargestellte Function noch in einem Gebiete, welches $\xi = 1$ nicht enthält, über die Peripherie dieses Kreises hinaus einwerthig und stetig bleibt, während von $\mathfrak{P}_{k\alpha}(\xi)-C_{k\alpha}$ nachgewiesen ist, dass diese Function bei $\xi = 1$ die Form der Entwickelung eines regulären Integrales hat, in welcher die reellen Theile der Exponenten von $\xi-1$ grösser als Null sind. Auf Grund dieser Eigenschaften von $\mathfrak{P}_{k\alpha}(\xi)$ ist (l. c.) bewiesen, dass $\mathfrak{P}_{k\alpha}(\xi)$ noch für $\xi = 1$ convergirt und $C_{k\alpha}$ darstellt. Zum Zwecke des Beweises ist den Gliedern der Reihe $\mathfrak{P}_{k\alpha}(\xi)$ die Form der Integrale in der *Fourier*schen Reihe gegeben, in denselben der Uebergang auf den Kreis mit dem Radius 1 vollzogen und gezeigt, dass diese Reihe für $\xi = 1$ convergirt und $C_{k\alpha}$ darstellt. Bei dieser Betrachtung kommt auch der Fall vor, dass die darzustellende Function $\varphi(\theta)$ bei $\theta = 0$ und 2π unendlich viele Maxima und Minima hat, wobei die Untersuchung auf den Nachweis, dass

$$(7.)\qquad \lim_{\delta=0} \int_{\delta}^{\text{Const.}} \operatorname{Mod}\left(\varphi(\theta)-\varphi(0)\right) \frac{d\theta}{\sin\theta}$$

einen endlichen Werth hat, gestützt ist. (Vgl. Abh. Bd. 87, No. 9; Bd. 91, p. 345; Bd. 95, No. 8.) Die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe ist als Beispiel des Verfahrens genommen. (Abh. Bd. 87, No. 8.)

II. Die Berechnung der Constanten $C_{k\alpha}$ (2.) mit vorgeschriebener Annäherung geschieht unter Anwendung von No. 18 in folgender Weise. Zunächst werden in einem Kreisringe um $x = a$ die Werthe der Integrale von $F_m(y, x) = 0$ (bezüglich $\Psi_L(y, x) = 0$) und ihrer $(m-1)$ ersten Ableitungen in einem nichtsingulären Punkte x_1 gemäss No. 18 berechnet. Diese Inte-

grale werden durch ein System bei x_1 entwickelter Integrale $y_\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a} = 1, \dots m)$ ausgedrückt, bei denen

$$(8.)\qquad \left|\frac{d^{\mathfrak{a}-1}y_\mathfrak{a}}{dx^{\mathfrak{a}-1}}\right|_{x=x_1} = 1, \quad \left|\frac{d^{\mathfrak{b}}y_\mathfrak{a}}{dx^{\mathfrak{b}}}\right|_{x=x_1} = 0, \qquad \mathfrak{b} = \begin{Bmatrix} 0, \dots \mathfrak{a}-2 \\ \mathfrak{a}, \dots m-1 \end{Bmatrix}$$

ist und umgekehrt. Entsprechend in Bezug auf die Integrale bei $x = b$ in einem nichtsingulären Punkte x_2. Dann ist das bei x_1 entwickelte System regulärer Integrale durch das bei x_2 entwickelte auszudrücken, und es sind die Constanten in diesen Ausdrücken zu berechnen. Man kann nun wegen der Voraussetzung über die Lage der Punkte a und b den Punkten x_1 und x_2 eine solche Lage geben, dass, wenn man die Substitution (1.) bei (x_1, x_2 statt a, b) angewendet hat, der Kreis um $\xi = 0$ mit dem Radius 1 keinen singulären Punkt enthält, daher die Entwickelungen bei $\xi = 0$ noch über den Kreis mit dem Radius 1 hinaus convergiren. Letzteres gilt auch in Bezug auf die Integrale von $\Psi_L(y, x) = 0$; die Differentialgleichung, welche aus $\Psi_L = 0$ durch Anwendung der Substitution (1.) hervorgeht, enthält alsdann in dem Kreise um $\xi = 0$ mit dem Radius 1 höchstens ausserwesentlich singuläre Punkte. Die Werthberechnung dieser Integrale und ihrer Ableitungen in dem Punkte $\xi = 1$ wird nun immer mittelst der Differentialgleichung $F_m(y, x) = 0$, nachdem in $F_m = 0$ diese Substitution eingeführt ist, weil alsdann in dem Kreise um $\xi = 0$ mit dem Radius 1 kein singulärer Punkt vorkommt, nach No. 18, II vollzogen. (Abh. Bd. 91, No. 4, III b)).

III. Um nun die allgemeine Fortsetzung eines Integrales von $F_m = 0$ auf vorgeschriebenem Wege von einem Punkte zu einem anderen zu vollziehen, wird durch die singulären Punkte eine in sich zurücklaufende, sich selbst nicht schneidende Linie gezogen. Innerhalb jedes der beiden durch diese Linie begrenzten Gebiete verlaufen die Integrale einwerthig und stetig. Die Entwickelungen der Integrale bei jedem singulären Punkte werden in einem dieser Gebiete angenommen. Alsdann wird in diesem Gebiete der Uebergang der Integrale von einem singulären Punkte zum nächstfolgenden vorgenommen und das Constantensystem aufgestellt, dessen Substitution auf das Integralsystem bei diesem Punkte anzuwenden ist, um das Resultat des Ueberganges auszudrücken. Dieses geschieht nach I. Zunächst wird der Fall betrachtet, wenn die beiden Punkte in dem von einem Kreise begrenzten Gebiete liegen, ausserhalb welches die übrigen singulären Punkte von $F_m = 0$ sich finden. Haben die beiden Punkte diese Lage nicht, so werden noch zwischenliegende nichtsinguläre Punkte hinzugenommen, so

dass nun je zwei auf einander folgende der bezeichneten Punkte die angegebene Lage haben. Durch Zusammensetzung von Substitutionen erhält man dann die gesuchte Substitution von Constanten. Sind $\varkappa+1$ singuläre Punkte a_λ vorhanden, so werde die Substitution der Constanten, durch welche der Uebergang von a_λ zu $a_{\lambda+1}$ vollzogen wird, durch A_λ bezeichnet, und die Substitution bei dem Uebergang in umgekehrter Richtung durch A'_λ, wo dann A'_λ die inverse Substitution von A_λ ist. Es werde die in No. 19 aufgestellte Substitution der Constanten für den Umgang um a_λ in positiver Richtung durch B_λ, in entgegengesetzter Richtung durch B'_λ bezeichnet, wo B'_λ die inverse Substitution von B_λ ist. (Bei $x=\infty$ geht der positive Umgang in der Richtung von $+1$ nach $-i$.) Der Uebergang von einem nichtsingulären Punkte zu einem singulären oder umgekehrt geschieht nach I. Die Darstellung des Resultates der Fortsetzung eines Integrales auf vorgeschriebenem Wege reducirt sich nun auf eine Zusammensetzung von Substitutionen A, A', B, B' und Anwendung der erhaltenen Substitution auf das bei einem singulären Punkte entwickelte Integralsystem. (Abh. Bd. 87, No. 6; vgl. Bd. 91, p. 345.)

Wird durch DB die Determinante der Substitution B bezeichnet, so erhält man, wenn man eine Fortsetzung in dem zweiten der beiden Gebiete der Ebene bis zu dem ursprünglichen Punkte zurück vornimmt, alsdann die Determinante der erhaltenen Substitution ausdrückt, $DB_1 DB_2 \dots DB_{\varkappa+1}=1$. Hieraus folgt (unter Anwendung von No. 13, II, III), dass die Summe der Wurzeln sämmtlicher fundamentalen Exponentengleichungen (No. 3; No. 4, III) eine ganze Zahl ist (vgl. Abh. Bd. 87, No. 6, *a*), *b*)). Bei einer Differentialgleichung mit regulärem Differentialausdrucke wird die Summe der Wurzeln der Exponentengleichungen bei $\varkappa$ singulären Punkten im Endlichen und dem singulären oder nichtsingulären Punkte im Unendlichen gleich $\frac{(\varkappa-1)m(m-1)}{2}$ (s. die Abh. des Herrn *Fuchs* Bd. 66 dieses Journals p. 145, 147). Vgl. hierbei *Riemann*: Beiträge zur Theorie der durch die *Gauss*sche Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ darstellbaren Functionen III.

21.

Aufstellung der linearunabhängigen Integrale bei den singulären Punkten. Der constante Factor in der Differentialdeterminante.

I. Der Differentialausdruck $F_m(y,x)$ bestehe nur aus einem normalen canonischen Bestandtheile (No. 10; 12, I), so kommt man, um ein System

linearunabhängiger Integrale von $F_m = 0$ bei einem singulären Punkte aufzustellen, nach No. 12, I darauf zurück, die Integrale von Differentialgleichungen mit regulären Differentialausdrücken anzugeben. Die Integrale einer solchen Differentialgleichung $\Psi = 0$ werden gemäss No. 13, (4.), (14.) dargestellt. Die Grössen χ in No. 13, (14.) werden nach No. 15, III *B*) vollständig ausgedrückt. Die Werthberechnung dieser Grössen erfolgt nach No. 18, II. Die Constanten in den linearen Verbindungen der Integrale bei dem Umgange um einen singulären Punkt ergeben sich nach No. 19, (3.), bei dem Uebergange von einem singulären Punkte von $F_m = 0$ zu einem anderen nach No. 20, I *C*), III, wobei der constante Factor in der Differentialdeterminante der Integrale von $\Psi = 0$ No. 14, (4.) aus No. 14, (8.), oder direct aus der Determinantenformel No. 14, (2.) selbst hervorgeht. Bei den Betrachtungen No. 20, I *C*), III kommt von der Differentialdeterminante D nur der constante Factor in Anwendung, bei den Werthberechnungen No. 20, II ist der Werth von D^{-1} in einem nichtsingulären Punkte bei $x = a$ zu berechnen, wozu, wenn $|p_1(x-a)|_{x=a} = R$ in No. 14, (4.) ist, die Grösse z vermittelst $\frac{dz}{dx} - \left(p_1 - \frac{R}{x-a}\right) z = 0$ nach No. 18, II berechnet wird.

II. Der Differentialausdruck $F_m(y, x)$ bestehe aus dem System mehrerer normaler canonischer Bestandtheile (No. 10; 12, II)

$$(1.)\quad F_{(1)}(y, x) = y_1, \quad F_{(2)}(y_1, x) = y_2, \quad \ldots \quad F_{(\nu)}(y_{\nu-1}, x).$$

Von der Differentialgleichung, in welcher ein solcher canonischer Bestandtheil gleich Null gesetzt ist, sind die Hauptunterdifferentialgleichungen bekannt.

A). *a*) Bei dem r^{ten} canonischen Bestandtheile werden die Differentialgleichungen aufgestellt, welche die Integrale derjenigen Hauptunterdifferentialgleichungen vereinigt enthalten, in denen der zu $x = a$ gehörende determinirende Factor (No. 9) ein und derselbe ist. Die hierdurch entstehenden Differentialgleichungen seien

$$(2.)\quad F_{r1} = 0, \quad F_{r2} = 0, \quad \ldots \quad F_{rk_r} = 0.$$

Die Differentialausdrücke $F_{r\alpha}$ ($\alpha = 1, \ldots k_r$) sind bei $x = a$ normale Differentialausdrücke mit von einander verschiedenen zu $x = a$ gehörenden determinirenden Factoren (No. 8, II *C*, *a*)). Die Differentialgleichung $F_{r\alpha} = 0$ sei von der Ordnung $\alpha_{r\alpha}$, die Integrale derselben werden gemäss No. 13, (2.) bis (7.) aufgestellt und seien durch

$$(3.)\quad \mu_1^{(r\mathfrak{a})}\int dx(\mu_1^{(r\mathfrak{a})})^{-1}\mu_2^{(r\mathfrak{a})}\int\ldots\int(\mu_{\mathfrak{b}-1}^{(r\mathfrak{a})})^{-1}\mu_{\mathfrak{b}}^{(r\mathfrak{a})}dx = S_{\mathfrak{b}}^{(r\mathfrak{a})} \qquad (\mathfrak{b}=1,\ldots\alpha_{r\mathfrak{a}})$$

bezeichnet. Die Integrationsconstanten werden annullirt. Die Differentialgleichung, welche die Integrale von $F_{r1}=0$, $F_{r2}=0$ bis $F_{r(\mathfrak{a}-1)}=0$ vereinigt enthält, sei $G_{r(\mathfrak{a}-1)}=0$. Der determinirende Factor bei $x=a$ in $F_{r\mathfrak{a}}$ sei $e^{w_{r\mathfrak{a}}}$, so ist der charakteristische Index in $e^{-w_{r\mathfrak{a}}}G_{r(\mathfrak{a}-1)}(e^{w_{r\mathfrak{a}}}y, x)=0$ gleich der Ordnung dieser Differentialgleichung; das Anfangsglied in der Entwickelung des Coefficienten von y in derselben sei $K(x-a)^{-s}$. Es werden nun die Integrale von $G_{r(\mathfrak{a}-1)}=0$ und $F_{r\mathfrak{a}}=0$ in einer Differentialgleichung vereinigt, welche die Form erhält

$$(4.)\quad G_{r(\mathfrak{a}-1)}(y, x)=y_1,\quad \varphi_{r\mathfrak{a}}(y_1, x)=0.$$

Wird

$$(5.)\quad G_{r(\mathfrak{a}-1)}(S_{\mathfrak{b}}^{(r\mathfrak{a})}, x) = T_{\mathfrak{b}}^{(r\mathfrak{a})}$$

gesetzt, so sind die Grössen $T_{\mathfrak{b}}^{(r\mathfrak{a})}$ die $\alpha_{r\mathfrak{a}}$ Integrale von $\varphi_{r\mathfrak{a}}=0$. Dieselben erhalten die Form

$$(6.)\quad \tau_1^{(r\mathfrak{a})}\int dx(\tau_1^{(r\mathfrak{a})})^{-1}\tau_2^{(r\mathfrak{a})}\int\ldots\int(\tau_{\mathfrak{b}-1}^{(r\mathfrak{a})})^{-1}(\tau_{\mathfrak{b}}^{(r\mathfrak{a})})dx, \qquad (\mathfrak{b}=1,\ldots\alpha_{r\mathfrak{a}})$$

wo die Grössen $\tau_{\mathfrak{b}}^{(r\mathfrak{a})}$ die Form $e^{w_{r\mathfrak{a}}}(x-a)^{\lambda_{\mathfrak{b}}-\mathfrak{b}+1}\sum_0^\infty k_{\mathfrak{b}\mathfrak{a}}(x-a)^{\mathfrak{a}}$ haben, $\lambda_{\mathfrak{b}}^{-\mathfrak{b}+1}$ aus dem Exponenten $r_{\mathfrak{b}}-\mathfrak{b}+1$ in $\mu_{\mathfrak{b}}^{(r\mathfrak{a})}$ durch Addition von $-s$ hervorgeht, $k_{\mathfrak{b}0}=[\mu_{\mathfrak{b}}^{(r\mathfrak{a})}e^{-w_{r\mathfrak{a}}}(x-a)^{-r_{\mathfrak{b}}+\mathfrak{b}-1}]_{x=a}K$ ist. Dieses ergiebt sich durch successive Anwendung von No. 2, (9.), II *a*). (Abh. Bd. 95, p. 71). Nun liefert die Differentialgleichung $e^{-w_{r\mathfrak{a}}}\varphi_{r\mathfrak{a}}(e^{w_{r\mathfrak{a}}}y, x)=0$ eindeutig die Coefficienten k in den τ, und die Grössen τ werden vollständig nach No. 14, No. 15, III *B*) dargestellt. Wenn in den Integralen (6.) Constanten bei den Integrationen zugefügt werden, so erhält man wieder Integrale von $\varphi_{r\mathfrak{a}}=0$, also auch wenn bei der Integration das constante Glied der Entwickelung annullirt wird. Die Ordnung des r^{ten} canonischen Bestandtheiles $F_{(r)}$ sei durch β_r bezeichnet. Die Integrale von $F_{(r)}=0$ sind nun in der Formel enthalten

$$(7.)\quad \tau_{r1}\int dx\,\tau_{r1}^{-1}\tau_{r2}\int\ldots\int\tau_{r(l-1)}^{-1}\tau_{rl}dx \qquad (l=1,\ldots\beta_r),$$

wo

$$(8.)\quad \tau_{rl}=\tau_{\mathfrak{b}}^{(r\mathfrak{a})},\quad l=\sum_{\mathfrak{c}=0}^{\mathfrak{c}=\mathfrak{a}-1}\alpha_{r\mathfrak{c}}+\mathfrak{b} \qquad \begin{cases}(\mathfrak{a}=1,\ldots k_r)\ (\alpha_{r0}=0),\\ (\mathfrak{b}=1,\ldots\alpha_{r\mathfrak{a}})\end{cases}$$

$\tau_{\mathfrak{b}}^{(r\mathfrak{a})}$ aus (6.), $\tau_{\mathfrak{b}}^{(r1)}=\mu_{\mathfrak{b}}^{(r1)}$ (3.). Es wird dann der Integralausdruck gebildet

$$(9.)\quad \mu_1\int dx\,\mu_1^{-1}\mu_2\int\ldots\int\mu_{n-1}^{-1}\mu_n dx \qquad (n=1,\ldots\beta_1+\cdots+\beta_\nu),$$

in welchem

$$(10.)\qquad \mu_n = r_{rl} \text{ aus } (8.),\quad n = \sum_{\mathfrak{c}=0}^{\mathfrak{c}=r-1} \beta_{\mathfrak{c}} + l. \qquad \begin{cases} (r=1,\dots \nu) & (\beta_0 = 0) \\ (l=1,\dots \beta_r) \end{cases}$$

Als System von m linearunabhängigen Integralen von $F_m = 0$ bei $x = a$ wird nun folgendes aufgestellt

$$(11.)\qquad \begin{cases} \mu_1 \int dx \mu_1^{-1} \mu_2 \int \dots \int dx \mu_{s-1}^{-1} \mu_s \int dx \mu_s^{-1} S_{\mathfrak{b}}^{(r\mathfrak{a})}, & \begin{cases} (\mathfrak{a} = 1,\dots k_r) \\ (\mathfrak{b} = 1,\dots \alpha_{r\mathfrak{a}}) \end{cases} \\ s = \sum_{\mathfrak{c}=0}^{\mathfrak{c}=r-1} \beta_{\mathfrak{c}} \quad (\beta_0 = 0),\quad r = 1,\dots \nu, \end{cases}$$

wobei die Integrationsconstanten annullirt werden. Dass diese Integrale linearunabhängig sind, ergiebt sich daraus, dass dieselben in dem Ausdrucke (9.) enthalten sind, in welchem die Integrationsconstanten diejenigen aus Formel (7.), welche $S_{\mathfrak{b}}^{(r\mathfrak{a})}$ ausdrückt, sind. (Abh. Bd. 95, No. 5, II *a*).)

b) Die Differentialdeterminante der Integrale (11.) ergiebt sich aus (9.)

$$(12.)\qquad D = \mu_1 \mu_2 \dots \mu_m$$

gemäss No. 14, (3.), (8.), da diese Formel besteht, welche Constanten auch bei den Integrationen zugefügt sein mögen. Zugleich ist nach No. 14, (4.)

$$(13.)\qquad D = e^{-\int p_1 dx} = c(x-a)^R e^V \Big(1 - \frac{x-a}{a_1 - a}\Big)^{\varrho_1} \dots \Big(1 - \frac{x-a}{a_{\varkappa-1} - a}\Big)^{\varrho_{\varkappa-1}} e^{U(x) - U(0)},$$

wo V gleich Null oder von der Form $\sum_1^n c_{-\mathfrak{a}}(x-a)^{-\mathfrak{a}}$ ist, die Factoren $\Big(1 - \frac{x-a}{a_{\mathfrak{b}} - a}\Big)^{\varrho_{\mathfrak{b}}}$, in denen die Grössen $a_{\mathfrak{b}}$ ($\mathfrak{b} = 1,\dots \varkappa-1$) die übrigen singulären Punkte von $F_m = 0$ im Endlichen sind, für $x = a$ den Werth 1 erhalten, $U(x)$ eine rationale Function, die für $x = a$ nicht unendlich wird, c ein constanter Factor ist. Dieser constante Factor c ergiebt sich nun aus (12.), derselbe wird demnach eine rationale Function gegebener Constanten. (Abh. Bd. 95, No. 5, II *b*).) Wird die Grösse $(x-a)^R e^V$ in (13.) bei dem singulären Punkte $a_{\mathfrak{b}}$ ($\mathfrak{b} = 1,\dots \varkappa$) durch $(x-a_{\mathfrak{b}})^{R_{\mathfrak{b}}} e^{V_{\mathfrak{b}}}$ bezeichnet (dieselbe geht aus (12.) hervor), so ist, wenn $-p_1$ in Partialbrüche zerlegt wird, der gebrochene rationale Theil gleich $\frac{d \log}{dx} \prod_1^{\varkappa} (x-a_{\mathfrak{b}})^{R_{\mathfrak{b}}} e^{V_{\mathfrak{b}}}$. Hieraus ergiebt sich der Ausdruck für D und derjenige für D^{-1}.

B). Es sei $x = t^{-1}$, $F_m(y,x) = (-t^2)^m F'_m(y,t)$, $F_{(\mathfrak{c})}(y,x) = (-t^2)^{\beta_{\mathfrak{c}}} F'_{(\mathfrak{c})}(y,t)$, $t^{-2(\beta_0 + \dots + \beta_{\mathfrak{c}-1})} F'_{(\mathfrak{c})}(t^{2(\beta_0 + \dots + \beta_{\mathfrak{c}-1})} y, t) = F''_{(\mathfrak{c})}(y,t)$, so gehen die Hauptunterdifferentialgleichungen von $F'_{(\mathfrak{c})}(y,t) = 0$ aus denen von $F_{(\mathfrak{c})}(y,x) = 0$, wenn $x = t^{-1}$ gesetzt wird, hervor, die Hauptunterdifferentialgleichungen von

$F''_{(c)}(y, t) = 0$ aus denen von $F'_{(c)}(y, t) = 0$, nachdem $y\,t^{2(\beta_0+\cdots+\beta_{c-1})}$ statt y eingesetzt ist. Aus (1.) ergiebt sich als canonische Form von $F'_m(y, t)$

$$(14.)\qquad F'_{(1)}(y, t) = y'_1, \quad F''_{(2)}(y'_1, t) = y'_2, \quad \ldots \quad F''_{(\nu)}(y'_{\nu-1}, t).$$

(Vgl. Abh. Bd. 95, No. 5, IV). Vermittelst derselben werden nach A) die Integrale von $F'_m(y, t) = 0$ bei $t = 0$ aufgestellt. In die Entwickelungen derselben (s. No. 22) ist dann für t wieder $\frac{1}{x}$ einzusetzen, wodurch man die Integrale von $F_m = 0$ bei $x = \infty$ erhält (vgl. No. 13, III).

22.

Discussion der in der vorigen Nummer aufgestellten Integrale. Systeme normaler Elementarintegrale, die den Gruppenexponenten des letzten Bestandtheiles einstellig oder mehrstellig enthalten.

I. Die Integrale (11.) der vorigen Nummer sind Systeme normaler Elementarintegrale (No. 3, I). In einem Systeme normaler Elementarintegrale μ_1, μ_2 bis μ_k

$$(1.)\qquad \mu_1 \int dx\, \mu_1^{-1} \mu_2 \int \ldots \int \mu_{k-1}^{-1} \mu_k\, dx$$

trete in der Reihe der dem μ_k vorhergehenden Bestandtheile $\mu_{k-1}, \mu_{k-2}, \ldots \mu_1$ zuerst in μ_{k-c} ein determinirender Factor auf, der verschieden von dem in μ_k ist. Wenn nun der Exponent in μ_k sich von dem Exponenten in einer der Grössen $\mu_{k-c}, \mu_{k-c-1}, \ldots \mu_1$ nicht um eine ganze Zahl unterscheidet, oder wenn überhaupt ein von dem determinirenden Factor in μ_k verschiedener determinirender Factor in den Grössen μ_{k-1} bis μ_1 nicht vorkommt, so werde gesagt, das System normaler Elementarintegrale (1.) enthalte ***den Gruppenexponenten des letzten Bestandtheiles einstellig***, im anderen Falle dagegen, das System (1.) enthalte den Gruppenexponenten des letzten Bestandtheiles ***mehrstellig***. Unter einem Gruppenexponenten ϱ ist hier jede beliebige Grösse verstanden, die sich von einem Exponenten ϱ nur um eine ganze Zahl unterscheidet. Diese Definition gilt auch bei einem System normaler Elementardifferentialausdrücke (No. 3, I). Die entsprechende Definition gilt für ein System bei einem Punkte normaler Differentialausdrücke (No. 9), nachdem dasselbe die Form erhalten hat, dass die zuletzt stehenden Bestandtheile, welche denselben determinirenden Factor bei diesem Punkte haben, zu einem Bestandtheile zusammengezogen sind. Alsdann kann man jede Wurzel der Exponentengleichung, die zu dem determinirenden Factor bei diesem Punkte in dem letzten Bestandtheile gehört, zu einem Gruppenexponenten des letzten Bestandtheiles nehmen. (Abh. Bd. 95, No. 5, III a)).

A). Ein System normaler Elementarintegrale aus No. 21, (11.) enthalte den Gruppenexponenten des letzten Bestandtheiles einstellig.

a) Dieses System wird dann entweder in den Ausdruck $e^{w}U$ gemäss No. 13, (13.) übergeführt, wobei die Entwickelung von U No. 13, (14.) nach No. 14 und No. 15, III *B*) vollständig dargestellt wird, oder das System wird auf das Integral No. 13, (15.) zurückgeführt. Die Entwickelung No. 13, (16.) dieses Integrales wird dann unter Anwendung von No. 16, (6.) nach No. 17 dargestellt. Die höchste Potenz von $\log(x-a)$ mit nicht verschwindendem Factor, welche in U No. 13, (14.) vorhanden ist, bleibt gemäss No. 13, (11.) mit dieser Eigenschaft in der Entwickelung des Integrales No. 13, (15.). Die Entwickelung gilt in dem Bezirke von $x = a$ bei $F_m = 0$ nach No. 13, II.

b) Der Umgang um $x = a$ sei in diesem Integrale No. 21, (11.) bei $r = r_1$ vorzunehmen. Es ergiebt sich als Resultat der Ausdruck No. 13, (19.), in welchem $p = 0$, daher die Constanten $c_q = c_{q+1} = \cdots c_{p+q-1} = 0$ sind. Die Constanten c_1 bis c_{q-1} gehen aus No. 19, (3.) hervor. Unter den Integralen y_{p+q-1} bis y_{p+1} in No. 13, (19.) können solche aus No. 21, (9.) sein, bei denen alsdann die Integrationsconstanten annullirt sind. Diese Integrale sind nun noch durch solche aus No. 21, (11.) auszudrücken. Dieses kommt nach der über das betrachtete System normaler Elementarintegrale aus No. 21, (11.) gemachten Voraussetzung darauf hinaus, Systeme No. 21, (7.) für $r < r_1$, in denen die Integrationsconstanten annullirt sind, die denselben Gruppenexponenten des letzten Bestandtheiles einstellig enthalten, bei $l = \sum_{\mathfrak{c}=0}^{\mathfrak{c}=k_r-1} \alpha_{r\mathfrak{c}} + \mathfrak{b}$ durch die Integrale $S_{\mathfrak{b}}^{(rk_r)}$ No. 21, (3.) von derselben Eigenschaft auszudrücken. Man kann zu dem Zwecke zunächst diese Integrale $S_{\mathfrak{b}}^{(rk_r)}$ durch jene Integralsysteme No. 21, (7.) ausdrücken und alsdann das Gleichungssystem eindeutig umkehren. Es wird die Grösse No. 21, (5.) links durch die Integrale No. 21, (6.), in denen die Integrationsconstanten annullirt sind, ausgedrückt, nachdem mit $e^{-w_{r1}}$ multiplicirt ist, nach dem Verfahren No. 20, I *B*, *b*), wobei nur die Integrale eingehen, die denselben Gruppenexponenten des letzten Bestandtheiles enthalten. Die erhaltenen Constanten sind die Coefficienten in denjenigen Integralsystemen No. 21, (7.), die der Voraussetzung gemäss in den gesuchten Ausdruck eingehen können. Der letzte dieser Coefficienten ist gleich 1, die vorhergehenden werden rationale Functionen gegebener Constanten. (Vgl. Abh. Bd. 95, No. 5, III *b*)).

c) In folgenden Fällen enthält jedes System normaler Elementarintegrale No. 21, (11.) den Gruppenexponenten des letzten Bestandtheiles einstellig: erstens wenn eine Wurzel der zu dem determinirenden Factor bei $x = a$ gehörenden Exponentengleichungen in den Hauptunterdifferentialgleichungen des einen canonischen Bestandtheiles sich von den Wurzeln solcher Exponentengleichungen bei einem anderen canonischen Bestandtheile nicht um eine ganze Zahl unterscheidet (No. 8, II *C*, *a*)); zweitens wenn diese Bedingung dahin abgeändert ist, dass, falls in den Differentialgleichungen $F_{rk_r} = 0$ und $F_{(r+1)1} = 0$ in No. 21, (2.) die determinirenden Factoren bei $x = a$ übereinstimmen, Wurzeln der zugehörenden Exponentengleichung in $F_{rk_r} = 0$ sich von Wurzeln der zugehörenden Exponentengleichung in $F_{(r+1)1} = 0$ um ganze Zahlen unterscheiden dürfen; ebenso, falls $F_{(r+1)1}$ gleich dem canonischen Bestandtheile $F_{(r+1)}$ ist, bei $F_{rk_r} = 0$, $F_{(r+1)} = 0$ und $F_{(r+2)1} = 0$ u. s. w. (Abh. Bd. 95, III *c*)).

B). Ein System normaler Elementarintegrale aus No. 21, (11.) enthalte den Gruppenexponenten des letzten Bestandtheiles mehrstellig.

a) Dieses System wird dann auf das Integral No. 13, (15.) zurückgeführt, dessen Entwickelung No. 13, (16.) ist. Zur Darstellung derselben kommen nun die Formeln No. 16, (6.) und (17.) zur Anwendung, aus welchen sich die Entwickelung nach No. 17 ergiebt. Dieselbe gilt in dem Bezirke von $x = a$ bei $F_m = 0$ nach No. 13, II. Die höchste Potenz des $\log(x-a)$ mit nicht verschwindendem Factor, welche in $\bar{U}$ No. 13, (14.) sich findet, ist gleich oder niedriger als die höchste Potenz des $\log(x-a)$ mit nicht verschwindendem Factor in der Entwickelung No. 13, (16.), wie sich durch Division mit den μ No. 13, (15.) und Differentiation ergiebt. Da man die Coefficienten in der Entwickelung der Grössen φ No. 13, (16.) mit beliebiger Annäherung berechnen kann, so kann man, falls ein solcher Coefficient nicht verschwindet, dieses nachweisen. Damit der Factor einer Potenz von $\log(x-a)$ nicht verschwindet, ist gemäss der homogenen Recursionsformel (No. 15, III *A*)) für die Coefficienten in der Entwickelung dieses Factors zu zeigen, dass ein Coefficient aus einer endlichen Anzahl derselben nicht verschwindet. (Abh. Bd. 95, No. 5, III *d*)).

Man kann aber auch, um eine Gruppe Integrale von $F_m = 0$, in deren Entwickelungen die Exponenten von $x-a$ sich von einer Grösse ϱ nur um ganze Zahlen unterscheiden, darauf hin zu untersuchen, welches die höchste Potenz des $\log(x-a)$ mit nicht verschwindendem Factor

in dieser Gruppe ist, namentlich ob diese Gruppe von Logarithmen frei ist. zusehen, ob sich aus $F_m = 0$ eine Gruppe gleich vieler Integrale herleiten lässt, die durch Systeme normaler Elementarintegrale ausgedrückt sind. welche denselben Gruppenexponenten ϱ des letzten Bestandtheiles einstellig enthalten. Aus diesen Ausdrücken ergiebt sich dann nach A, a), welches die höchste Potenz des Logarithmus mit nicht verschwindendem Factor ist. Um diese Systeme aufzusuchen, dienen folgende Betrachtungen.

In einem *Systeme bei $x = a$ normaler Differentialausdrücke*, welches einen Gruppenexponenten ϱ des letzten Bestandtheiles *einstellig* enthält, sei der determinirende Factor bei $x = a$ des letzten Bestandtheiles *der zu ϱ gehörige determinirende Factor* genannt. Systeme bei $x = a$ normaler Differentialausdrücke, die einen Gruppenexponenten ϱ des letzten Bestandtheiles einstellig mit unter einander verschiedenen zugehörigen determinirenden Factoren enthalten, liefern gleich Null gesetzt Differentialgleichungen, deren *Integrale mit dem Gruppenexponenten ϱ* (als Exponenten von $x-a$ in den Entwickelungen) unter einander linearunabhängig sind (No. 9, II B, a)). Wenn es mehrere Systeme bei $x = a$ normaler Differentialausdrücke giebt. welche einen Gruppenexponenten ϱ des letzten Bestandtheiles einstellig mit demselben zugehörigen determinirenden Factor enthalten, und welche gleich Null gesetzt Differentialgleichungen liefern, deren Integrale $F_m = 0$ erfüllen. so giebt es auch ein System Ψ mit denselben Eigenschaften, welches gleich Null gesetzt eine Differentialgleichung ergiebt, in der alle Integrale mit dem Gruppenexponenten ϱ aus solchen Differentialgleichungen enthalten sind (No. 9, II B, b)). Es können aus diesen Differentialgleichungen höchstens so viele Integrale mit dem Gruppenexponenten ϱ hervorgehen, als in einer Darstellung von F_m durch ein System normaler Differentialausdrücke Bestandtheile mit demselben determinirenden Factor bei $x = a$ in den zugehörigen Exponentengleichungen Wurzeln vorkommen, die sich von ϱ nur um ganze Zahlen unterscheiden (No. 8, II B, b)).

Um ein System, welches das System Ψ an der Spitze einer Darstellung Σ von F_m vertritt, aufzusuchen, sei mittelst der canonischen Form von F_m folgendes System für F_m aufgestellt

$$(2.)\qquad R(y, x) = y_1, \quad S(y_1, x) = y_2, \quad T(y_2, x),$$

wo R, S, T Systeme normaler Differentialausdrücke sind. In den Exponentengleichungen, die zu den determinirenden Factoren bei $x = a$ in den Bestandtheilen von R gehören, soll eine Wurzel, die sich von ϱ nur um

eine ganze Zahl unterscheidet, nicht enthalten sein. S enthalte alle diejenigen Bestandtheile des Systems mit dem betrachteten determinirenden Factor bei $x = a$, in deren zugehörigen Exponentengleichungen sich Wurzeln, die von ϱ nur um ganze Zahlen verschieden sind, finden, ausserdem etwa noch andere Bestandtheile, T die übrigen Bestandtheile. Dann giebt es (No. 8, III B, b)) für S eine Darstellung S', in der ein System normaler Differentialausdrücke S_1 an der Spitze steht, welches den Gruppenexponenten ϱ einstellig mit dem betrachteten determinirenden Factor bei $x = a$ enthält, und so dass $R(y, x) = y_1$, $S_1(y_1, x) = 0$ so viele der gesuchten Integrale wie $\Psi = 0$ liefert. Um nun dieses System S_1 aus S herzuleiten, werden successive normale Bestandtheile eines Systemes für S abgesondert (vermittelst der Hauptunterdifferentialgleichungen des ersten canonischen Bestandtheiles in der Darstellung der Differentialausdrücke unter canonischer Form), deren Exponentengleichungen, welche zu den determinirenden Factoren bei $x = a$ gehören, eine Wurzel, die von ϱ nur um eine ganze Zahl verschieden ist, nicht enthalten. Dieses Verfahren wird fortgesetzt, bis man entweder auf einen bei $x = a$ normalen Differentialausdruck mit dem betrachteten determinirenden Factor stösst, dessen zugehörige Exponentengleichung Wurzeln, die sich von ϱ nur um ganze Zahlen unterscheiden, in erforderlicher Anzahl enthält, oder bis man auf einen Differentialausdruck kommt, aus dem sich ein Bestandtheil, dessen zu dem determinirenden Factor bei $x = a$ gehörende Exponentengleichung eine von ϱ nur um eine ganze Zahl verschiedene Wurzel nicht enthält, nicht mehr absondern lässt. In letzterem Falle ist (der übrig bleibende Ausdruck tritt wie S in einem Schema (2.) auf) zuzusehen, ob und welches System normaler Ausdrücke mit dem betrachteten determinirenden Factor bei $x = a$ von höchster Ordnung folgen kann. Es kann nur ein einziges solches geben. (Abh. Bd. 91, No. 9, II c)).

b) Bei dem Umgange um $x = a$ in diesem Integrale für $r = r_1$ kommt Formel No. 13, (19.) zur Anwendung, in welcher die Constanten durch die Ausdrücke No. 19, (3.), (4.) bestimmt werden. Es sind dann noch gemäss dem in A, b) Gesagten Grössen $S_\varrho^{(ra)}$ No. 21, (3.) für $r < r_1$ durch Integrale No. 21, (7.), in welchen die Integrationsconstanten annullirt sind, auszudrücken. Dieses geschieht, indem successive durch die τ dividirt, dann differentiirt und vor jeder Differentiation das constante Glied der Entwickelung bestimmt wird. Diese Constanten werden nach No. 17 durch bestimmte Integrale ausgedrückt und durch Reihen entwickelt, und werden nach No. 18 mit

beliebiger Annäherung berechnet. Die letzte Constante in jedem Ausdrucke wird gleich 1. (Abh. Bd. 95, No. 5, III *b*)).

c) Setzt man bei einem Umgange um $x = a$ in Formel No. 13, (19.) für y_{p+q} ein Integral aus No. 21, (11.) für $r = r_1$ ein und drückt y_{p+q-1} bis y_1 durch die vorhergehenden Integrale aus No. 21, (11.), die denselben Gruppenexponenten des letzten Bestandtheiles enthalten, aus, so ergiebt sich, dass der höchste Exponent der Potenzen des $\log(x-a)$ (mit nicht verschwindendem Factor) in y_{p+q} höchstens um eine Einheit den höchsten Exponenten dieser Potenzen in den vorhergehenden Integralen übertrifft. Daraus folgt, wenn der höchste Exponent von $\log(x-a)$ in den Integralen No. 21, (11.) für $r < r_1$ mit demselben Gruppenexponenten gleich η ist, und wenn in dem Ausdrucke $S_t^{(r_1 a)}$ in y_{p+q} λ normale Elementarintegrale mit diesem Gruppenexponenten vorkommen, dass der höchste Exponent von $\log(x-a)$ in y_{p+q} höchstens gleich $\eta+\lambda$ ist.

II. Um die Fortsetzung eines Integrales von $F_m = 0$ unter Anwendung der in No. 20 gegebenen Methoden auszudrücken, wird der Uebergang von einem singulären Punkte von $F_m = 0$ zu einem anderen singulären Punkte dieser Differentialgleichung successive bei den Integralen der ν Differentialgleichungen, die aus No. 21, (1.) hervorgehen,

$$(3.)\qquad F_{(1)}(y, x) = y_1, \quad F_{(2)}(y_1, x) = y_2, \quad \ldots \quad F_{(\iota)}(y_{\iota-1}, x) = 0 \qquad (\iota = 1, \ldots \nu)$$

vorgenommen. Die Integrale einer solchen Differentialgleichung bei den singulären Punkten von $F_m = 0$ sind in den Formeln No. 21, (11.) enthalten (bei $x = t^{-1}$, $t = 0$ werden sie mittelst No. 21, (14.) nach dem Schema No. 21, (11.) aufgestellt) und werden nach dem Vorhergehenden dargestellt. Die Differentialdeterminante derselben wird, wie in No. 21, II *A, b*) angegeben ist, gebildet; hierbei sind die in (3.) neu hinzutretenden singulären Punkte nach No. 11, III bekannt. Es werden nun die Methoden aus No. 20 angewandt, um die Constanten in den linearen Verbindungen der Integrale dieser Differentialgleichungen bei dem Uebergange von einem singulären Punkte von $F_m = 0$ zu einem anderen zu erhalten. Die in (3.) neu hinzutretenden singulären Punkte sind ausserwesentliche und kommen bei Anwendung der Substitutionen aus No. 20, I und II nicht in Betracht.

23.

Entwickelungen, die unendlich viele Potenzen mit negativen Exponenten enthalten.

I. Giebt man der Entwickelung No. 13, (16.) eines Systemes normaler Elementarintegrale die Form $e^{w}(x-a)^{\varrho}\,\psi(x)$, wo w gleich Null oder

von der Form $\sum_1^n c_{-\alpha}(x-a)^{-\alpha}$ sein soll, so muss, wenn $\psi(x)$ nur eine endliche Anzahl Potenzen von $x-a$ mit negativen Exponenten enthält, e^w gleich dem determinirenden Factor e^u des letzten Bestandtheiles dieses Systems sein, wie sich aus Formel No. 13, (15.) durch Division mit den μ und Differentiation ergiebt. Ist Mod $u \lesseqgtr 0$, so enthalten also die Grössen φ in No. 13, (16.) unendlich viele Potenzen mit negativen Exponenten. Wird $w = u$ gesetzt, so ergiebt sich auf dieselbe Weise, dass $\psi(x)$ eine unendliche Anzahl von solchen Potenzen enthält, sobald dieses in $\psi_{g-1}(x)$ in

$$(1.) \qquad \mu_g \int dx \mu_g^{-1} \mu_{g+1} \int \ldots \int \mu_k^{-1} U dx \;=\; e^u (x-a)^\varrho \psi_{g-1}(x)$$

der Fall ist, welcher Ausdruck (1.) aus No. 13, (15.) entsteht, wenn $\mu_1 \int dx \mu_1^{-1} \mu_2 \int \ldots \int \mu_{g-1} dx$ weggelassen wird.

Ausdrücke (1.), in denen $\psi_g(x)$ unendlich viele Potenzen mit negativen Exponenten enthält, kann man auf folgende Weise bilden. In μ_g sei der determinirende Factor von e^u verschieden. (1.) sei auf die Form

$$(2.) \qquad \mu_g \int dx \mu_g^{-1} V$$

gebracht, bei V sei in der Grösse ψ_g aus dem Ausdrucke $e^u(x-a)^\varrho \psi_g(x)$ nur eine endliche Anzahl Potenzen von $x-a$ mit negativen Exponenten enthalten. Wenn in $\mu_g^{-1} V$ die Exponenten von $x-a$ ganzzahlig sind, so enthalte in der Entwickelung dieses Ausdruckes der Factor der höchsten Potenz von $\log(x-a)$ das Glied $(x-a)^{-1}$. Dann ergiebt sich, dass in $\psi_{g-1}(x)$ in (1.) unendlich viele Potenzen von $x-a$ mit negativen Exponenten vorkommen. Wenn in $\mu_g^{-1} V$ die Exponenten von $x-a$ nicht ganzzahlig sind, so sei der Factor der höchsten Potenz von $\log(x-a)$ in V gleich $e^u(x-a)^\varrho \varphi(x)$, $\mu_g = e^{\mathfrak{c}}(x-a)^r \chi(x)$, $u - \mathfrak{c} = w = \sum_1^n c_{-\alpha}(x-a)^{-\alpha}$. $\varphi(x)$ und $\chi(x)$ von der Form $\sum_0^\infty c_\alpha (x-a)^\alpha$, wo Mod $\varphi(a) \gtrless 0$ und Mod $\chi(a) \gtrless 0$. $\varrho - r = r_1$ nicht ganzzahlig. Wird der Factor der höchsten Potenz von $\log(x-a)$ in (2.) auf die Form $e^u(x-a)^\varrho \omega(x)$ gebracht, soll in $\omega(x)$ nur eine endliche Zahl Potenzen von $x-a$ mit negativen Exponenten vorkommen, so muss bei $\varphi(x)(\chi(x))^{-1} = \varrho(x-a)$

$$(3.) \qquad \int e^w (x-a)^{r_1} \varrho(x-a) dx \;=\; e^w (x-a)^{r_1 + \mathfrak{c}} \sum_0^\infty k_\alpha (x-a)^\alpha, \quad \text{Mod } k_0 \gtrless 0$$

sein, und es ergiebt sich durch Differentiation $\mathfrak{c} = n+1$. Sobald also in der Entwickelung von

$$(4.)\qquad e^{-w}\int e^{w}(x-a)^{r_1}\varrho(x-a)\,dx$$

der Coefficient einer Potenz $(x-a)^{r_1+k+1}$ für $k<n$ nicht verschwindet, enthält $\omega(x)$ unendlich viele Potenzen von $x-a$ mit negativen Exponenten.

Die Function (4.) wird nach No. 16, (6.) dargestellt durch

$$(5.)\qquad \frac{(x-a)^{r_1+1}}{e^{2\pi i r_1}-1}\int_1^{\prime} e^{w((x-a)\alpha)-w(x-a)}\varrho((x-a)\alpha)\alpha^{r_1}\,d\alpha;$$

$e^{w((x-a)\alpha)-w(x-a)}$ sei gleich $\sum_0^{\infty} g_{-\mathfrak{a}}(x-a)^{-\mathfrak{a}}$, $\varrho((x-a)\alpha)$ gleich $\sum_0^{\infty} h_{\mathfrak{a}}((x-a)\alpha)^{\mathfrak{a}}$, $\operatorname{Mod} h_0 \gtrless 0$. Der Coefficient von $(x-a)^{r_1+k+1}$ in (5.) wird dann (No. 17; vgl. Abh. Bd. 95, No. 2)

$$(6.)\qquad \frac{h_k}{r_1+k+1}+\sum_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=\infty}\frac{1}{e^{2\pi i r_1}-1}\int_1^{\prime} g_{-\mathfrak{b}}\,\alpha^{r_1+k+\mathfrak{b}}\,d\alpha\, h_{k+\mathfrak{b}}.$$

Damit die Grösse (6.) für einen Werth $k<n$ nicht verschwindet, kann man es durch passende Wahl von V und μ_g z. B. so einrichten, dass $\varrho(x-a)$ eine geeignete ganze Function wird.

II. Wird die Entwickelung eines Systems normaler Elementarintegrale aus No. 21, (11.) auf die Form $e^{w}(x-a)^{\varrho}\psi(x)$ gebracht, wo e^{w} der determinirende Factor, ϱ der Exponent des letzten Bestandtheiles dieses Systems ist, so ergiebt sich, dass $\psi(x)$ eine endliche Anzahl Potenzen von $x-a$ mit negativen Exponenten hat, wenn dieses System aus einer Hauptunterdifferentialgleichung von $F_{(1)}=0$ hervorgeht, wo $F_{(1)}$ der erste canonische Bestandtheil von $F_m(y,x)$ ist, oder überhaupt aus einer Differentialgleichung, in der ein bei $x=a$ normaler Differentialausdruck gleich Null gesetzt ist. Um in anderen Fällen zu ersehen, ob $\psi(x)$ unendlich viele Potenzen mit negativen Exponenten enthält, ist in folgender Weise zu verfahren. Nach No. 15 wird die Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten aufgestellt, welcher die Factoren der Potenzen von $\log(x-a)$ in $(x-a)^{\varrho}\psi(x)$ genügen. In der Exponentengleichung derselben bei $x=a$ finden sich Wurzeln, die sich von ϱ nur um ganze Zahlen unterscheiden, da die Differentialgleichung die Integrale von $e^{-w}F_m(e^{w}y,x)=0$ enthält (vgl. No. 3, III, (12.)): diejenige dieser Wurzeln, deren reeller Theil am kleinsten ist, sei ϱ'. Wird dann in die Differentialgleichung $(x-a)^{\varrho'}y$ an Stelle von y eingesetzt, so enthält die Exponentengleichung derselben keine negativen ganzen Zahlen zu Wurzeln. Die Entwickelung von $(x-a)^{\varrho-\varrho'}\chi(x)$, wo $\chi(x)$ der Factor einer Potenz von $\log(x-a)$ in $\psi(x)$ ist, kann nun, wenn sie nur eine endliche Anzahl Potenzen von $x-a$ mit negativen Exponenten

enthalten soll, überhaupt keine enthalten. Bildet man daher aus der genannten Differentialgleichung die homogene Recursionsformel mit constanter Anzahl der Glieder für die Coefficienten in $(x-a)^{\varrho-\varrho'}\chi(x)$ (No. 15, III A)). so ergiebt sich, damit in dieser Entwickelung unendlich viele Potenzen mit negativen Exponenten vorkommen, als nothwendig und hinreichend, dass aus einer endlichen Anzahl von Coefficienten mit negativen Stellenzeigern wenigstens einer nicht verschwindet. Die beliebig angenäherte Berechnung dieser Coefficienten geschieht nach No. 18. (Vgl. Abh. Bd. 95, No. 6, II).

Vierte Abtheilung.

24.

Die algebraischen Aufgaben in der vorhergehenden Theorie.

I. In dieser Theorie treten folgende algebraische Aufgaben auf. (Vgl. Abh. Bd. 95, No. 7, III).

A). Es sind algebraische Gleichungen aufzulösen, dieselben treten bei Aufstellung der canonischen Form auf:

a) 1. Solche, welche die singulären Punkte der vorgelegten Differentialgleichung $F_m(y, x) = 0$ im Endlichen bestimmen.

2. Solche, welche Coefficienten in den Exponenten der fundamentalen determinirenden Factoren (No. 3, III) bei den singulären Punkten bestimmen, Coefficientengleichungen (No. 4, I A)).

3. Die Exponentengleichungen, welche zu den fundamentalen determinirenden Factoren bei den singulären Punkten gehören, fundamentale Exponentengleichungen (No. 3, III). Bei diesen müssen die Gruppen der Wurzeln, die sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, aufgestellt werden.

Die Coefficienten in diesen algebraischen Gleichungen sind rationale Ausdrücke (mit rationalen Zahlcoefficienten) von den Constanten in den rationalen Coefficienten der Differentialgleichung, ausserdem bei den Gleichungen 2. von Wurzeln der Gleichungen 1. und anderen Gleichungen 2. und bei den Gleichungen 3. von Wurzeln der Gleichungen 1. und 2.

b) Ausnahmsweise können bei der Absonderung eines regulären Bestandtheiles aus einem Differentialausdrucke in No. 11 gemäss dem Verfahren von No. 6 zunächst unbestimmte Constanten in dem Zähler der Coef-

ficienten der Entwickelung in endlicher Anzahl auftreten, die durch die übrigen Bedingungen und daher durch algebraische Gleichungen mittelst Elimination zu bestimmen sind.

Bei der Aufstellung des zweiten und der folgenden canonischen Bestandtheile sind die neu hinzutretenden singulären Punkte im Endlichen durch lineare Factoren eines Polynoms gegeben, von welchem im Allgemeinen Theiler nach No. 11 bekannt werden; es können hierbei noch algebraische Gleichungen aufzulösen sein.

Die Coefficienten in diesen Gleichungen sind rationale Ausdrücke der Constanten aus den Coefficienten der Differentialgleichungen, von Wurzeln der Gleichungen *a*) und von Wurzeln anderer Gleichungen *b*).

c) Es ergiebt sich nach den Bemerkungen über die fundamentalen determinirenden Factoren No. 4, I *C*), dass, wenn die singulären Punkte der Differentialgleichung gegeben sind, es besonders auf die Auflösung der fundamentalen Exponentengleichungen ankommt.

B). Es ist zu beurtheilen, ob ganze rationale Ausdrücke bereits ermittelter Constanten verschwinden. Diese Aufgabe kommt vor:

a) bei Aufstellung der Gleichungen in *A*);

b) bei der Absonderung eines regulären Bestandtheiles aus einem Differentialausdrucke gemäss No. 6, No. 11;

c) bei Reduction rationaler Functionen auf die einfachste Form, besonders nach Anwendung von No. 7, I in No. 11, No. 21, II *A*);

d) bei der Ermittelung der Wurzeln der Exponentengleichungen, die sich von bekannten Wurzeln der fundamentalen Exponentengleichungen nur um ganze Zahlen unterscheiden, und bei Auflösung von Exponentengleichungen, deren Wurzeln als ganzzahlig bekannt sind; und zwar treten solche Aufgaben bei Aufstellung der canonischen Form nach No. 11, in No. 21, (2.); No. 22, I *B, a*); No. 23, II auf;

e) bei Ermittelung einer endlichen Anzahl Coefficienten in der Entwickelung regulärer Integrale nach No. 14;

f) bei der Herleitung der in No. 15 angegebenen Hülfsdifferentialgleichungen mit rationalen Coefficienten, in welchen die Coefficienten rationale Ausdrücke der Constanten in den Coefficienten der Differentialgleichung $F_m = 0$ und von in *A*. *a*) 1. angegebenen Constanten werden. Von diesen Differentialgleichungen kommen nur die Coefficienten in Betracht.

II. Die Aufstellung der Systeme normaler Elementarintegrale No. 13,

No. 21 führt keine neuen Constanten ein. Es folgt daher aus I, dass die Constanten in den aufgestellten Systemen normaler Elementarintegrale algebraisch mit den Constanten in den rationalen Coefficienten der Differentialgleichung zusammenhängen.

25.

Die Constanten in den rationalen Coefficienten der Differentialgleichung seien algebraische Zahlen.

Die Constanten in den rationalen Coefficienten der vorgelegten Differentialgleichung sollen algebraische Zahlen sein, also Wurzeln von algebraischen Gleichungen mit rationalen Zahlcoefficienten, welche Gleichungen gegeben seien. (Vgl. Abh. Bd. 95, No. 7, II, III).

A). *a*) Die Summe, die Differenz, das Product, der Quotient zweier algebraischen Zahlen sind wieder algebraische Zahlen, für die man eine Gleichung mit rationalen Zahlcoefficienten aus den gegebenen Gleichungen der beiden Zahlen herleiten kann.

Eine algebraische Gleichung, deren Coefficienten algebraische Zahlen sind, hat zu Wurzeln algebraische Zahlen, und wenn Gleichungen mit rationalen Zahlcoefficienten für die Coefficienten der Gleichung gegeben sind, so kann man eine solche Gleichung für die Wurzeln herleiten. (S. die Abh. des Herrn *Dedekind* in *Dirichlets* Vorlesungen über Zahlentheorie, 3. Aufl., p. 454 etc.)

b) Um zu untersuchen, ob ein ganzer rationaler Ausdruck algebraischer Zahlen, wenn man dieselben mit beliebiger Annäherung berechnen kann, verschwindet, ist eine algebraische Gleichung mit rationalen Zahlcoefficienten aufzustellen, welcher der Ausdruck genügt, und zuzusehen, ob derselbe dem Modul nach kleiner ist, als eine Grösse, welche unterhalb der dem Modul nach kleinsten nicht verschwindenden Wurzel liegt.

c) Um eine algebraische Gleichung, deren Coefficienten algebraische Zahlen sind, aufzulösen, werden aus derselben die Gleichungen hergeleitet, welche die gleich vielfachen Wurzeln der ursprünglichen einfach enthalten, und es wird für jede der letzteren algebraischen Gleichungen eine solche mit rationalen Zahlcoefficienten hergeleitet, welche die Wurzeln jener umfasst. Aus den Wurzeln letzterer Gleichungen, die mit beliebiger Annäherung berechnet werden können, ergeben sich dann nach *b*) die Wurzeln der vorgelegten Gleichung, und zwar im reellen Theile oder Coefficienten von i rational, wenn ein solches Element rational ist.

B). Um bei einer fundamentalen Exponentengleichung, deren Wurzeln nach dem Verfahren von *A, c*) ermittelt sind, diejenigen Wurzeln zusammenzustellen, welche sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, wird folgendes Verfahren angewandt. *S* sei die Gesammtheit der unter einander verschiedenen Wurzeln. ω sei eine Wurzel aus *S*, so wird $\omega+n$ in die Gleichung eingesetzt und nach *A, b*) ermittelt, für welche ganzen Zahlen n die Gleichung erfüllt ist. Die auf diese Weise sich ergebenden Wurzeln werden aus *S*, da man die in *S* enthaltenen mit beliebiger Annäherung berechnen kann, weggestrichen. Mit einer der übrigen Wurzeln wird in derselben Weise verfahren u. s. w. Oder man kann auch nach den Angaben von Abh. Bd. 95, No. 7, I das ursprüngliche Gleichungspolynom so in Factoren zerlegen, dass einzelne derselben, gleich Null gesetzt, Gleichungen ergeben, welche zu Wurzeln Repräsentanten der verschiedenen Gruppen von Wurzeln, die sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, haben, und dass sich aus den übrigen Factoren die anderen Glieder jeder Gruppe ergeben.

C). Als Constanten in den rationalen Substitutionen ersten Grades in No. 20 kann man auch algebraische Zahlen nehmen; ebenso für die Werthe M in No. 18, die den Modul von vorgelegten Grössen übertreffen sollen.

Es ergiebt sich also aus No. 24 und dem Vorhergehenden, dass, wenn die Constanten in den rationalen Coefficienten der Differentialgleichung algebraische Zahlen sind, sich alle im Früheren verlangten Operationen durchführen lassen.

Fünfte Abtheilung.

26.

Die canonische Form des Differentialausdruckes enthalte einen nichtnormalen Bestandtheil. Allgemeine Eigenschaften der Systeme normaler Elementarintegrale.

I. Es ist in No. 12, III angegeben, dass, wenn die canonische Form von $F_m(y, x)$ einen nichtnormalen canonischen Bestandtheil $F_{m-N}(s, x)$ enthält, derselbe auf die Form

$$(1.)\qquad F_M(s, x) = s', \quad \varphi_{N'}(s', x)$$

gebracht wird, wo F_M ein homogener linearer Differentialausdruck mit rationalen Coefficienten ist, der sich nicht mehr durch ein System solcher darstellen lässt, von denen der erste oder letzte Bestandtheil ein normaler Differentialausdruck ist. Und es bleibt nun die Differentialgleichung $F_M = 0$

weiter zu untersuchen in Bezug auf Integrale, die durch Systeme normaler Elementarintegrale ausdrückbar sind. In $F_M = 0$ sind bei den singulären Punkten von $F_m = 0$ die fundamentalen determinirenden Factoren und die Wurzeln der zugehörigen Exponentengleichungen bis auf ganze Zahlen durch die Zerlegung von F_m aus den entsprechenden Grössen von F_m bekannt. Bei den übrigen singulären Punkten von $F_M = 0$ ist der charakteristische Index gleich Null und sind die Wurzeln der Exponentengleichungen ganzzahlig. Die Constanten in den rationalen Coefficienten in F_M hängen algebraisch mit denen in F_m zusammen.

II. Es ist nun hier allgemein zu zeigen, dass bei einer beliebigen homogenen linearen Differentialgleichung $F_m = 0$ mit rationalen Coefficienten die Constanten in einem Systeme normaler Elementarintegrale $e^{w}(x-a)^{r}\nu(x)$, wo e^{w} der determinirende Factor, r der Exponent ist, aus welchem Systeme, wenn bei einem beliebigen Bestandtheile abgebrochen wird, Integrale von $F_m = 0$ hervorgehen, algebraisch mit den Constanten in den rationalen Coefficienten von $F_m = 0$ zusammenhängen, wobei nur in der Entwickelung der Grössen ν im Zähler der Coefficienten eine endliche Anzahl zunächst unbestimmter Constanten möglicherweise auftritt. Bei den in der vierten Abtheilung aufgestellten Systemen normaler Elementarintegrale von $F_m = 0$, wenn F_m durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar ist, hatten sich die ermittelten Constanten als algebraisch mit den Constanten in den Coefficienten der Differentialgleichung zusammenhängend ergeben. Der allgemeine Satz folgt aus den Untersuchungen der ersten Abtheilung.

Zunächst hängen die Constanten, die in No. 24, I A) angegeben sind, die singulären Punkte, die Coefficienten in den Exponenten der fundamentalen determinirenden Factoren bei den singulären Punkten, die Wurzeln der fundamentalen Exponentengleichungen algebraisch mit den Constanten in den rationalen Coefficienten der Differentialgleichung zusammen. Wenn nun aus einem Systeme normaler Elementarintegrale

$$(2.)\qquad \mu_1\int dx\,\mu_1^{-1}\mu_2\int\cdots\int\mu_{\alpha-1}^{-1}\mu_\alpha\,dx$$

für $\alpha = 1, \dots m-k$ Integrale von $F_m = 0$ hervorgehen, und das System normaler Elementardifferentialausdrücke $F_{m-k}(y, x)$

$$(3.)\qquad \frac{dy}{dx} - q_1 y = y_1,\quad \frac{dy_1}{dx} - q_2 y_1 = y_2,\quad \dots\quad \frac{dy_{m-k-1}}{dx} - q_{m-k}y_{m-k-1}$$

gebildet wird, worin $q_\alpha = \frac{d\log\mu_\alpha}{dx}$, so sind die Integrale (2.) solche von

$F_{m-k}=0$, und es wird $F_m(y,x)$ dargestellt durch

$$(4.)\qquad F_{m-k}(y,x)=s,\quad f_k(s,x),$$

wo f_k ein homogener linearer Differentialausdruck k^{ter} Ordnung, dessen Coefficienten bei $x=a$, abgesehen von diesem Punkte, einwerthig und stetig und für $x=a$ in endlicher Ordnung unendlich sind (No. 2, I, III). Der determinirende Factor $e^{w_\mathfrak{a}}$ in einem Bestandtheil des Systemes (3.) ist einer der fundamentalen determinirenden Factoren von $F_m=0$, der Exponent in $\mu_\mathfrak{a}$, abgesehen von einer ganzen Zahl, eine Wurzel der zum determinirenden Factor $e^{w_\mathfrak{a}}$ gehörenden Exponentengleichung von $F_m=0$ (No. 3, III, (12.)). Um die Entwickelung von $(x-a)^{r_\mathfrak{a}}\nu_\mathfrak{a}(x)$ in $\mu_\mathfrak{a}$ zu untersuchen, wird

$$(5.)\qquad \frac{dy}{dx}-q_1y=y_1;\ \dots\ \frac{dy_{\mathfrak{a}-2}}{dx}-q_{\mathfrak{a}-1}y_{\mathfrak{a}-2}=\varphi_{\mathfrak{a}-1}(y,x)$$

gesetzt, und $F_m(y,x)$ durch das System

$$(6.)\qquad \varphi_{\mathfrak{a}-1}(y,x)=s',\ \chi_{m-\mathfrak{a}+1}(s',x)$$

dargestellt, wo $\chi_{m-\mathfrak{a}+1}$ ein homogener linearer Differentialausdruck, dessen Coefficienten ganze rationale Functionen der Coefficienten von $F_m(y,x)$ und der Coefficienten von $\varphi_{\mathfrak{a}-1}(y,x)$ und deren Ableitungen sind (No. 2, (14.)). $(x-a)^{r_\mathfrak{a}}\nu_\mathfrak{a}(x)$ erfüllt die Differentialgleichung $e^{-w_\mathfrak{a}}\chi_{m-\mathfrak{a}+1}(e^{w_\mathfrak{a}}s,x)=0$. Nach den Angaben No. 2, II *a, b*) werden aus dem Polynome No. 1, (4.) der Exponentengleichung von $e^{-w_\mathfrak{a}}F_m(e^{w_\mathfrak{a}}y,x)=0$ vermittelst der Grössen $e^{w_\mathfrak{b}-w_\mathfrak{a}}(x-a)^{r_\mathfrak{b}}$ $(\mathfrak{b}=1,\dots\mathfrak{a}-1)$ successive die Polynome der Exponentengleichungen von $e^{-w_\mathfrak{a}}\chi_{m-\mathfrak{b}}(e^{w_\mathfrak{a}}y,x)=0$ $(\mathfrak{b}=1,\dots\mathfrak{a}-1)$ hergeleitet. In den Ausdrücken der Coefficienten in der Entwickelung von $\nu_\mathfrak{a}(x)$ sind nun nach No. 1 die Nenner durch das Polynom der Exponentengleichung von $e^{-w_\mathfrak{a}}\chi_{m-\mathfrak{a}+1}(e^{w_\mathfrak{a}}y,x)=0$, in welchem statt der Variabeln die Grösse $\nu_\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}$ ganzzahlig und positiv, steht, gegeben, die Zähler sind entweder eindeutig bestimmt durch $\nu_\mathfrak{a}$ und die Constanten in der Differentialgleichung $e^{-w_\mathfrak{a}}\chi_{m-\mathfrak{a}+1}(e^{w_\mathfrak{a}}y,x)=0$, oder es gehen noch zunächst unbestimmte Constanten in endlicher Anzahl in die Zähler ein. Daher findet dasselbe auch in $\frac{dy_{\mathfrak{a}-1}}{dx}-q_\mathfrak{a}y_{\mathfrak{a}-1}$ statt. Indem man also von $\mathfrak{a}=1$ an beginnt, ergiebt sich, dass die Constanten in der Entwickelung der Grössen ν algebraisch mit den Constanten in den Coefficienten der Differentialgleichung $F_m=0$ zusammenhängen abgesehen davon, dass möglicherweise eine endliche Anzahl zunächst unbestimmter Constanten in den Zählern der Coefficienten in den Entwickelungen der ν auftritt. Ueber die

Coefficienten der Differentialgleichung $F_m = 0$ ist bei diesem Beweise nur die Voraussetzung aus No. 1, (1.) gemacht.

III. Wenn aber auch bei einem singulären Punkte von $F_m = 0$ fundamentale determinirende Factoren und Wurzeln der zugehörigen Exponentengleichungen in der Anzahl der Ordnung der Differentialgleichung vorhanden sind und eindeutig bestimmte formelle Entwickelungen der normalen Elementarintegrale sich ergeben, so kann doch der Fall eintreten, dass kein normales Elementarintegral existirt, und dass in einer Darstellung des Differentialausdruckes unter der Form (3.), worin die q von der Form $\frac{\eta}{\omega}$, η und ω bei $x = a$, abgesehen von diesem Punkte, einwerthig und stetig sind, keine Grösse q vorkommen kann, in der $\omega = 1$, η in endlicher Ordnung unendlich ist. (Die entgegenstehende Behauptung in der Abh. des Herrn *Floquet*, Annales de l'école normale T. VIII, S. 122, 1879 ist nicht richtig). Dieses kann man dadurch nachweisen, dass man bei einer Differentialgleichung mit zwei singulären Punkten $x = 0$ und $x = \infty$ die Coefficienten so bestimmt, dass die Integrale bei dem singulären Punkte $x = \infty$ regulär sind, so dass man deren Entwickelung kennt, die in der ganzen Ebene abgesehen von $x = 0$ gilt, wodurch man auch die Entwickelung der Integrale bei $x = 0$ erhält, und dass man weiter über die Coefficienten so verfügt, dass bei $x = 0$ die verlangten Resultate hervorgehen. Eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, die bei $x = 0$ den charakteristischen Index gleich 1, bei $x = \infty$ denselben gleich Null hat, ist

$$(7.)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{a_0 + a_1 x}{x^2}\frac{dy}{dx} + \frac{b_0 + b_1 x}{x^3} y = 0, \quad \text{Mod } a_0 \gtrless 0.$$

Die Exponentengleichung bei $x = \infty$ ist

$$(8.)\qquad r(r-1) + (2 - a_1) r + b_1 = 0.$$

Bei $x = 0$ bestehen die beiden fundamentalen determinirenden Factoren (No. 4) 1 und $e^{\frac{a_0}{x}}$ mit den zugehörigen Exponentengleichungen

$$(9.)\qquad a_0 r + b_0 = 0 \quad \text{bei} \quad 1,$$

$$(10.)\qquad -a_0 r + 2a_0 - a_0 a_1 + b_0 = 0 \quad \text{bei} \quad e^{\frac{a_0}{x}}.$$

Sind die Wurzeln von (8.) ϱ_1 und ϱ_2, ist die Wurzel von (9.) ϱ_3, so ist die von (10.) $\varrho_4 = 1 - \varrho_1 - \varrho_2 - \varrho_3$. Man kann nun ϱ_1 und ϱ_2 so wählen, dass sie sich nicht um eine ganze Zahl unterscheiden, und ϱ_3 so, dass weder ϱ_3 noch ϱ_4 sich von $-\varrho_1$ und $-\varrho_2$ um eine ganze Zahl unterscheidet. Die Integrale von (7.) haben nun die Entwickelungen

$$(11.)\quad x^{-\varrho_1}\sum_0^\infty c_\lambda^{(1)} x^{-\lambda},\quad \text{Mod}\, c_0^{(1)} \geqq 0,$$

$$(12.)\quad x^{-\varrho_2}\sum_0^\infty c_\lambda^{(2)} x^{-\lambda},\quad \text{Mod}\, c_0^{(2)} \geqq 0,$$

die für beliebige Werthe von x, abgesehen von $x=0$, gelten. Bei $x=0$ ergeben sich die (abgesehen von constanten Factoren) eindeutig bestimmten formellen Entwickelungen der als Integrale von (7.) allein möglichen normalen Elementarintegrale

$$(13.)\quad x^{\varrho_3}\sum_0^\infty k_\lambda^{(1)} x^{\lambda},\quad k_0^{(1)} = 1,$$

$$(14.)\quad e^{\frac{a_0}{x}} x^{\varrho_4}\sum_0^\infty k_\lambda^{(2)} x^{\lambda},\quad k_0^{(2)} = 1.$$

Dieselben können jedoch wegen der über die Exponenten ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4 gestellten Bedingungen, da bereits die Integrale (11.) und (12.) bestehen, nicht convergiren. In einer Darstellung des Differentialausdruckes in (7.) durch ein System von der Form (3.), worin q_1 und q_2 Ausdrücke der Form $\frac{\eta}{\omega}$ haben, η und ω bei $x=0$, abgesehen von diesem Punkte, einwerthig und stetig sind, kann in q_2 nicht $\omega=1$ und η in endlicher Ordnung für $x=0$ unendlich werden, weil sonst q_1 dieselbe Eigenschaft haben müsste (No. 2, (14.)), demnach die Differentialgleichung bei $x=0$ ein normales Elementarintegral hätte.

Es ergiebt sich hieraus, dass bei Aufsuchung von Systemen normaler Elementarintegrale der allgemeinen Differentialgleichung $F_M(s, x) = 0$ (1.) specielle Convergenzbetrachtungen auftreten.

Greifswald, den 5. August 1883.

Druckfehler.

S. 201 und 202 ist statt P_χ zu lesen P_x.

Lineare Constructionen zur Erzeugung der kubischen Fläche.

(Von Herrn *H. Schroeter* in Breslau.)

Unter den verschiedenen bekannten Constructionen zur Erzeugung der kubischen Fläche nehmen diejenigen ein besonderes Interesse in Anspruch, welche die Punkte der Fläche auf lineare Weise finden lassen, und von diesen sind bisher nur zwei näher betrachtet worden; es ist nämlich die kubische Fläche:

1) das Erzeugniss dreier in collineare Beziehung gesetzten (zweistufigen) Ebenenbündel und

2) das Erzeugniss dreier in trilineare Beziehung gesetzten (einstufigen) Ebenenbüschel.

Beide stammen im Wesentlichen von *Grassmann**) her, obwohl derselbe nur die erste Erzeugungsweise in dieser Form direct ausspricht (a. a. O. S. 59), während die zweite Erzeugungsweise aus dem von ihm angegebenen Princip der „stereometrischen Multiplication" folgt. Beide Erzeugungsweisen sind nun als Ausgangspunkte gewählt worden zur Ermittelung der wesentlichsten Eigenschaften der kubischen Fläche, insbesondere zur Auffindung ihrer 27 Geraden, die erstere vom Verfasser**) und in dem ausführlichen Werke von Herrn *R. Sturm****), die letztere in der Inaugural-Dissertation von Herrn *F. August*†) und neuerdings in einer Abhandlung von Herrn

*) *H. Grassmann*, Die stereometrischen Gleichungen dritten Grades und die dadurch erzeugten Oberflächen, dieses Journal Bd. 49, S. 47 ff.

**) *H. Schroeter*, Nachweis der 27 Geraden auf der allgemeinen Oberfläche dritter Ordnung, dieses Journal Bd. 62, S. 265.

***) *R. Sturm*, Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung. (*B. G. Teubner*, Leipzig 1867.)

†) *F. August*, Disquisitiones de superficiebus tertii ordinis. Dissert. inaug. Berolini 1862.

*H. Schubert**), in welcher die trilineare Beziehung als ein neues Forschungsmittel der synthetischen Geometrie aufgefasst wird.

Die oben angeführte *Grassmann*sche Abhandlung enthält noch zwei andere Constructionen zur Erzeugung der kubischen Fläche; wenn man diese der eigenthümlichen aus dem Princip der stereometrischen Multiplication entsprungenen Form entkleidet und in die gebräuchliche geometrische Sprache überträgt, indem man die projective Beziehung durch perspective Lage vermittelt, so gelangt man zu neuen sehr einfachen linearen Constructionen der kubischen Fläche, welche vor den früheren vielleicht noch den Vorzug verdienen. Auf diese hinzuweisen und zwei neue ähnlicher Art hinzuzufügen ist der Zweck der nachfolgenden Zeilen.

1. Wir beginnen der Vollständigkeit wegen mit den beiden ersten Erzeugungsweisen der kubischen Fläche in der oben angedeuteten Umgestaltung. Man kann drei Ebenenbündel dadurch in collineare Beziehung setzen, dass man sie mit einem vierten Ebenenbündel in perspective Lage bringt. Nimmt man im Raume drei beliebige Punkte

$$\mathfrak{A}_1 \quad \mathfrak{A}_2 \quad \mathfrak{A}_3$$

als Mittelpunkte dreier Ebenenbündel an und drei beliebige Ebenen

$$\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3$$

und dreht um einen vierten festen Punkt $\mathfrak{B}$ eine veränderliche Ebene ξ, welche demnach ein Ebenenbündel beschreibt, so wird ξ die drei festen Ebenen $\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3$ in drei veränderlichen Strahlen schneiden

$$|\alpha_1\xi| = x_1, \quad |\alpha_2\xi| = x_2, \quad |\alpha_3\xi| = x_3,$$

und $x_1\, x_2\, x_3$ beschreiben drei collineare Strahlenfelder in den Trägern $\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3$; legt man mit diesen perspectiv die Ebenenbündel durch $\mathfrak{A}_1\, \mathfrak{A}_2\, \mathfrak{A}_3$, so beschreibt der Schnittpunkt je dreier entsprechenden Ebenen

$$([\mathfrak{A}_1x_1][\mathfrak{A}_2x_2][\mathfrak{A}_3x_3]) = \mathfrak{x}$$

eine kubische Fläche $F^{(3)}$ als Erzeugniss dreier collinearen Ebenenbündel.

In der That, bewegen wir auf einer beliebig gewählten Geraden l einen veränderlichen Punkt $\mathfrak{y}$ und nennen die Schnittpunkte

$$(|\mathfrak{A}_1\mathfrak{y}|,\ \alpha_1) = \mathfrak{x}_1, \quad (|\mathfrak{A}_2\mathfrak{y}|,\ \alpha_2) = \mathfrak{x}_2, \quad (|\mathfrak{A}_3\mathfrak{y}|,\ \alpha_3) = \mathfrak{x}_3,$$

so beschreiben $\mathfrak{x}_1\, \mathfrak{x}_2\, \mathfrak{x}_3$ drei projective gerade Punktreihen auf den Trägern

$$|[\mathfrak{A}_1l],\ \alpha_1|, \quad |[\mathfrak{A}_2l],\ \alpha_2|, \quad |[\mathfrak{A}_3l],\ \alpha_3|,$$

*) *H. Schubert*, Die trilineare Beziehung zwischen drei einstufigen Grundgebilden. Math. Annalen von *Klein* und *Mayer*, Bd. 17, S. 457.

welche mit der von $\mathfrak{y}$ beschriebenen geraden Punktreihe perspectiv liegen; folglich wird die Verbindungsebene $[\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3]$ als Schmiegungsebene eine Raumcurve dritter Klasse $\mathfrak{K}^{(3)}$ umhüllen, und es werden durch den Punkt $\mathfrak{B}$ im Allgemeinen drei Schmiegungsebenen derselben gehen. Eine solche Schmiegungsebene durch $\mathfrak{B}$ schneidet aber $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3$ in den Geraden $x_1 x_2 x_3$, welche bez. die Punkte $\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_2\,\mathfrak{x}_3$ enthalten, und da die Ebene $[\mathfrak{A}_1 x_1]$ durch die beiden Punkte $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{x}_1$ geht, also die Gerade $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{x}_1|$ ganz enthält, so geht sie auch durch den Punkt $\mathfrak{y}$ auf ihr; also schneiden sich drei entsprechende Ebenen der drei collinearen Ebenenbündel $[\mathfrak{A}_1]\,[\mathfrak{A}_2]\,[\mathfrak{A}_3]$ in einem Punkte der Geraden l, und da dies dreimal vorkommt, so ist ihr Erzeugniss eine kubische Fläche $F^{(3)}$.

Diese Construction ist schon vor langer Zeit von Herrn *Salmon* in dem Satze ausgesprochen: *„Wenn die vier Seitenflächen eines veränderlichen Tetraëders sich um vier feste Punkte* $(\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_2\,\mathfrak{A}_3\,\mathfrak{B})$ *drehen und die drei Kanten einer Seitenfläche sich in drei festen Ebenen* $(\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3)$ *bewegen, so beschreibt die dieser Seitenfläche gegenüberliegende Ecke des Tetraëders eine kubische Fläche* $F^{(3)}$.*"* Allein die Fläche ist, wie zuerst Herr *Sturm* bemerkt zu haben scheint (a. a. O. S. 351) ***nicht allgemein***, sondern sie besitzt einen ***Knotenpunkt***.

Bezeichnen wir nämlich die Schnittlinien der drei Ebenen $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3$ folgendermassen

$$|\alpha_2\alpha_3| = s_1, \quad |\alpha_3\alpha_1| = s_2, \quad |\alpha_1\alpha_2| = s_3$$

und den Schnittpunkt

$$(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = \mathfrak{P},$$

so wird, wenn wir die veränderliche Ebene ξ durch die beiden Punkte $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}_3$ gehen lassen, die Ebene $[\mathfrak{A}_3 x_3]$ mit ξ identisch sein; die beiden Strahlen x_1 und x_2 werden sich aber in einem Punkte der Schnittlinie s_3 treffen, nämlich in dem Treffpunkte von s_3 mit ξ; dieser Punkt ist daher ein Schnittpunkt dreier entsprechenden Ebenen $[\mathfrak{A}_1 x_1]\,[\mathfrak{A}_2 x_2]\,[\mathfrak{A}_3 x_3]$, d. h. ein Punkt der kubischen Fläche $F^{(3)}$. Drehen wir nun die Ebene ξ um den Strahl $|\mathfrak{B}\mathfrak{A}_3|$, so folgt, dass alle Punkte von s_3, also die ganze Gerade s_3 und in gleicher Weise auch die Geraden s_1 und s_2 der $F^{(3)}$ angehören, woraus folgt, dass der Punkt $\mathfrak{P}$ ein Knotenpunkt der kubischen Fläche sein muss, weil durch ihn drei Gerade dieser Fläche gehen. Wir erkennen auch leicht, dass noch drei andere der $F^{(3)}$ angehörige Gerade durch den Knotenpunkt $\mathfrak{P}$ derselben gehen. Denn drehen wir die veränderliche Ebene ξ um den

Strahl $|\mathfrak{B}\mathfrak{P}|$, so beschreibt sie ein Ebenenbüschel und schneidet $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3$ in drei Strahlen $x_1\,x_2\,x_3$, welche drei projective Strahlbüschel in den Ebenen $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3$ beschreiben mit dem gemeinsamen Mittelpunkt $\mathfrak{P}$. Die drei Ebenen $[\mathfrak{A}_1 x_1]\,[\mathfrak{A}_2 x_2]\,[\mathfrak{A}_3 x_3]$ werden also drei projective Ebenenbüschel beschreiben um die Axen $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{P}|\,|\mathfrak{A}_2\mathfrak{P}|\,|\mathfrak{A}_3\mathfrak{P}|$, und es wird im Allgemeinen dreimal vorkommen, dass sich drei entsprechende Ebenen in einer Geraden schneiden: denn die beiden von $[\mathfrak{A}_1 x_1]$ und $[\mathfrak{A}_2 x_2]$ beschriebenen projectiven Ebenenbüschel erzeugen einen Kegel $\mathfrak{K}_{12}^{(2)}$, und die beiden von $[\mathfrak{A}_1 x_1]$ und $[\mathfrak{A}_3 x_3]$ beschriebenen projectiven Ebenenbüschel erzeugen einen Kegel $\mathfrak{K}_{13}^{(2)}$; beide Kegel haben ausser dem gemeinsamen Kegelstrahl $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{P}|$ im Allgemeinen noch drei andere gemeinsame Kegelstrahlen $l_1\,l_2\,l_3$, welche die Eigenschaft haben müssen, dass sich in ihnen je drei entsprechende Ebenen $[\mathfrak{A}_1 x_1]\,[\mathfrak{A}_2 x_2]\,[\mathfrak{A}_3 x_3]$ schneiden. Durch diese drei Strahlen $l_1\,l_2\,l_3$ geht also auch der Kegel $\mathfrak{K}_{23}^{(2)}$, welcher von den projectiven Ebenenbüscheln erzeugt wird, die $[\mathfrak{A}_2 x_2]$ und $[\mathfrak{A}_3 x_3]$ beschreiben.

Durch den Knotenpunkt $\mathfrak{P}$ der kubischen Fläche $F^{(3)}$ gehen daher die sechs der Fläche angehörigen Geraden

$$s_1\quad s_2\quad s_3\quad l_1\quad l_2\quad l_3,$$

welche doppelt zählen, also zwölf Gerade der kubischen Fläche vertreten; die übrigen fünfzehn Geraden der $F^{(3)}$ erhalten wir, indem wir durch je zwei der vorigen sechs Geraden eine Ebene legen, welche allemal noch eine dritte Gerade der $F^{(3)}$ enthalten muss.

Was die Realität dieser Geraden anbelangt, so ist klar, dass $s_1\,s_2\,s_3$ reell (gegeben) sind; von den drei Geraden $l_1\,l_2\,l_3$ muss mindestens eine, l_1, reell sein; die beiden anderen können conjugirt-imaginär sein, müssen aber in einer reellen Ebene liegen, welche daher nothwendig noch eine reelle Gerade g_1 enthalten muss; es sind also immer elf Gerade reell; die vier $s_1\,s_2\,s_3\,l_1$, die sechs, welche in den Ebenen als dritte liegen, die je zwei der vorigen verbinden, und die einzige Gerade g_1 in der reellen Ebene $[l_2\,l_3]$: die übrigen zehn können imaginär sein (vgl. *Sturm* a. a. O. S. 352).

2. Indem wir zur zweiten Erzeugungsweise der kubischen Fläche übergehen, nehmen wir drei beliebige Gerade im Raume

$$a_1\quad a_2\quad a_3$$

(von denen keine zwei einander begegnen) als Axen dreier Ebenenbüschel an und setzen dieselben dadurch in trilineare Beziehung, dass wir drei andere Gerade

$$b_1 \quad b_2 \quad b_3$$

(unabhängig von einander und von den vorigen) und ausserdem einen festen Punkt $\mathfrak{B}$ annehmen. Drehen wir dann um $\mathfrak{B}$ eine veränderliche Ebene ξ, welche demnach ein Ebenenbündel beschreibt, so wird ξ die drei festen Geraden $b_1\, b_2\, b_3$ in den veränderlichen Punkten

$$(b_1\xi) = \mathfrak{x}_1, \quad (b_2\xi) = \mathfrak{x}_2, \quad (b_3\xi) = \mathfrak{x}_3,$$

schneiden, welche drei gerade Punktreihen auf den Trägern $b_1\, b_2\, b_3$ beschreiben, die in trilinearer Beziehung stehen; legt man mit diesen perspectiv die Ebenenbüschel durch $a_1\, a_2\, a_3$, so beschreibt der Schnittpunkt je dreier entsprechenden Ebenen

$$([a_1\mathfrak{x}_1]\,[a_2\mathfrak{x}_2]\,[a_3\mathfrak{x}_3]) = \mathfrak{x}$$

eine kubische Fläche $F^{(3)}$ als Erzeugniss dreier in trilinearer Beziehung stehenden Ebenenbüschel. In der That, bewegen wir auf einer beliebig gewählten Geraden l einen veränderlichen Punkt $\mathfrak{y}$ und legen die drei Ebenen $[a_1\mathfrak{y}]\,[a_2\mathfrak{y}]\,[a_3\mathfrak{y}]$, welche den Geraden $b_1\, b_2\, b_3$ bez. in den Punkten $\mathfrak{x}_1\, \mathfrak{x}_2\, \mathfrak{x}_3$ begegnen, so beschreiben $\mathfrak{x}_1\, \mathfrak{x}_2\, \mathfrak{x}_3$ drei projective gerade Punktreihen auf den Trägern $b_1\, b_2\, b_3$, welche mit der von $\mathfrak{y}$ beschriebenen geraden Punktreihe perspectiv liegen; folglich wird die Verbindungsebene $[\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3]$ als Schmiegungsebene eine Raumcurve dritter Klasse $\mathfrak{K}^{(3)}$ umhüllen, und es werden durch den Punkt $\mathfrak{B}$ im Allgemeinen drei Schmiegungsebenen derselben gehen. Eine solche Schmiegungsebene durch $\mathfrak{B}$ trifft aber $b_1\, b_2\, b_3$ bez. in drei Punkten $\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3$ dergestalt, dass $[a_1\mathfrak{x}_1]\,[a_2\mathfrak{x}_2]\,[a_3\mathfrak{x}_3]$ sich in einem Punkte der Geraden l schneiden, und da dies dreimal vorkommt, so ist der gesuchte Ort von $\mathfrak{x}$ eine kubische Fläche $F^{(3)}$. Diese kubische Fläche ist *allgemein* und wir können ihre 27 Geraden auf folgende Art finden:

Halten wir einen beliebigen Punkt $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{x}_1$ auf b_1 fest und drehen die veränderliche Ebene ξ um die Axe $|\mathfrak{B}\mathfrak{b}_1|$, so bleibt die Ebene $[a_1\mathfrak{b}_1]$ fest; die Punkte $\mathfrak{x}_2$ und $\mathfrak{x}_3$ beschreiben projective Punktreihen auf b_2 und b_3, folglich die Ebenen $[a_2\mathfrak{x}_2]\,[a_3\mathfrak{x}_3]$ projective Ebenenbüschel, welche auf der festen Ebene $[a_1\mathfrak{b}_1]$ zwei projective Strahlenbüschel ausschneiden, deren Erzeugniss ein Kegelschnitt ist; also beschreibt der Punkt $\mathfrak{x}$ bei dieser Bewegung in der festen Ebene $[a_1\mathfrak{b}_1]$ einen Kegelschnitt, welcher durch die beiden Mittelpunkte der erzeugenden Strahlenbüschel hindurchgeht. Diese beiden Mittelpunkte sind aber die Treffpunkte von a_2 und a_3 mit der Ebene $[a_1\mathfrak{b}_1]$; da aber der Punkt $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{x}_1$ willkürlich auf b_1 gewählt war, so gehören alle Punkte von a_2 und a_3, mithin auch alle drei Geraden $a_1\, a_2\, a_3$ ganz der kubischen Fläche an.

Wählen wir andererseits für die veränderliche Ebene ξ die besondere durch $\mathfrak{B}$ und b_1 gelegte Ebene, so wird der Punkt $\mathfrak{x}_1$ unbestimmt, also auch die Ebene $[a_1\mathfrak{x}_1]$ und für dieselbe kann jede durch a_1 gelegte Ebene genommen werden. Schneidet daher die Ebene $\xi = [\mathfrak{B}b_1]$ die Geraden b_2 und b_3 in den Punkten

$$([\mathfrak{B}b_1],\ b_2) = \mathfrak{p}_2, \quad ([\mathfrak{B}b_1],\ b_3) = \mathfrak{p}_3,$$

so muss die Schnittlinie

$$|[a_2\mathfrak{p}_2],\ [a_3\mathfrak{p}_3]| = g_{23}$$

ganz der kubischen Fläche angehören, weil jeder ihrer Punkte als ein Schnittpunkt dreier entsprechenden Ebenen der erzeugenden Büschel angesehen werden darf.

In gleicher Weise erhalten wir zwei weitere Gerade auf der kubischen Fläche durch die Construction:

$$([\mathfrak{B}b_2],\ b_3) = \mathfrak{q}_3, \quad ([\mathfrak{B}b_2],\ b_1) = \mathfrak{q}_1,$$
$$([\mathfrak{B}b_3],\ b_1) = \mathfrak{r}_1, \quad ([\mathfrak{B}b_3],\ b_2) = \mathfrak{r}_2,$$
$$|[a_3\mathfrak{q}_3],\ [a_1\mathfrak{q}_1]| = g_{13}, \quad |[a_1\mathfrak{r}_1],\ [a_2\mathfrak{r}_2]| = g_{12}.$$

Zu den drei Geraden $g_{12}\, g_{13}\, g_{23}$, welche auf der kubischen Fläche liegen, treten noch drei andere: es giebt nämlich durch $\mathfrak{B}$ nur eine einzige Gerade, die gleichzeitig b_1 und b_2 trifft, dies ist die Verbindungslinie $|\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_1|$. Drehen wir um diese Gerade die veränderliche Ebene ξ, so bleiben die beiden Punkte $\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{x}_2$ und $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{x}_1$ fest, während $\mathfrak{x}_3$ auf b_3 sich verändert; der gesuchte Punkt $\mathfrak{x}$ wird sich also auf der Geraden $|[a_2\mathfrak{p}_2], [a_1\mathfrak{q}_1]| = l_{12}$ verändern, d. h. diese Gerade wird der kubischen Fläche angehören und in gleicher Weise die beiden analogen, so dass wir die drei neuen Geraden erhalten:

$$|[a_2\mathfrak{p}_2],\ [a_1\mathfrak{q}_1]| = l_{12}, \quad |[a_3\mathfrak{p}_3],\ [a_1\mathfrak{r}_1]| = l_{13}, \quad |[a_2\mathfrak{r}_2],\ [a_3\mathfrak{q}_3]| = l_{23}.$$

Aus der Construction dieser sechs Geraden $g_{12}\, g_{13}\, g_{23}\, l_{12}\, l_{13}\, l_{23}$ der kubischen Fläche $F^{(3)}$ erkennen wir, dass dieselben zu je dreien in sechs Ebenen liegen; da nämlich die Ebene $[a_1\mathfrak{r}_1]$ sowohl die Gerade g_{12} als auch die Gerade l_{13} enthält, so liegen $a_1\, g_{12}\, l_{13}$ in einer Ebene, und da die Ebene $[a_1\mathfrak{q}_1]$ sowohl die Gerade l_{12} als auch die Gerade g_{13} enthält, so liegen auch die drei Geraden $a_1\, l_{12}\, g_{13}$ in einer Ebene, und in ähnlicher Weise die übrigen, so dass wir alle neun Geraden in folgender Art zusammenstellen können:

$$\begin{array}{ccc} a_1 & g_{12} & l_{13} \\ l_{12} & a_2 & g_{23} \\ g_{13} & l_{23} & a_3 \end{array}$$

wo immer je drei in einer Horizontalreihe und je drei in einer Verticalreihe stehende Gerade in einer Ebene enthalten sind. Diese neun Geraden bilden also zwei *Steiner*sche Trieder (s. *Schroeter* a. a. O. S. 275), aus denen sich die übrigen Geraden der kubischen Fläche ergeben.

Denken wir uns die ganze Regelschaar von Geraden l_r gelegt, welche den drei Geraden $a_1\, a_2\, a_3$ gleichzeitig begegnen, so beschreiben die Ebenen

$$[a_1 l_r] \quad [a_2 l_r] \quad [a_3 l_r]$$

drei projective Ebenenbüschel, welche bez. die drei Geraden $b_1\, b_2\, b_3$ in drei projectiven Punktreihen $\mathfrak{x}_1\, \mathfrak{x}_2\, \mathfrak{x}_3$ schneiden. Die Verbindungsebene $[\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 \mathfrak{x}_3]$ wird daher als Schmiegungsebene eine Raumcurve dritter Klasse $\mathfrak{K}^{(3)}$ umhüllen, und es wird im Allgemeinen dreimal vorkommen, dass die Ebene $[\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 \mathfrak{x}_3]$ durch den Punkt $\mathfrak{P}$ geht. Ist dieses einmal der Fall, so müssen drei entsprechende Ebenen $[a_1 \mathfrak{x}_1][a_2 \mathfrak{x}_2][a_3 \mathfrak{x}_3]$ sich in einer Geraden l_r schneiden, welche offenbar ganz der kubischen Fläche $F^{(3)}$ angehört.

Wir haben also drei neue Gerade $l_1\, l_2\, l_3$ der kubischen Fläche, von denen mindestens eine reell sein muss, weil von den drei Schmiegungsebenen aus $\mathfrak{P}$ an die Raumcurve $\mathfrak{K}^{(3)}$ mindestens eine reell ist. Nehmen wir eine derselben l_1, so muss jede der Ebenen

$$[a_1 l_1] \quad [a_2 l_1] \quad [a_3 l_1]$$

die kubische Fläche noch in einer dritten Geraden schneiden, die bez.

$$k_{11} \quad k_{21} \quad k_{31}$$

heissen mögen; es liegen also $a_1\, l_1\, k_{11}$ in einer Ebene, ausserdem auch $l_{12}\, a_2\, g_{23}$ in einer Ebene; die Schnittlinie beider Ebenen enthält schon zwei Punkte der $F^{(3)}$, nämlich die Punkte $(a_1 l_{12})$ und $(l_1 a_2)$ und kann ihr nicht ganz angehören, weil sonst vier Gerade der $F^{(3)}$ in einer Ebene liegen würden, folglich kann sie nur noch einen dritten Punkt der $F^{(3)}$ enthalten, in dem sich daher nothwendig die beiden Geraden k_{11} und g_{23} treffen müssen; in gleicher Weise sehen wir, weil $a_1\, l_1\, k_{11}$ in einer Ebene, $g_{13}\, a_3\, l_{23}$ in einer Ebene liegen und die Schnittlinie, welche nicht ganz der $F^{(3)}$ angehören kann, schon zwei Punkte $(a_1 g_{13})$ und $(l_1 a_3)$ derselben enthält, dass sie noch einen einzigen dritten Punkt von ihr enthalten muss, in dem sich k_{11} und l_{23} treffen.

Also trifft $\quad k_{11}$ die g_{23} und l_{23},
ebenso $\quad k_{21}$ die g_{13} und l_{13}
und $\quad k_{31}$ die g_{12} und l_{12}.

Betrachten wir ferner die beiden Ebenen

$$[k_{11}g_{23}] \text{ und } [k_{21}g_{13}],$$

deren jede noch eine dritte Gerade der $F^{(3)}$ enthalten muss, so muss die Schnittlinie beider Ebenen vier Punkte der $F^{(3)}$ enthalten, also ihr ganz angehören; denn es begegnen sich, wie leicht zu sehen ist, weder k_{11} und k_{21}, noch g_{13} und g_{23}, noch k_{11} und g_{13}, noch k_{21} und g_{23}. In gleicher Weise erkennen wir, dass die Schnittlinie der beiden Ebenen

$$[k_{11}g_{23}] \quad \text{und} \quad [k_{31}g_{12}]$$

ganz der kubischen Fläche angehören muss; weil aber die Ebene $[k_{11}g_{23}]$ nur noch eine einzige dritte Gerade der $F^{(3)}$ enthalten kann, so muss die letztere mit der vorigen identisch sein, d. h. die drei Ebenen $[k_{11}g_{23}]$ $[k_{21}g_{13}]$ $[k_{31}g_{12}]$ schneiden sich in einer Geraden m_1, und in gleicher Weise sehen wir, dass die drei Ebenen $[k_{11}l_{23}]$ $[k_{21}l_{13}]$ $[k_{31}l_{12}]$ sich in einer Geraden n_1 schneiden.

Wir haben also zu den früheren neun Geraden sechs neue

$$l_1 \quad m_1 \quad n_1 \quad k_{11} \quad k_{21} \quad k_{31}$$

auf der kubischen Fläche ermittelt, die aus der ersten l_1 hervorgingen. Da wir nun im Allgemeinen drei solche Gerade $l_1\, l_2\, l_3$ haben, von denen allerdings nur eine reell zu sein braucht, so ergeben sich im Ganzen $9+3.6=27$ Gerade auf der kubischen Fläche $F^{(3)}$, von denen nothwendig 15 reell sein müssen, während die übrigen 12 imaginär sein können.

3. Für die dritte Erzeugungsweise der kubischen Fläche nehmen wir nur zwei im Raume sich nicht treffende Gerade

$$a_1 \quad a_2$$

als Axen zweier Ebenenbüschel an, ferner einen beliebigen Punkt $\mathfrak{P}$ als Mittelpunkt eines Ebenenbündels und zur Vermittelung der Beziehung der Elemente dieser Gebilde auf einander zwei Gerade im Raume

$$b_1 \quad b_2,$$

die sich nicht begegnen. Drehen wir nun um $\mathfrak{P}$ eine veränderliche Ebene ξ, welche die festen Geraden $b_1\, b_2$ in den veränderlichen Punkten

$$(\xi b_1) = \mathfrak{x}_1 \quad (\xi b_2) = \mathfrak{x}_2$$

schneiden, und legen durch $a_1\, a_2$ Ebenenbüschel, welche bez. mit den Punktreihen $\mathfrak{x}_1\, \mathfrak{x}_2$ perspectiv sind, so beschreibt der Schnittpunkt der drei entsprechenden Ebenen

$$(\xi, [a_1\mathfrak{x}_1], [a_2\mathfrak{x}_2]) = \mathfrak{x}$$

eine kubische Fläche $F^{(3)}$.

In der That, bewegen wir auf einer beliebig gewählten Geraden l einen veränderlichen Punkt $\mathfrak{y}$ und legen die beiden Ebenen

$$[a_1\mathfrak{y}] \text{ und } [a_2\mathfrak{y}],$$

welche den Geraden $b_1\, b_2$ bez. in den Punkten $\mathfrak{x}_1\, \mathfrak{x}_2$ begegnen, so beschreiben $\mathfrak{y}\, \mathfrak{x}_1\, \mathfrak{x}_2$ drei projective gerade Punktreihen auf den Trägern $l\, b_1\, b_2$, folglich wird die Verbindungsebene $[\mathfrak{y}\, \mathfrak{x}_1\, \mathfrak{x}_2]$ als Schmiegungsebene eine Raumcurve dritter Klasse $\mathfrak{K}^{(3)}$ umhüllen, und es werden durch den Punkt $\mathfrak{P}$ im Allgemeinen drei Schmiegungsebenen derselben gehen; eine solche Schmiegungsebene durch $\mathfrak{P}$ ist aber eine Ebene ξ, welche $b_1\, b_2$ bez. in Punkten $\mathfrak{x}_1\, \mathfrak{x}_2$ trifft dergestalt, dass die drei Ebenen $\xi\, [a_1\mathfrak{x}_1]\, [a_2\mathfrak{x}_2]$ sich in einem Punkte der Geraden l schneiden, und da dies dreimal vorkommt, so ist der gesuchte Ort von $\mathfrak{x}$ eine kubische Fläche $F^{(3)}$.

Bevor wir von dieser Erzeugungsweise der kubischen Fläche aus die Geraden derselben aufsuchen, wollen wir noch eine andere Auffassung der Erzeugung hervorheben. Die beiden Ebenen $[a_1\mathfrak{x}_1]$ und $[a_2\mathfrak{x}_2]$ schneiden sich nämlich in einem Strahle x, welcher den beiden festen Strahlen $a_1\, a_2$ gleichzeitig begegnet. Die Gesammtheit solcher Strahlen x, welche zweien festen Strahlen $a_1\, a_2$ gleichzeitig begegnen, bildet ein Strahlensystem erster Ordnung und erster Klasse*), weil durch jeden Punkt nur ein Strahl des Systems geht und in jeder Ebene nur ein Strahl des Systems liegt. Ein solches Strahlensystem ist ein Gebilde von doppelter Unendlichkeit (Mannichfaltigkeit) und von gleicher Mächtigkeit mit den Ebenen eines Ebenenbündels (oder überhaupt irgend eines zweistufigen Gebildes). Die Ebenen ξ, welche durch den festen Punkt $\mathfrak{P}$ gehen, bilden ein Ebenenbündel; der Ort des Durchschnittspunktes

$$(x, \xi) = \mathfrak{x}$$

ist also das ***Erzeugniss zweier zweistufigen Gebilde, eines Strahlensystems und eines Ebenenbündels,*** deren Elemente in Beziehung zu einander gesetzt sind. Die Art dieser Abhängigkeit entsprechender Elemente von einander wird aber in ganz ähnlicher Weise hergestellt, wie dies bei zweistufigen Gebilden überhaupt zu geschehen pflegt**). Jeder Strahl x des Strahlensystems kann als Schnitt zweier Ebenen

$$[a_1 x]\quad [a_2 x]$$

---

*) Eine eingehende Beschreibung desselben hat Herr *Reye* in seiner *„Geometrie der Lage“* zweite Abth. S. 77 gegeben.

**) Siehe des Verfassers: *Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumcurven dritter Ordnung,* Leipzig 1880, S. 341 ff.

aufgefasst werden, und bei Veränderung des Strahles x beschreiben diese Ebenen zwei Ebenenbüschel, die ganz unabhängig von einander sind. Jede Ebene des Ebenenbündels $\mathfrak{B}$ kann als Verbindungsebene zweier Strahlen $y_1 y_2$ aufgefasst werden, die in zwei festen Ebenen $\alpha_1 \alpha_2$ liegen, welche durch $\mathfrak{B}$ gelegt sind. Ist die Ebene ξ eine ganz willkürliche durch den Punkt $\mathfrak{B}$ gehende, so sind auch die Strahlbüschel, welche

$$|\alpha_1 \xi| \quad |\alpha_2 \xi|$$

beschreiben, durchaus unabhängig von einander. Setzt man nun das Ebenenbüschel $[a_1 x]$ zu dem Strahlbüschel $|\alpha_1 \xi|$ und das Ebenenbüschel $[a_2 x]$ zu dem Strahlbüschel $|\alpha_2 \xi|$ projectiv:

$$[a_1 x] \;\overline{\wedge}\; |\alpha_1 \xi|, \quad [a_2 x] \;\overline{\wedge}\; |\alpha_2 \xi|,$$

dann wird dadurch zu jedem Strahl x des Strahlensystems $[a_1 a_2]$ eine bestimmte Ebene ξ des Ebenenbündels $\mathfrak{B}$ entsprechend zugeordnet, und die Beziehung ist gewonnen. In unserem obigen Falle sind die festen Ebenen

$$\alpha_1 = [\mathfrak{B} b_1] \quad \alpha_2 = [\mathfrak{B} b_2]$$

und die beiden Projectivitäten sind dadurch hergestellt, dass auf b_1 eine Punktreihe $\mathfrak{x}_1$ perspectiv liegt sowohl mit dem Ebenenbüschel, dessen Axe a_1 ist, als auch mit dem Strahlbüschel, dessen Mittelpunkt $\mathfrak{B}$ ist in der Ebene α_1, andererseits auf b_2 eine Punktreihe $\mathfrak{x}_2$ perspectiv liegt sowohl mit dem Ebenenbüschel, dessen Axe a_2 ist, als auch mit dem Strahlbüschel, dessen Mittelpunkt $\mathfrak{B}$ ist in der Ebene α_2.

Wenn die beiden Axen $a_1 a_2$ der das Strahlensystem erzeugenden Ebenenbüschel sich in einem Punkte treffen, so gehen durch denselben alle Strahlen des Systems und es degenerirt in ein gewöhnliches Strahlenbündel. Die Beziehung dieses Strahlenbündels zum Ebenenbündel $\mathfrak{B}[\xi]$ ist aber noch nicht die bekannte „Reciprocität“, sondern allgemeinerer Art; sie wird erst dann zur reciproken Beziehung, wenn der Ebene $[a_1 a_2]$ in beiden Projectivitäten gleichzeitig der Schnittstrahl $|\alpha_1 \alpha_2|$ entsprechend ist. Jene allgemeinere Verwandtschaft der beiden Bündel ist eine quadratische, weil allen solchen Ebenen des Bündels $\mathfrak{B}[\xi]$, welche durch einen Strahl gehen, die Strahlen eines Kegels zweiter Ordnung im Strahlenbündel $(a_1 a_2)$ entsprechen. Wir erhalten hierdurch eine besondere Erzeugungsweise einer kubischen Fläche $F^{(3)}$, welche hier vorangeschickt werden mag.

Gegeben sind zwei Strahlen $a_1 a_2$, die sich in einem Punkte $\mathfrak{A}$ treffen, ausserdem ein fester Punkt $\mathfrak{B}$, und zwei beliebige Gerade $b_1 b_2$ im Raume; dreht sich um $\mathfrak{B}$ eine veränderliche Ebene ξ, welche b_1 und b_2 in den

Punkten $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ trifft, und ist die Schnittlinie

$$|[a_1\mathfrak{x}_1],\ [a_2\mathfrak{x}_2]| = x,$$

so beschreibt die Ebene ξ ein Ebenenbündel um $\mathfrak{B}$, der Strahl x ein Strahlenbündel um $\mathfrak{A}$ und der Schnittpunkt je zweier entsprechenden Elemente

$$(x, \xi) = \mathfrak{x}$$

beschreibt eine kubische Fläche $F^{(3)}$, wie bereits am Anfange von 3. nachgewiesen ist.

Diese kubische Fläche ist aber nicht allgemein, sondern hat in $\mathfrak{A}$ einen ***Knotenpunkt***. Denn nehmen wir einen beliebigen Punkt $\mathfrak{a}_1$ der Geraden a_1 und lassen die veränderliche Ebene ξ durch $|\mathfrak{B}\mathfrak{a}_1|$ gehen, so beschreibt sie ein Ebenenbüschel, welches mit den beiden Ebenenbüscheln, welche $[a_1\mathfrak{x}_1]$ und $[a_2\mathfrak{x}_2]$ beschreiben, projectiv ist. Der Ort des Schnittpunktes $(x\xi) = \mathfrak{x}$ wird also eine Raumcurve dritter Ordnung $C^{(3)}$, welche $a_1\ a_2$ und $|\mathfrak{B}\mathfrak{a}_1|$ zu Secanten hat, folglich durch Punkt $\mathfrak{a}_1$, der zwei Secanten gemeinsam ist, selbst hindurchgehen muss. Da aber der Punkt $\mathfrak{a}_1$ auf a_1 ganz willkürlich gewählt war, so gehört die ganze Gerade a_1 und ebenso die Gerade a_2 der kubischen Fläche an.

Ziehen wir ferner die Schnittlinie

$$|[\mathfrak{B}b_1],\ [\mathfrak{B}b_2]| = a,$$

welche den Geraden b_1 und b_2 in den Punkten $\mathfrak{b}_1\ \mathfrak{b}_2$ bez. begegnen mag, und drehen die veränderliche Ebene ξ um die Axe a, so bleiben die Punkte $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$ fest, folglich müssen alle Punkte der Schnittlinie

$$|[a_1\mathfrak{b}_1],\ [a_2\mathfrak{b}_2]| = a_3$$

der kubischen Fläche angehören, d. h. diese selbst auf ihr liegen, und da sich $a_1\ a_2\ a_3$ in dem Punkte $\mathfrak{A}$ treffen, so ist er ein Knotenpunkt der kubischen Fläche. In der That zeigt sich auch, dass durch ihn noch drei andere der kubischen Fläche angehörige Gerade hindurchgehen; denn drehen wir die veränderliche Ebene ξ um die Axe $|\mathfrak{B}\mathfrak{A}|$, so beschreiben die drei veränderlichen Ebenen $\xi\ [a_1\mathfrak{x}_1]\ [a_2\mathfrak{x}_2]$ drei projective Ebenenbüschel um die Axen $|\mathfrak{B}\mathfrak{A}|$, $a_1\ a_2$, welche alle drei durch denselben Punkt $\mathfrak{A}$ gehen, und die drei Kegel, welche je zwei derselben erzeugen, haben im Allgemeinen drei gemeinschaftliche Strahlen $s_1\ s_2\ s_3$, von denen nothwendig einer reell sein muss; durch den Knotenpunkt $\mathfrak{A}$ der kubischen Fläche gehen also die sechs Geraden derselben

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad s_1 \quad s_2 \quad s_3,$$

die doppelt zählen und aus denen die 15 übrigen in bekannter Weise folgen (s. o. 1.). Dass auch der Punkt $\mathfrak{B}$ auf der kubischen Fläche liegt, erhellt unmittelbar, weil dem Strahl $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ des Strahlenbündels $|\mathfrak{A}|$ eine bestimmte Ebene des Ebenenbündels $[\mathfrak{B}]$ entspricht. Den beiden zusammenfallenden Ebenen $[a_1 a_2]$ oder $[a_2 a_1]$ in den Ebenenbüscheln, welche das Strahlenbündel $[\mathfrak{A}]$ erzeugen, entsprechen im Allgemeinen zwei verschiedene Strahlen in den Ebenen $[\mathfrak{B} b_1]$ und $[\mathfrak{B} b_2]$, und die Verbindungsebene derselben schneidet daher die Ebene $[a_1 a_2]$ in der dritten Geraden, welche in dieser Ebene der $F^{(3)}$ angehört. Tritt aber der besondere Fall ein, dass für beiderlei Projectivitäten der Ebene $[a_1 a_2]$ und der Ebene $[a_2 a_1]$ derselbe Strahl

$$|[\mathfrak{B} b_1],\ [\mathfrak{B} b_2]| = a$$

der entsprechende ist, dann wird die Verbindungsebene jede durch a gehende sein können; also gehört jeder durch $\mathfrak{A}$ gehende Strahl in der Ebene $[a_1 a_2]$ der $F^{(3)}$ an, und dieselbe zerfällt, indem die Ebene $[a_1 a_2]$ als ein Theil von ihr herausgeht. Es bleibt daher als übriger Ort von (x, ξ) nur noch eine Fläche zweiter Ordnung $F^{(2)}$ übrig; und in der That wird in diesem Fall die Beziehung des Strahlenbündels $|\mathfrak{A}|$ zum Ebenenbündel $|\mathfrak{B}|$ die bekannte Reciprocität, wie schon oben bemerkt ist.

Die kubische Fläche kann auch dadurch zerfallen, dass wir den Punkt $\mathfrak{B}$ in die Ebene $[a_1 a_2]$ hineinverlegen; dann erscheint diese Ebene $[a_1 a_2]$ als eine besondere Ebene ξ, welche mit ihren beiden entsprechenden incident ist, also als ein Theil der kubischen Fläche herausgeht; es bleibt nur noch eine Fläche zweiter Ordnung übrig $F^{(2)}$, für welche sich folgende Construction ergiebt:

Sind in einer Ebene zwei feste Gerade $a_1\ a_2$ und ein Punkt $\mathfrak{B}$ gegeben, ausserdem beliebig im Raume zwei Gerade $b_1\ b_2$, und dreht man um $\mathfrak{B}$ eine veränderliche Ebene ξ, welche b_1 im Punkte $\mathfrak{x}_1$ und b_2 im Punkte $\mathfrak{x}_2$ trifft, legt man endlich die Ebenen $[a_1 \mathfrak{x}_1] = \xi_1$, $[a_2 \mathfrak{x}_2] = \xi_2$, so beschreibt der Punkt

$$(\xi \xi_1 \xi_2) = \mathfrak{x}$$

eine Fläche zweiter Ordnung $F^{(2)}$. Dieselbe ist immer eine geradlinige (einschaliges Hyperboloid); denn ihr gehört die auf folgende Weise construirte Gerade a_3 an:

$$([\mathfrak{B} b_2], b_1) = \mathfrak{b}_1, \quad ([\mathfrak{B} b_1], b_2) = \mathfrak{b}_2, \quad |[a_1 \mathfrak{b}_1], [a_2 \mathfrak{b}_2]| = a_3.^{*)}$$

*) Diese Construction ist in der von Herrn *O. Zimmermann* angegebenen „Erzeugung der geradlinigen Flächen zweiter Ordnung durch Punkte" enthalten, *Schlömilchs* Zeitschrift f. Math. u. Phys. Jahrgg. 1883. S. 255.

4. Wir kehren nunmehr zurück zu der im Eingange von 3. construirten kubischen Fläche, um die auf derselben liegenden Geraden zu ermitteln. Die obige Construction war folgende:

Vier einander im Raum nicht treffende Gerade

$$a_1 \quad a_2 \quad b_1 \quad b_2$$

und ein beliebiger Punkt $\mathfrak{B}$ sind gegeben; man dreht um $\mathfrak{B}$ eine veränderliche Ebene ξ, welche b_1 und b_2 in $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ trifft, und legt die beiden Ebenen

$$[a_1\mathfrak{x}_1] = \xi_1, \quad [a_2\mathfrak{x}_2] = \xi_2,$$

dann hat der Schnittpunkt je dreier entsprechenden Ebenen

$$(\xi\xi_1\xi_2) = \mathfrak{x}$$

zum Ort eine kubische Fläche $F^{(3)}$.

Halten wir zunächst einen beliebigen Punkt der Geraden b_1 fest (er sei $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{x}_1$) und drehen die veränderliche Ebene ξ um den Strahl $|\mathfrak{B}\mathfrak{b}_1|$, so bleibt die Ebene $[a_1\mathfrak{b}_1] = \xi_1$ unverändert, während ξ und ξ_2 projective Ebenenbüschel beschreiben, welche mit der Punktreihe $\mathfrak{x}_2$ auf b_2 perspectiv liegen; die beiden projectiven Ebenenbüschel durchschneiden die feste Ebene ξ_1 in projectiven Strahlbüscheln, deren Mittelpunkte $\mathfrak{b}_1$ und der Treffpunkt $([a_1\mathfrak{b}_1], a_2) = \mathfrak{a}_2$ sind. Die projectiven Strahlbüschel erzeugen einen Kegelschnitt, der durch ihre Mittelpunkte $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ hindurchgeht und der kubischen Fläche angehört; also gehören ihr auch die Punkte $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ an. Da aber $\mathfrak{b}_1$ ganz willkürlich auf b_1 gewählt war, folglich auch $\mathfrak{a}_2$ ein ganz willkürlicher Punkt auf a_2 ist, so gehören die ganzen Geraden b_1 und a_2, und in gleicher Weise auch b_2 und a_1 der kubischen Fläche an.

Zu diesen vier Geraden

$$a_1 \quad a_2 \quad b_1 \quad b_2$$

der kubischen Fläche treten sofort neue, die wir erhalten, wenn wir der veränderlichen Ebene ξ weitere besondere Lagen anweisen. Ziehen wir durch $\mathfrak{B}$ die einzige Gerade, welche b_1 und b_2 gleichzeitig trifft in den Punkten $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$, also

$$([\mathfrak{B}b_1],\ b_2) = \mathfrak{b}_2, \quad ([\mathfrak{B}b_2],\ b_1) = \mathfrak{b}_1$$

und drehen um $|\mathfrak{B}\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2|$ die veränderliche Ebene ξ, so bleiben $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{x}_2$ fest, folglich müssen alle Punkte der Schnittlinie

$$|[a_1\mathfrak{b}_1],\ [a_2\mathfrak{b}_2]| = g_3,$$

d. h. diese ganze Gerade der kubischen Fläche angehören. Wählen wir

für ξ die besondere Ebene $[\mathfrak{B} b_1]$, so wird $\mathfrak{x}_1$ unbestimmt, also auch $[a_1 \mathfrak{x}_1]$, mithin muss die ganze Gerade

$$|[\mathfrak{B} b_1], [a_2 \mathfrak{b}_2]| = g_2 \quad \text{und ebenso} \quad |[\mathfrak{B} b_2], [a_1 \mathfrak{b}_1]| = g_1$$

der kubischen Fläche angehören.

Ziehen wir ferner durch $\mathfrak{B}$ die einzige Gerade, welche gleichzeitig a_1 und b_1 begegnet, also

$$|[\mathfrak{B} a_1], [\mathfrak{B} b_1]| = l_1,$$

so wird, wenn wir die veränderliche Ebene ξ um l_1 drehen, die Schnittlinie von ξ und $\xi_1 (= [a_1 \mathfrak{x}_1])$ beständig die Gerade l_1 sein; folglich müssen alle ihre Punkte, in denen sie von $\xi_2 (= [a_2 \mathfrak{x}_2])$ getroffen wird, der kubischen Fläche angehören; sie liegt also ganz auf der kubischen Fläche, und in gleicher Weise auch die Gerade

$$|[\mathfrak{B} a_2], [\mathfrak{B} b_2]| = l_2.$$

Wählen wir für ξ die besondere Ebene $[\mathfrak{B} a_1]$, so fallen ξ und ξ_1 zusammen, folglich wird diese Ebene von ξ_2 in einer Geraden geschnitten, die der $F^{(3)}$ angehört; hiernach erhalten wir noch zwei Gerade derselben:

$$([\mathfrak{B} a_1], b_2) = \mathfrak{c}_2, \quad ([\mathfrak{B} a_2], b_1) = \mathfrak{c}_1, \quad |[\mathfrak{B} a_1], [a_2 \mathfrak{c}_2]| = k_2, \quad |[\mathfrak{B} a_2], [a_1 \mathfrak{c}_1]| = k_1.$$

Aus der bisherigen Construction ersehen wir, dass in den Ebenen

$$[a_1 \mathfrak{b}_1], \quad [a_2 \mathfrak{b}_2], \quad [\mathfrak{B} a_1], \quad [\mathfrak{B} a_2], \quad [\mathfrak{B} b_1], \quad [\mathfrak{B} b_2]$$

beziehungsweise die je drei Geraden liegen:

$$a_1 g_1 g_3, \quad a_2 g_2 g_3, \quad a_1 l_1 k_2, \quad a_2 l_2 k_1, \quad b_1 l_1 g_2, \quad b_2 l_2 g_1.$$

Ferner sehen wir, dass der Punkt $\mathfrak{b}_1$ in der Ebene $[\mathfrak{B} b_2]$ und gleichzeitig in der Ebene $[a_1 \mathfrak{b}_1]$, folglich in der Geraden g_1 liegt, also der Schnittpunkt $(b_1 g_1)$ ist; mithin haben wir

$$(b_1 g_1) = \mathfrak{b}_1 \quad \text{und in gleicher Weise} \quad (b_2 g_2) = \mathfrak{b}_2.$$

Ebenso liegt der Punkt $\mathfrak{c}_1$ in der Ebene $[\mathfrak{B} a_2]$ und gleichzeitig in der Ebene $[a_1 \mathfrak{c}_1]$, folglich in der Geraden k_1; mithin haben wir

$$(b_1 k_1) = \mathfrak{c}_1 \quad \text{und in gleicher Weise} \quad (b_2 k_2) = \mathfrak{c}_2.$$

Wir haben nunmehr acht Ebenen

$$[a_1 k_1] \quad [a_2 k_1] \quad [a_1 k_2] \quad [a_2 k_2] \quad [b_1 g_1] \quad [b_2 g_2] \quad [b_1 k_1] \quad [b_2 k_2],$$

deren jede zwei Gerade der Fläche $F^{(3)}$ enthält, folglich noch eine dritte enthalten muss.

Betrachten wir die Schnittlinie der beiden Ebenen

$$[a_1 k_1] \quad \text{und} \quad [b_2 g_2],$$

so sehen wir, dass dieselbe vier Punkte der kubischen Fläche enthalten muss, also ganz derselben angehört, da weder a_1 und b_2, noch a_1 und g_2, noch k_2 und b_2 sich begegnen, endlich auch k_1 und g_2 sich nicht treffen. (denn wäre dies der Fall, so müssten die vier Ebenen

$$[\mathfrak{P}b_1] \quad [a_2\mathfrak{b}_2] \quad [\mathfrak{P}a_2] \quad [a_1\mathfrak{c}_1]$$

sich in einem Punkte treffen, folglich der Schnittpunkt von $[\mathfrak{P}b_1]$ und a_2 in der Ebene $[a_1\mathfrak{c}_1]$ liegen, oder was dasselbe ist, die beiden Punkte $([\mathfrak{P}b_1], a_2)$ und $\mathfrak{c}_1 = ([\mathfrak{P}a_2], b_1)$ mit der Geraden a_1 in einer Ebene liegen, d. h. die durch $\mathfrak{P}$ gezogene einzige Gerade, welche b_1 und a_2 gleichzeitig trifft, müsste auch a_1 treffen, was bei willkürlicher Annahme der Elemente $a_1\, b_1\, a_2\, \mathfrak{P}$ nicht der Fall sein wird); folglich wird die Schnittlinie

$$[a_1k_1], [b_2g_2] = c_1$$

ganz der kubischen Fläche angehören: in gleicher Weise gehört die Schnittlinie

$$[a_2k_2], [b_1g_1] = c_2$$

ganz der kubischen Fläche an. Die beiden neuen Geraden c_1 und c_2 müssen sich treffen, weil die Schnittlinie der beiden Ebenen

$$[a_1k_1] \text{ und } [b_1g_1],$$

welche nicht ganz der kubischen Fläche angehören kann, schon zwei Punkte derselben enthält, nämlich (a_1g_1) und (b_1k_1), folglich nur noch einen dritten Punkt enthalten kann, in welchem sich c_1 und c_2 treffen müssen.

In ähnlicher Weise erkennen wir, dass die Schnittlinie der beiden Ebenen

$$[c_1c_2] \text{ und } [l_1l_2]$$

vier Punkte der kubischen Fläche enthalten muss, also ganz derselben angehört. Denn es ist leicht zu sehen, dass sich weder c_1 und l_1, noch c_1 und l_2, noch c_2 und l_1, noch c_2 und l_2 treffen können. (Träfen sich z. B. c_1 und l_1, so müssten die vier Ebenen

$$[a_1k_1] \quad [b_2g_2] \quad [\mathfrak{P}a_1] \quad [\mathfrak{P}b_1]$$

durch einen Punkt laufen; es ist aber $|[b_2g_2], [\mathfrak{P}b_1]| = g_2$ und $[a_1k_1], [\mathfrak{P}a_1]| = a_1$; es müssten sich also a_1 und g_2 treffen, was offenbar nicht der Fall ist, da die Construction von g_2 das willkürlich zu wählende Element a_1 gar nicht enthält, und ähnlich in den übrigen drei Fällen).

Wir bezeichnen die neue Gerade der kubischen Fläche

$$[l_1l_2], [c_1c_2]| = l_3.$$

Schliesslich erhalten wir als Schnittlinie der beiden Ebenen

$$[b_1 k_1] \text{ und } [b_2 k_2]$$

noch eine Gerade der kubischen Fläche, weil dieselbe auch vier Punkte der Fläche enthält; denn es treffen sich weder b_1 und b_2, noch b_1 und k_2, noch k_1 und b_2, noch k_1 und k_2, wie unmittelbar einleuchtet; die Gerade

$$|[b_1 k_1], [b_2 k_2]| = k_3$$

trifft sowohl l_3 als auch g_3; denn die beiden Ebenen

$$[a_1 g_1] \text{ und } [b_2 k_2],$$

deren jede noch eine dritte Gerade der kubischen Fläche enthält, nämlich g_3 und k_3, schneiden sich in einer Geraden, welche nicht ganz der $F^{(3)}$ angehören kann, wohl aber schon zwei Punkte derselben enthält, nämlich die Punkte $(a_1 k_2)$, und $(g_1 b_2)$, folglich nur noch einen dritten Punkt enthalten kann, in welchem sich g_3 und k_3 treffen müssen. Ebenso müssen die beiden Ebenen

$$[l_1 l_2] \text{ und } [b_1 k_1],$$

welche noch die dritten Geraden l_3 und k_3 enthalten, sich in einer Geraden schneiden, die nicht ganz der kubischen Fläche angehören kann, wohl aber die beiden Punkte derselben $(l_1 b_1)$ und $(l_2 k_1)$ enthält, also nur noch einen dritten Punkt der Fläche enthalten kann, in welchem sich l_3 und k_3 treffen müssen.

Endlich begegnen sich auch g_3 und l_3, weil die beiden Ebenen

$$[l_1 l_2] \text{ und } [a_2 g_2],$$

in denen l_3 und g_3 als dritte Gerade liegen, sich in einer Geraden schneiden, welche die beiden Punkte der Fläche $(l_1 g_2)$ und $(l_2 a_2)$ enthält, also nur noch einen dritten Punkt der Fläche enthalten kann, in dem sich l_3 und g_3 begegnen müssen.

Da von den drei Geraden $g_3\, k_3\, l_3$ jede den beiden übrigen begegnet, so müssen sie sich entweder in einem Punkte schneiden oder in einer Ebene liegen; ersteres kann nicht der Fall sein, folglich muss letzteres eintreten. In der That zeigt sich, dass die drei Geraden $g_3\, k_3\, l_3$ nicht zu je zweien in drei verschiedenen Ebenen liegen können, sondern in einer Ebene liegen müssen, wenn wir bemerken, dass die durch g_3 und k_3 gelegte Ebene nur noch eine dritte Gerade der kubischen Fläche enthalten kann; und da g_3 von $a_1 g_1 a_2 g_2$ und k_3 von $b_1 k_1 b_2 k_2$ bereits getroffen wird, so müssen die Durchstossungspunkte der Ebene $[g_3 k_3]$ durch die übrigen Geraden $c_1\, c_2\, l_1\, l_2\, l_3$ auf der dritten Geraden liegen; da aber $c_1 c_2 l_3$ in einer Ebene liegen und auch $l_1 l_2 l_3$ in einer Ebene liegen, so muss die ganze Gerade l_3, welche die Schnitt-

linie der beiden letzten Ebenen ist, in der Ebene $[g_3 k_3]$ als dritte Gerade der kubischen Fläche enthalten sein, und wir haben erwiesen, dass

$$g_3 \quad k_3 \quad l_3$$

in einer Ebene liegen.

Nunmehr besitzen wir auf der kubischen Fläche $F^{(3)}$ die reellen 15 Geraden:

$$a_1 \; a_2 \quad b_1 \; b_2 \quad c_1 \; c_2 \quad g_1 \; g_2 \; g_3 \quad k_1 \; k_2 \; k_3 \quad l_1 \; l_2 \; l_3,$$

welche sich zu je dreien in folgende 15 Ebenen vertheilen:

$$\begin{matrix} a_1 g_1 g_3 & a_2 g_2 g_3 & a_1 l_1 k_2 & a_2 l_2 k_1 & a_1 c_1 k_1 & a_2 c_2 k_2 \\ b_1 l_1 g_2 & b_2 l_2 g_1 & b_1 c_2 g_1 & b_2 c_1 g_2 & b_1 k_1 k_3 & b_2 k_2 k_3 \\ & & c_1 c_2 l_3 \quad l_1 l_2 l_3 \quad g_3 k_3 l_3. & & & \end{matrix}$$

Diese Configuration von 15 Geraden und 15 Ebenen ist eine derartige, dass ebenso wie in jeder der 15 Ebenen drei der Geraden liegen, auch durch jede der 15 Geraden drei der Ebenen gehen, also jede Gerade von sechs anderen getroffen wird, von den acht übrigen aber nicht getroffen wird. Die Zahl der Treffpunkte dieser Geraden beträgt also $\frac{15.6}{2} = 45$. Diese 45 Punkte liegen noch in anderer Weise zu je dreien auf Geraden vertheilt, die *nicht* ganz der kubischen Fläche angehören; es liegen z. B. die je drei Punkte

$$(a_1 g_3)\,(k_2 k_3)\,(l_1 l_3), \quad (a_1 g_3)\,(a_2 k_1)\,(c_1 g_2), \quad (a_1 g_3)\,(a_2 k_2)\,(l_1 g_2), \quad (a_1 g_3)\,(k_1 k_3)\,(c_1 l_3)$$

auf einer Geraden, und dies sind vier Gerade, die durch denselben Punkt $(a_1 g_3)$ hindurchgehen. Da durch jeden der 45 Punkte in dieser Weise vier der neuen Geraden hindurchgehen, jede aber drei Punkte enthält, so bekommen wir $\frac{45.4}{3} = 60$ Gerade. Diese 60 Geraden liegen ferner zu je vieren in einer Ebene und bilden in derselben ein vollständiges Vierseit, dessen sechs Ecken allemal sechs der 45 Punkte sind; so bilden die sechs Punkte

$$(a_1 g_3) \quad (a_2 k_1) \quad (k_2 k_3) \quad (b_1 c_2) \quad (c_1 g_2) \quad (l_1 l_3)$$

die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits, indem sie zu je dreien auf vier Geraden liegen; ebenso bilden

$$(a_1 g_3) \quad (a_2 k_2) \quad (k_1 k_3) \quad (b_2 l_2) \quad (l_1 g_2) \quad (c_1 l_3)$$

die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits, indem sie zu je dreien auf vier Geraden liegen.

Solcher Ebenen giebt es 15, denn durch jeden der 45 Punkte gehen nur zwei (wie z. B. durch $(a_1 g_3)$) und jede Ebene enthält sechs der Punkte, also $\frac{45.2}{6} = 15$ Ebenen.

Wir haben also folgende Configuration:

45 Punkte,	**60 Gerade,**	**15 Ebenen.**
durch jeden Punkt:	in jeder Geraden:	in jeder Ebene:
2 Ebenen, 4 Gerade,	3 Punkte,	6 Punkte, 4 Gerade.

(Auf die hierzu gehörige vollständige Figur habe ich an einem anderen Orte aufmerksam gemacht, siehe *Schloemilch*, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 27. Jahrg., S. 380.)

Wir haben bis jetzt auf der kubischen Fläche $F^{(3)}$ nur 15 Gerade ermittelt, die immer reell sein müssen nach der ausgeführten Construction und in der eigenthümlichen Lage sich befinden, wie sie schon in der früheren Arbeit des Verfassers (a. a. O.) für die dort g_{ik} genannten Geraden nachgewiesen ist.

Die kubische Fläche enthält aber noch 12 Gerade, die imaginär sein können und eine *Schlaefli*sche Doppelsechs bilden; zu diesen gelangt man unmittelbar, wenn man die beiden Geraden

$$i_1 \text{ und } i_2$$

ermittelt, welche den vier gegebenen Geraden

$$a_1 \quad b_1 \quad a_2 \quad b_2$$

gleichzeitig begegnen; sodann folgen sofort acht weitere Gerade, denn die Ebenen

$$[a_1 i_1], \quad [b_1 i_1], \quad [a_2 i_1], \quad [b_2 i_1], \quad [a_1 i_2], \quad [b_1 i_2], \quad [a_2 i_2], \quad [b_2 i_2]$$

enthalten je noch eine dritte Gerade, nämlich beziehungsweise:

$$a_1^1, \quad b_1^1, \quad a_2^1, \quad b_2^1, \quad a_1^2, \quad b_1^2, \quad a_2^2, \quad b_2^2,$$

und da die vier Geraden $a_1^1\, b_1^1\, a_2^1\, b_2^1$ von der Geraden i_1 gleichzeitig getroffen werden, so müssen sie noch von einer zweiten Geraden h_1 getroffen werden; da endlich die vier Geraden $a_1^2\, b_1^2\, a_2^2\, b_2^2$ von der Geraden i_2 gleichzeitig getroffen werden, so müssen sie noch von einer zweiten Geraden h_2 getroffen werden; also haben wir die zwölf neuen Geraden:

$$i_1 \quad i_2 \quad h_1 \quad h_2$$
$$a_1^1 \quad b_1^1 \quad a_2^1 \quad b_2^1 \quad a_1^2 \quad b_1^2 \quad a_2^2 \quad b_2^2,$$

welche eine *Schlaefli*sche Doppelsechs bilden:

$$\begin{cases} i_1 & h_1 & a_1^2 & b_1^2 & a_2^2 & b_2^2 \\ i_2 & h_2 & a_1^1 & b_1^1 & a_2^1 & b_2^1. \end{cases}$$

In der That sehen wir, dass jede Gerade der ersten Horizontalreihe jeder der zweiten begegnen muss mit Ausnahme derjenigen, welche mit ihr in derselben Verticalreihe steht, und ebenso, dass jede Gerade der zweiten

Horizontalreihe jeder der ersten begegnen muss mit Ausnahme derjenigen, welche mit ihr in derselben Verticalreihe steht, wodurch die *Schlaefli*sche Doppelsechs charakterisirt wird.

Da die Ebene $[i_1 a_1]$ die dritte Gerade a_1^1 und die Ebene $[i_2 b_1]$ die dritte Gerade b_1^2 enthält, so wird die Schnittlinie beider Ebenen

$$|[i_1 a_1], [i_2 b_1]|$$

nicht der kubischen Fläche angehören können, wohl aber zwei Punkte derselben

$$(i_1 b_1) \quad \text{und} \quad (i_2 a_1)$$

enthalten, folglich noch einen einzigen dritten Punkt, in dem sich nothwendig a_1^1 und b_1^2 begegnen. In gleicher Weise erkennen wir, dass

$$\begin{array}{llll} a_1^1 & \text{den Geraden} & b_1^2\ a_2^2\ b_2^2 & \\ b_1^1 & \quad ,, \quad ,, & a_1^2\ a_2^2\ b_2^2 & \\ a_2^1 & \quad ,, \quad ,, & a_1^2\ b_1^2\ b_2^2 & \\ b_2^1 & \quad ,, \quad ,, & a_1^2\ b_1^2\ a_2^2 & \text{begegnen muss.} \end{array}$$

Da auch i_1 und h_1 den vier Geraden $a_1^1\, b_1^1\, a_2^1\, b_2^1$ gleichzeitig begegnen, so bleibt nur noch nachzuweisen übrig, dass i_1 und h_2 sich treffen. Dies erhellt auch sofort, wenn wir durch die fünf Geraden

$$i_1 \quad a_1^2 \quad a_2^2 \quad b_1^1 \quad b_2^1,$$

von denen die beiden letzten den drei ersten gleichzeitig begegnen, ein Hyperboloid gelegt uns denken; dasselbe hat mit der kubischen Fläche $F^{(3)}$ bereits fünf gerade Linien gemeinschaftlich, kann also nur noch eine Gerade mit ihr gemein haben; und zwar muss dieselbe derjenigen zweiten Regelschaar angehören, zu welcher $b_1^1\, b_2^1$ gehören; (denn gehörte sie zur ersten Regelschaar $(i_1\, a_1^2\, a_2^2)$, so hätte die kubische Fläche $F^{(3)}$ mit dem Hyperboloid vier Gerade einer Regelschaar gemein, also die ganze zweite Regelschaar müsste auf der $F^{(3)}$ liegen, was ohne ein Zerfallen von $F^{(3)}$ nicht möglich ist.) Die gesuchte sechste Gerade der $F^{(3)}$ muss daher den dreien $i_1\, a_1^2\, a_2^2$ gleichzeitig begegnen; nun wissen wir, dass ausser $b_1^1\, b_2^1$ noch i_2 und h_2 jenen dreien $i_1\, a_1^2\, a_2^2$ gleichzeitig begegnen; da aber i_2 und i_1 sich nicht treffen können, so muss h_2 auch i_1 treffen, und die sechs Geraden

$$i_1 \quad a_1^2 \quad a_2^2 \quad h_2 \quad b_1^1 \quad b_2^1$$

gehören den beiden Regelschaaren eines Hyperboloids an. Dass die aus den zwölf Geraden der Doppelsechs hervorgehenden 15 neuen Geraden mit den früher gefundenen 15 Geraden identisch sind, folgt nun so:

Da von den zwölf Geraden der Doppelsechs:

$$\begin{cases} i_1 & h_1 & a_1^2 & b_1^2 & a_2^2 & b_2^2 \\ i_2 & h_2 & a_1^1 & b_1^1 & a_2^1 & b_2^1 \end{cases}$$

keine zwei derselben Horizontalreihe und keine zwei derselben Verticalreihe sich begegnen, sonst aber jede Gerade der einen Horizontalreihe jede der andern trifft, so treten zu den unmittelbar gegebenen Geraden

$$|[i_1 a_1^1], [i_2 a_1^2]| = a_1 \quad |[i_1 a_2^1], [i_2 a_2^2]| = a_2$$
$$|[i_1 b_1^1], [i_2 b_1^2]| = b_1 \quad |[i_1 b_2^1], [i_2 b_2^2]| = b_2$$

zunächst sechs andere; denn die Ebene $[i_2 b_1]$ wird nur noch die einzige dritte Gerade b_1^2 der kubischen Fläche enthalten, und die Ebene $[g_2 b_2]$ enthält nur noch die einzige Gerade c_1; da aber i_2 und b_2, sowie g_2 und b_1 sich begegnen, so müssen auch c_1 und b_1^2 sich treffen; ebenso folgt aus dem räumlichen Vierseit $\begin{vmatrix} i_1 & g_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, dass c_1 und a_2^1 sich treffen, aus dem räumlichen Vierseit $\begin{vmatrix} i_1 & g_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$, dass c_1 und b_1^1 sich treffen, und endlich aus dem räumlichen Vierseit $\begin{vmatrix} i_2 & g_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, dass auch c_1 und a_2^2 sich treffen; da ferner, wie wir wissen, b_1^2 und a_2^1 sich treffen, sowie b_1^1 und a_2^2 sich treffen, so muss die Schnittlinie der beiden Ebenen $[b_1^2 a_2^1]$ und $[b_1^1 a_2^2]$, weil keine Gerade der einen Ebene keiner der andern begegnet, ganz der kubischen Fläche angehören, und da c_1 allen vieren begegnet, so muss

$$|[b_1^2 a_2^1], [b_1^1 a_2^2]| = c_1$$

sein. In ganz derselben Weise finden wir

$$|[a_1^2 b_2^1], [a_1^1 b_2^2]| = c_2$$
$$|[a_2^1 b_2^2], [a_2^2 b_2^1]| = l_1 \quad |[a_1^1 b_1^2], [a_1^2 b_1^1]| = l_2$$
$$[b_1^2 b_2^1], [b_1^1 b_2^2] = g_3 \quad [a_1^2 a_2^1], [a_1^1 a_2^2]| = k_3.$$

Ferner wissen wir, dass die Ebene $[h_1 a_2^1]$ nur noch eine dritte Gerade der kubischen Fläche enthalten kann, und aus dem räumlichen Vierseit $\begin{vmatrix} h_1 & i_1 \\ a_2^1 & a_1 \end{vmatrix}$, dass diese dritte Gerade der Geraden a_1 begegnen muss, sowie aus dem Vierseit $\begin{vmatrix} h_1 & i_1 \\ a_2^1 & b_1 \end{vmatrix}$, dass sie auch b_1 begegnen muss, und endlich aus dem Vierseit $\begin{vmatrix} h_1 & i_1 \\ a_2^1 & b_1 \end{vmatrix}$, dass sie auch der Geraden b_2 begegnen muss; folglich muss die dritte Gerade der Ebene $[h_1 a_2^1]$ den drei Geraden a_1 b_1 b_2 gleichzeitig begegnen; dasselbe muss auch die dritte Gerade der Ebene $[h_2 a_2^2]$ thun;

folglich muss die Schnittlinie der beiden Ebenen $[h_1 a_2^1]$ und $[h_2 a_2^2]$ diese dritte Gerade sein, weil keine Gerade der einen Ebene keiner der andern begegnet. Nun giebt es aber ausser den Geraden i_1 und i_2 nur noch eine einzige Gerade der kubischen Fläche, welche gleichzeitig $a_1\, b_1\, b_2$ trifft, nämlich g_1, folglich muss

$$|[h_1 a_2^1],\ [h_2 a_2^2]| = g_1$$

sein, und in gleicher Weise finden wir

$$|[h_1 a_1^1],\ [h_2 a_1^2]| = g_2 \quad |[h_1 b_2^1],\ [h_2 b_2^2]| = k_1 \quad |[h_1 b_1^1],\ [h_2 b_1^2]| = k_2.$$

Endlich haben wir noch die Ebene $[i_1 h_2]$ zu betrachten; dieselbe enthält nur noch eine dritte Gerade der kubischen Fläche, und dieselbe muss wegen des Vierseits $\begin{vmatrix} i_1 & b_2^2 \\ h_2 & a_1^1 \end{vmatrix}$ der Geraden c_2, wegen des Vierseits $\begin{vmatrix} i_1 & a_1^2 \\ h_2 & b_1^1 \end{vmatrix}$ der Geraden l_2 und wegen des Vierseits $\begin{vmatrix} i_1 & a_1^2 \\ h_2 & a_2^1 \end{vmatrix}$ der Geraden k_3, wegen des Vierseits $\begin{vmatrix} i_1 & a_2^2 \\ h_2 & b_1^1 \end{vmatrix}$ der Geraden c_1, wegen des Vierseits $\begin{vmatrix} i_1 & b_2^2 \\ h_2 & b_1^1 \end{vmatrix}$ der Geraden g_3, also den fünf Geraden $c_1\, c_2\, l_2\, k_3\, g_3$ gleichzeitig begegnen; es giebt aber nur eine solche Gerade l_3 der kubischen Fläche, folglich muss l_3 in der Ebene $[i_1 h_2]$ liegen und aus gleichen Gründen in der Ebene $[i_2 h_1]$, mithin ist

$$|[i_1 h_2],\ [i_2 h_1]| = l_3.$$

Wir haben somit alle 15 früheren Geraden der kubischen Fläche aus den zwölf Geraden der Doppelsechs wiedergefunden und dadurch das vollständige Arrangement der 27 Geraden der kubischen Fläche hergestellt, wie es auch aus den andern Erzeugungsweisen derselben sich ergiebt.

5. Zu der vierten Erzeugungsweise der kubischen Fläche geben wir
zwei beliebige Punkte $\mathfrak{A}_1\ \mathfrak{A}_2$ und eine Gerade a_3,
zwei beliebige Ebenen $\beta_1\ \beta_2$ und eine Gerade b_3,
endlich noch einen Punkt $\mathfrak{P}$

und drehen um letzteren eine veränderliche Ebene ξ, welche die Ebenen β_1 und β_2 in den Geraden x_1 und x_2 schneidet, die Gerade b_3 in dem Punkte $\mathfrak{x}_3$ trifft, also

$$|\xi\beta_1| = x_1 \quad |\xi\beta_2| = x_2 \quad (\xi b_3) = \mathfrak{x}_3,$$

dann wird der Schnittpunkt

$$([\mathfrak{A}_1 x_1]\, [\mathfrak{A}_2 x_2]\, [a_3 \mathfrak{x}_3]) = \mathfrak{x}$$

eine kubische Fläche $F^{(3)}$ beschreiben.

In der That, bewegen wir auf einer beliebig gewählten Geraden l

einen veränderlichen Punkt $\mathfrak{y}$, und trifft

$$\begin{array}{llll} \text{die Gerade } |\mathfrak{A}_1\mathfrak{y}| & \text{die Ebene } \beta_1 & \text{in} & \mathfrak{x}_1, \\ \text{,,} \quad \text{,,} \quad |\mathfrak{A}_2\mathfrak{y}| & \text{,,} \quad \text{,,} \quad \beta_2 & \text{in} & \mathfrak{x}_2, \\ \text{die Ebene } |a_3\mathfrak{y}| & \text{,, Gerade } b_3 & \text{in} & \mathfrak{x}_3, \end{array}$$

so beschreiben bei der Bewegung $\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_2\,\mathfrak{x}_3$ drei projective Punktreihen auf den Geraden

$$|[\mathfrak{A}_1 l],\ \beta_1| \quad |[\mathfrak{A}_2 l],\ \beta_2| \quad b_3.$$

Die Verbindungsebene $[\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3]$ wird daher eine Raumcurve dritter Klasse $\mathfrak{K}^{(3)}$ als Schmiegungsebene umhüllen, und es wird im Allgemeinen dreimal vorkommen, dass dieselbe durch $\mathfrak{B}$ geht. Ist dies aber der Fall, so schneidet diese Ebene ξ die Ebene β_1 in einer Geraden x_1, welche durch $\mathfrak{x}_1$ geht; also geht die Ebene $[\mathfrak{A}_1 x_1]$ durch die Gerade $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{x}_1|$, folglich auch durch den Punkt $\mathfrak{y}$ derselben; ferner schneidet die Ebene ξ die Ebene β_2 in einer Geraden x_2, welche durch $\mathfrak{x}_2$ geht; also geht die Ebene $[\mathfrak{A}_2 x_2]$ durch die Gerade $|\mathfrak{A}_2\mathfrak{x}_2|$, mithin auch durch den Punkt $\mathfrak{y}$ derselben; endlich schneidet ξ die Gerade b_3 in $\mathfrak{x}_3$ und die Ebene $[a_3\mathfrak{x}_3]$ geht auch durch $\mathfrak{y}$; mithin liegt der Punkt $([\mathfrak{A}_1 x_1][\mathfrak{A}_2 x_2][a_3\mathfrak{x}_3]) = \mathfrak{y}$ auf der gegebenen Geraden l, und da dies im Allgemeinen dreimal vorkommt, so ist der gesuchte Ort von $\mathfrak{x}$ eine kubische Fläche $F^{(3)}$.

Aus der Erzeugungsweise der kubischen Fläche gehen sofort einige derselben angehörige Elemente hervor. Nehmen wir einen beliebigen Punkt $\mathfrak{p}$ der Schnittlinie $|\beta_1\beta_2| = s$ und legen die Ebene $[\mathfrak{p}a_3]$, welche b_3 in dem Punkte $\mathfrak{x}_3$ schneide, so wird die für ξ gewählte Ebene $[\mathfrak{B}\mathfrak{p}\mathfrak{x}_3]$ offenbar die Gerade b_3 in $\mathfrak{x}_3$, die Ebenen $\beta_1\ \beta_2$ in zwei Geraden x_1 und x_2 schneiden, welche sich in $\mathfrak{p}$ begegnen, folglich wird der Schnittpunkt $([\mathfrak{A}_1 x_1][\mathfrak{A}_2 x_2][a_3\mathfrak{x}_3]) = \mathfrak{x}$ in den Punkt $\mathfrak{p}$ fallen, also dem gesuchten Orte angehören, und da $\mathfrak{p}$ ein beliebig gewählter Punkt der Geraden s war, so liegt die ganze Gerade s auf der kubischen Fläche.

Nehmen wir zweitens einen beliebigen Punkt $\mathfrak{p}$ auf der Geraden a_3 an und ziehen die Verbindungslinien $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{p}|$ und $|\mathfrak{A}_2\mathfrak{p}|$, welche bez. den Ebenen β_1 und β_2 in den Punkten $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$ begegnen mögen, also

$$(|\mathfrak{A}_1\mathfrak{p}|,\ \beta_1) = \mathfrak{b}_1 \quad (|\mathfrak{A}_2\mathfrak{p}|,\ \beta_2) = \mathfrak{b}_2,$$

so wird die für ξ gewählte Ebene

$$[\mathfrak{B}\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2]$$

die Ebenen β_1 und β_2 bez. in zwei Geraden x_1 und x_2 schneiden, dergestalt, dass die Ebenen $[\mathfrak{A}_1 x_1]$ und $[\mathfrak{A}_2 x_2]$ die Geraden $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{b}_1|$ und $|\mathfrak{A}_2\mathfrak{b}_2|$, also den

Punkt $\mathfrak{p}$ enthalten; schneidet also die Ebene ξ die Gerade l_3 in $\mathfrak{x}_3$, so müssen die drei Ebenen $[\mathfrak{A}_1 x_1]$ $[\mathfrak{A}_2 x_2]$ $[a_3 \mathfrak{x}_3]$ sich in dem Punkte $\mathfrak{p}$ schneiden, der auf a_3 willkürlich gewählt war; folglich gehört dieser Punkt, also auch die ganze Gerade a_3 der kubischen Fläche an.

Wählen wir für die veränderliche Ebene ξ insbesondere die Ebene

$$[\mathfrak{B} b_3],$$

so wird $\mathfrak{x}_3$ unbestimmt, ebenso die Ebene $[a_3 \mathfrak{x}_3]$; wenn also die Schnittlinien

$$|[\mathfrak{B} b_3],\ \beta_1| = b_1,\quad |[\mathfrak{B} b_3],\ \beta_2| = b_2$$

bezeichnet werden, so muss die Gerade

$$|[\mathfrak{A}_1 b_1],\ [\mathfrak{A}_2 b_2]| = g$$

ganz der kubischen Fläche angehören. Da sich b_1 und b_2 auf s schneiden, so geht auch g durch diesen Schnittpunkt, also begegnen sich g und s.

Wählen wir ferner für die veränderliche Ebene

$$\xi = [\mathfrak{B} \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2],$$

so fallen $[\mathfrak{A}_1 x_1]$ und $[\mathfrak{A}_2 x_2]$ zusammen; trifft daher die Ebene ξ die Gerade b_3 in $\mathfrak{b}_3$

$$([\mathfrak{B} \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2],\ b_3) = \mathfrak{b}_3,$$

so wird die Schnittlinie

$$|[\mathfrak{B} \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2],\ [a_3 \mathfrak{b}_3]| = l$$

ganz auf der kubischen Fläche liegen und den beiden Geraden a_3 und b_3 begegnen; denn es ist $\mathfrak{b}_3 = (b_3 l)$.

Wir haben also auf der kubischen Fläche die vier Geraden

$$s \quad g \quad a_3 \quad l,$$

aus denen sofort eine fünfte folgt, die Schnittlinie der beiden Ebenen

$$|[sg],\ [a_3 l]| = k;$$

denn es treffen sich, wie leicht zu sehen ist, weder s und a_3, noch s und l, noch g und a_3, noch g und l, folglich muss die Schnittlinie der beiden Ebenen $[sg]$ und $[a_3 l]$ ganz auf der kubischen Fläche liegen, weil sie vier Punkte derselben enthält.

Drehen wir die veränderliche Ebene ξ um den Strahl $|\mathfrak{B} \mathfrak{A}_1|$, so fällt die Ebene $[\mathfrak{A}_1 x_1]$ mit ξ zusammen, die Schnittlinie von $[\mathfrak{A}_1 x_1]$ und $[\mathfrak{A}_2 x_2]$ wird also x_2 selbst und beschreibt in der Ebene β_2 ein Strahlbüschel um den festen Punkt

$$(|\mathfrak{B} \mathfrak{A}_1|,\ \beta_2) = \mathfrak{B}_2,$$

während die Ebene $[a_3 \mathfrak{x}_3]$ ein mit diesem Strahlbüschel projectives Ebenenbüschel um die Axe a_3 beschreibt. Der Schnittpunkt $([\mathfrak{A}_1 x_1][\mathfrak{A}_2 x_2][a_3 \mathfrak{x}_3]) = \mathfrak{x}$

wird also in der Ebene β_2 einen Kegelschnitt beschreiben, das Erzeugniss zweier projectiven Strahlbüschel, deren Mittelpunkte der Punkt $\mathfrak{B}_2$ und der Durchschnittspunkt

$$(\beta_2 a_3) = \mathfrak{a}_2$$

sind. Drei weitere Punkte dieses Kegelschnittes erhält man, wenn man die Ebene ξ einmal noch durch den dritten Punkt $\mathfrak{A}_2$ legt, wodurch also der Durchschnittspunkt

$$(\beta_2 l) = \mathfrak{l}_2$$

hervorgeht; sodann wenn man ξ durch den Punkt

$$(\beta_2 b_3) = \mathfrak{c}_2$$

als dritten Punkt hindurchlegt, woraus hervorgeht, dass auch $\mathfrak{c}_2$ auf diesem Kegelschnitt liegt; endlich wenn man diejenige Gerade d bestimmt, welche von $\mathfrak{B}$ ausgehend a_3 und b_3 gleichzeitig trifft, also

$$|[\mathfrak{B}a_3],\ [\mathfrak{B}b_3]| = d,$$

und für die Ebene ξ die Ebene $[d\mathfrak{A}_1]$ wählt; alsdann wird

$$(\beta_2 d) = \mathfrak{d}_2$$

offenbar auch auf diesem Kegelschnitt liegen; also der in der Ebene β_2 liegende, der kubischen Fläche angehörige Kegelschnitt ist durch die fünf Punkte

$$\mathfrak{a}_2 \quad \mathfrak{B}_2 \quad \mathfrak{c}_2 \quad \mathfrak{d}_2 \quad \mathfrak{l}_2$$

gerade bestimmt. Ebenso erhalten wir in der Ebene β_1 einen auf der kubischen Fläche liegenden Kegelschnitt, welcher durch die fünf Punkte

$$\mathfrak{a}_1 \quad \mathfrak{B}_1 \quad \mathfrak{c}_1 \quad \mathfrak{d}_1 \quad \mathfrak{l}_1$$

bestimmt wird, wobei bedeuten:

$$\mathfrak{a}_1 = (\beta_1 a_3), \quad \mathfrak{B}_1 = (\beta_1 |\mathfrak{B}\mathfrak{A}_2|), \quad \mathfrak{c}_1 = (\beta_1 b_3), \quad \mathfrak{d}_1 = (\beta_1 d), \quad \mathfrak{l}_1 = (\beta_1 l).$$

Die Ebene $[\mathfrak{B}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2]$ enthält ausser der Geraden l noch einen Kegelschnitt der kubischen Fläche, welcher offenbar durch die Punkte $\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_2$ und die Durchstossungspunkte der Ebene $[\mathfrak{B}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2]$ mit den Geraden s und g hindurchgehen muss, ausserdem aber auch die Punkte $\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_2$ selbst enthält, denn diese gehören, wie leicht zu sehen ist, dem gesuchten Orte an. Bezeichnet man nämlich die Punkte

$$(|\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_1|,\ \beta_2) = \mathfrak{e}_2, \quad ([a_3\mathfrak{A}_1],\ b_3) = \mathfrak{e}_3$$

und wählt für die veränderliche Ebene ξ die Ebene

$$[\mathfrak{B}\mathfrak{e}_2\mathfrak{e}_3],$$

so ist klar, dass $[\mathfrak{A}_2\mathfrak{x}_2]$ durch $|\mathfrak{A}_2\mathfrak{e}_2|$, folglich auch durch $\mathfrak{A}_1$ geht und dass $[a_3\mathfrak{x}_3] = [a_3\mathfrak{e}_3]$ auch durch $\mathfrak{A}_1$ geht; folglich schneiden sich drei entsprechende

Ebenen in dem Punkte $\mathfrak{A}_1$; derselbe gehört also dem gesuchten Orte an, und ebenso $\mathfrak{A}_2$. Bezeichnen wir den Schnittpunkt

$$([\mathfrak{B}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2], |\beta_1\beta_2|) = \mathfrak{S},$$

so ist der Kegelschnitt durch die Punkte

$$\mathfrak{A}_1 \quad \mathfrak{A}_2 \quad \mathfrak{B}_1 \quad \mathfrak{B}_2 \quad \mathfrak{S}$$

gerade bestimmt.

Von den zur Construction der kubischen Fläche gegebenen Elementen enthält dieselbe also:

die Punkte $\mathfrak{A}_1$ $\mathfrak{A}_2$ und die Gerade a_3,
die Punkte $(\beta_1 b_3)$ $(\beta_2 b_3)$ $([\mathfrak{B}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2], b_3)$,
die Punkte $(|\mathfrak{B}\mathfrak{A}_1|, \beta_2)$ $(|\mathfrak{B}\mathfrak{A}_2|, \beta_1)$ und die Gerade $|\beta_1\beta_2|$,

endlich noch die oben construirten Geraden g und l, wodurch schon mehr als 19 einfache Bestimmungsstücke derselben bekannt sind. Der Punkt $\mathfrak{B}$ liegt nicht auf der kubischen Fläche; die Ebenen β_1 β_2 und $[\mathfrak{B}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2]$ schneiden sie in je einer Geraden und einem Kegelschnitt, zu dessen Bestimmung je fünf Punkte bekannt sind. Die Gerade b_3 liegt nicht ganz auf der kubischen Fläche, sondern enthält nur drei Punkte derselben.

Um die übrigen Geraden der kubischen Fläche $F^{(3)}$ zu erhalten, bezeichnen wir die beiden bekannten Kegelschnitte, welche in den Ebenen β_1 und β_2 liegen, durch

$$\mathfrak{K}_1^{(2)} \text{ und } \mathfrak{K}_2^{(2)};$$

die Gerade l begegnet ihnen in den oben genannten Punkten $\mathfrak{l}_1$ $\mathfrak{l}_2$. Durch jeden Punkt des Kegelschnittes $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ giebt es eine und nur eine einzige Gerade, welche gleichzeitig den beiden Geraden

$$l \text{ und } g$$

begegnet, und die Gesammtheit aller dieser Geraden wird eine geradlinige Fläche dritter Ordnung $\Phi^{(3)}$ sein; denn eine beliebige Gerade r im Raume wird im Allgemeinen von drei Erzeugenden der Fläche $\Phi^{(3)}$ getroffen. In der That schneidet das durch die drei Geraden $l\,g\,r$ gelegte Hyperboloid den Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ in vier Punkten, von denen einer der Punkt $\mathfrak{l}_1$ ist; es bleiben also nur noch drei Punkte von $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ übrig, welche die Eigenschaft besitzen, dass durch jeden eine Erzeugende der Fläche $\Phi^{(3)}$ geht, die der willkürlich gewählten Geraden r begegnet; folglich ist die geradlinige Fläche $\Phi^{(3)}$ vom dritten Grade. Sie enthält die Gerade l ganz, und zwar gehen durch jeden Punkt von l zwei Erzeugende von $\Phi^{(3)}$, weil, wenn $\mathfrak{p}$ ein Punkt von l ist, die Ebene $[\mathfrak{p}g]$ den Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ in zwei

Punkten trifft, die mit $\mathfrak{p}$ verbunden zwei Erzeugende der Fläche $\Phi^{(3)}$ liefern. Dieselbe schneidet nun den Kegelschnitt $\mathfrak{K}_2^{(2)}$, der in der Ebene β_2 liegt, im Allgemeinen in sechs Punkten, zu denen der Punkt $\mathfrak{l}_2$ gehört, und zwar muss dieser als Doppelpunkt der Durchschnittscurve von $\Phi^{(3)}$ und β_2 gezählt werden, weil durch ihn zwei Erzeugende der Fläche $\Phi^{(3)}$ gehen; es bleiben also im Allgemeinen nur noch vier gemeinschaftliche Punkte

$$\mathfrak{r}_1 \quad \mathfrak{r}_2 \quad \mathfrak{r}_3 \quad \mathfrak{r}_4$$

übrig, deren jeder die Eigenschaft besitzen muss, dass durch ihn je eine Gerade geht, welche gleichzeitig den Geraden $l\,g$ und den Kegelschnitten $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ und $\mathfrak{K}_2^{(2)}$ begegnet; eine solche Gerade muss aber, weil sie vier Punkte der kubischen Fläche $F^{(3)}$ enthält, derselben ganz angehören. Wir haben also vier neue Gerade

$$r_1 \quad r_2 \quad r_3 \quad r_4$$

auf unserer Fläche $F^{(3)}$ gefunden und erhalten durch dieselben die acht Ebenen

$$\begin{matrix} [gr_1] & [gr_2] & [gr_3] & [gr_4] \\ [lr_1] & [lr_2] & [lr_3] & [lr_4], \end{matrix}$$

deren jede die Fläche $F^{(3)}$ nothwendig in noch einer dritten Geraden schneiden muss, wodurch wir die acht neuen Geraden

$$\begin{matrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{matrix}$$

erhalten, von denen die vier ersten gleichzeitig von g, die vier letzteren gleichzeitig von l getroffen werden. Nun wird die Ebene β_1, welche den Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ und die Gerade s der kubischen Fläche $F^{(3)}$ enthält, von der Ebene $[lr_1]$, welche als dritte Gerade der kubischen Fläche t_1 enthält, in einer Geraden geschnitten, die nicht ganz der kubischen Fläche angehört, also nur drei Punkte derselben enthalten kann; von diesen sind zwei die Treffpunkte von l und r_1 mit dem Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1^{(2)}$, folglich müssen sich in dem dritten die Geraden s und t_1 treffen, und aus gleichem Grunde trifft s die Geraden $t_2\,t_3\,t_4$, also ist s die zweite Gerade (ausser l), welche den vieren

$$t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad t_4$$

gleichzeitig begegnet.

Ferner schneiden sich die Ebenen $[gr_1]$ (welche s_1 als dritte Gerade enthält) und $[lk]$ (welche a_3 als dritte Gerade enthält) in einer Geraden, die nicht ganz der kubischen Fläche $F^{(3)}$ angehören kann, folglich nur

drei Punkte derselben enthält; von diesen sind zwei die Treffpunkte (gk) und (lr_1); mithin müssen sich in dem dritten s_1 und a_3 begegnen; die Gerade a_3 trifft also s_1 und aus gleichem Grunde $s_2\, s_3\, s_4$, mithin ist a_3 die zweite Gerade (ausser g), welche den vieren

$$s_1 \quad s_2 \quad s_3 \quad s_4$$

gleichzeitig begegnet.

Bemerken wir noch, dass, weil g und l sich nicht treffen, auch keine zwei der vier Geraden $r_1\, r_2\, r_3\, r_4$ sich begegnen können, dass ferner, weil g und a_3 sich nicht treffen, auch keine zwei der Geraden $s_1\, s_2\, s_3\, s_4$ sich begegnen können, dass endlich, weil s und l sich nicht treffen, auch keine zwei der Geraden $t_1\, t_2\, t_3\, t_4$ sich begegnen können; ausserdem erkennen wir, dass die Schnittlinie der beiden Ebenen $[gr_1]$ und $[lr_2]$, welche als dritte Gerade s_1 und t_2 enthalten, nicht ganz auf der kubischen Fläche $F^{(3)}$ liegen kann, also nur drei Punkte derselben enthält, von denen zwei (gr_2) und (lr_1) sind, folglich müssen sich im dritten s_1 und t_2 begegnen. Es trifft in gleicher Weise

$$s_1, \qquad s_2, \qquad s_3, \qquad s_4,$$

bez. die Geraden $\quad t_2\, t_3\, t_4, \quad t_1\, t_3\, t_4, \quad t_1\, t_2\, t_4, \quad t_1\, t_2\, t_3.$

Dagegen leuchtet ein, dass s_1 und t_1 sich nicht treffen können; denn wäre dies der Fall, so müssten $t_1\, t_2\, t_3\, t_4$ hyperboloidische Lage haben, weil sie von den drei Geraden $s_1\, s\, l$ gleichzeitig getroffen würden, d. h. alle Geraden, welche drei von ihnen träfen, müssten auch die vierte treffen, daher würde die kubische Fläche $F^{(3)}$ zerfallen in ein Hyperboloid und noch eine Ebene, in der die Geraden $r_1\, r_2\, r_3\, r_4$ liegen müssten, was nach dem Obigen unzulässig ist. Es treffen sich daher weder s_1 und t_1, noch s_2 und t_2, noch s_3 und t_3, noch s_4 und t_4.

Hieraus folgt weiter, dass die Schnittlinie der beiden Ebenen

$$[a_3 s_1] \quad \text{und} \quad [s t_1]$$

ganz auf der kubischen Fläche $F^{(3)}$ enthalten sein muss; denn es treffen sich weder a_3 und s, noch a_3 und t_1, noch s und s_1, noch t_1 und s_1; wir erhalten hierdurch vier neue Gerade der kubischen Fläche

$$|[a_3 s_1],\ [s t_1]| = q_1, \quad |[a_3 s_2],\ [s t_2]| = q_2, \quad |[a_3 s_3],\ [s t_3]| = q_3, \quad |[a_3 s_4],\ [s t_4]| = q_4$$

und endlich noch sechs Gerade, wenn wir bemerken, dass die Schnittlinie der beiden Ebenen

$$[s_1 t_2] \quad \text{und} \quad [s_2 t_1]$$

ganz der kubischen Fläche $F^{(3)}$ angehören muss, weil weder s_1 und s_2, noch

s_1 und t_1, noch t_2 und t_1, noch t_2 und s_2 sich begegnen; wir erhalten dadurch folgende sechs Gerade der kubischen Fläche:

$$|[s_1t_2],\ [s_2t_1]| = g_{12},\quad |[s_1t_3],\ [s_3t_1]| = g_{13},\quad |[s_1t_4],\ [s_4t_1]| = g_{14},$$
$$|[s_2t_3],\ [s_3t_2]| = g_{23},\quad |[s_2t_4],\ [s_4t_2]| = g_{24},\quad |[s_3t_4],\ [s_4t_3]| = g_{34},$$

und hierdurch ist die Gesammtheit der 27 Geraden auf der kubischen Fläche $F^{(3)}$ erschöpft; wir haben nämlich

die 5 Geraden $a_3\ s\ g\ l\ k,$
die 4 mal 4 Geraden $r_1\ r_2\ r_3\ r_4,\quad s_1\ s_2\ s_3\ s_4,\quad t_1\ t_2\ t_3\ t_4,\quad q_1\ q_2\ q_3\ q_4,$
die 6 Geraden $g_{12}\ g_{13}\ g_{14}\ g_{23}\ g_{24}\ g_{34},$

also zusammen 27 Gerade auf der kubischen Fläche $F^{(3)}$. Diese liegen ihrer Construction gemäss zu je dreien zunächst in den dreissig Ebenen:

$$[a_3lk],\ \text{und}\ [sgk]$$
$$[gr_1s_1]\quad [gr_2s_2]\quad [gr_3s_3]\quad [gr_4s_4]$$
$$[lr_1t_1]\quad [lr_2t_2]\quad [lr_3t_3]\quad [lr_4t_4]$$
$$[a_3s_1q_1]\quad [a_3s_2q_2]\quad [a_3s_3q_3]\quad [a_3s_4q_4]$$
$$[st_1q_1]\quad [st_2q_2]\quad [st_3q_3]\quad [st_4q_4]$$
$$[s_1t_2g_{12}]\quad [s_1t_3g_{13}]\quad [s_1t_4g_{14}]$$
$$[s_2t_1g_{12}]\quad [s_3t_1g_{13}]\quad [s_4t_1g_{14}]$$
$$[s_2t_3g_{23}]\quad [s_2t_4g_{24}]\quad [s_3t_4g_{34}]$$
$$[s_3t_2g_{23}]\quad [s_4t_2g_{24}]\quad [s_4t_3g_{34}],$$

sodann aber noch zu je dreien in 15 weiteren Ebenen, zu denen wir auf folgende Weise gelangen: Die Ebenen $[gs_1r_1]$ und $[st_2q_2]$ schneiden sich in einer Geraden, welche nicht ganz der kubischen Fläche angehören kann, also nur drei Punkte von ihr enthält, von denen zwei (gs) und (s_1t_2) sind; folglich müssen sich im dritten r_1 und q_2 treffen. Ebenso folgt aus den beiden Ebenen $[s_1gr_1]$ und $[t_3s_4g_{34}]$, dass r_1 und g_{34} sich begegnen, und aus den beiden Ebenen $[st_2q_2]$ und $[t_3s_4g_{34}]$, dass q_2 und g_{34} sich begegnen; folglich ist die Gerade g_{34} die dritte in der Ebene $[r_1q_2]$ enthaltene Gerade, und in gleicher Weise ist g_{34} die dritte in der Ebene $[r_2q_1]$ enthaltene Gerade. Die beiden Ebenen $[r_1q_2]$ und $[r_2q_1]$ schneiden sich aber in einer Geraden, welche ganz der kubischen Fläche angehören muss, weil weder r_1 und r_2, noch r_1 und q_1, noch q_2 und r_2, noch q_2 und q_1 sich begegnen, also ist

$$|[r_1q_2],\ [r_2q_1]| = g_{34}.$$

Auf solche Weise erhalten wir die zwölf Ebenen:

$$[r_1 q_2 g_{34}] \quad [r_1 q_3 g_{24}] \quad [r_1 q_4 g_{23}]$$
$$[r_2 q_1 g_{34}] \quad [r_3 q_1 g_{24}] \quad [r_4 q_1 g_{23}]$$
$$[r_2 q_3 g_{14}] \quad [r_2 q_4 g_{13}] \quad [r_3 q_4 g_{12}]$$
$$[r_3 q_2 g_{14}] \quad [r_4 q_2 g_{13}] \quad [r_4 q_3 g_{12}].$$

Endlich resultiren die drei letzten Ebenen aus der Bemerkung, dass die beiden Ebenen $[s_1 t_2 g_{12}]$ und $[t_3 s_4 g_{34}]$ in einer Geraden sich schneiden, welche nicht ganz der kubischen Fläche angehören kann, also nur drei Punkte derselben enthält, von denen zwei $(s_1 t_3)$ und $(s_4 t_2)$ sind; in dem dritten müssen sich also g_{12} und g_{34} treffen; aus den beiden Ebenen $[s_1 t_2 g_{12}]$ und $[a_3 l k]$ folgt, dass g_{12} und k sich begegnen, und aus den beiden Ebenen $[t_3 s_4 g_{34}]$ und $[s g k]$, dass g_{34} und k sich begegnen; folglich ist k die dritte Gerade in der Ebene $[g_{12} g_{34}]$ und in gleicher Weise auch in der Ebene $[g_{13} g_{24}]$ und in der Ebene $[g_{14} g_{23}]$; also erhalten wir die drei letzten Ebenen

$$[g_{12} g_{34} k] \quad [g_{13} g_{24} k] \quad [g_{14} g_{23} k]$$

und sehen, dass die 27 Geraden der kubischen Fläche sich zu je dreien in 45 Ebenen vertheilen, ein Arrangement, wie es bekanntlich auch aus den früheren Erzeugungsweisen der kubischen Fläche hervortritt.

Wir bemerken noch, dass von diesen Geraden u. a. auch je zwölf zu einer *Schlaefli*schen Doppelsechs zusammentreten, nämlich

$$\begin{Bmatrix} s & l & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ a_3 & g & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{Bmatrix} \quad \text{oder auch} \quad \begin{Bmatrix} s & a_3 & r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \\ l & g & q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{Bmatrix},$$

wie aus dem Obigen leicht zu erkennen ist.

6. Was die Realität der 27 Geraden bei dieser Erzeugungsweise der kubischen Fläche anbelangt, so wissen wir, dass von den oben mit

$$\mathfrak{r}_1 \quad \mathfrak{r}_2 \quad \mathfrak{r}_3 \quad \mathfrak{r}_4$$

bezeichneten Durchschnittspunkten des Kegelschnitts $\mathfrak{K}_2^{(2)}$ mit einer Curve dritten Grades, welche in einem Kegelschnittpunkte einen Doppelpunkt hat, entweder alle vier, oder zwei, oder keiner reell sein werden. Sind alle vier, $\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3 \mathfrak{r}_4$, reell, so werden offenbar sämmtliche 27 Geraden der kubischen Fläche reell; sind nur zwei, $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$, reell, so enthält die kubische Fläche nur 15 reelle und zwölf imaginäre Gerade; die 15 reellen Geraden sind:

$$a_3 \quad s \quad g \quad l \quad k \quad r_1 \quad r_2 \quad s_1 \quad s_2 \quad t_1 \quad t_2 \quad q_1 \quad q_2 \quad g_{12} \quad g_{34}.$$

Die zwölf imaginären Geraden gehören einer Doppelsechs an:

$$\begin{Bmatrix} s_3 & t_3 & r_4 & q_4 & g_{14} & g_{24} \\ s_4 & t_4 & r_3 & q_3 & g_{13} & g_{23} \end{Bmatrix}.$$

Ist keiner von den vier Durchschnittspunkten $\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3 \mathfrak{r}_4$ reell, so sind noth-

wendig die 16 Geraden:

$$\begin{matrix} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{matrix}$$

sämmtlich ganz imaginär; denn die vier Ebenen $[l\mathfrak{r}_i]$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ müssen imaginär sein, weil, wenn sie reell wären, auch die vier Punkte $\mathfrak{r}_i$ reell sein müssten. Da aber die Ebene $[l\mathfrak{r}_i] = [lr_i]$ imaginär ist, so kann sie ausser der reellen Geraden l weder eine reelle Gerade noch eine punktirt-imaginäre Gerade enthalten; folglich muss die in ihr liegende Gerade t_i ganz imaginär sein, ebenso wie r_i; denn da die imaginäre Ebene $[l\mathfrak{r}_i]$ aus der reellen kubischen Fläche nur einen ganz imaginären Kegelschnitt noch ausschneiden kann, welcher sich hier in die beiden Geraden r_i und t_i auflöst, so müssen beide ganz imaginär sein.

Da ferner die Ebene $[l\mathfrak{r}_i]$ imaginär ist, so kann auch die Ebene $[g\mathfrak{r}_i]$ nicht reell sein, denn sonst müsste ihre Schnittlinie r_i wenigstens einen reellen Punkt haben, was nicht der Fall ist; oder g und l müssten sich begegnen, was auch nicht der Fall ist. Da also die Ebene $[gr_i]$ imaginär ist, so muss die dritte Gerade s_i der kubischen Fläche, welche sie enthält, ebenfalls ganz imaginär sein.

Da endlich die Ebene $[gs_i]$ imaginär ist, so kann auch die Ebene $[a_3 s_i]$ nicht reell sein, denn sonst müsste entweder ihre Schnittlinie s_i wenigstens einen reellen Punkt enthalten, was nicht der Fall ist, oder g und a_3 müssten sich treffen, was auch nicht der Fall ist; da also die Ebene $[a_3 s_i]$ imaginär ist, so muss auch q_i, die dritte Gerade, in welcher sie die kubische Fläche schneidet, ganz imaginär sein.

Es müssen also die sechszehn Geraden

$$r_i \quad s_i \quad t_i \quad q_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

ganz imaginär sein, und die sechszehn Ebenen

$$[gr_i s_i] \quad [lr_i t_i] \quad [a_3 s_i q_i] \quad [st_i q_i] \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

sind gleichfalls imaginär.

Dass auch die zwölf Ebenen

$$[s_i t_k g_{ik}] \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

imaginär sein müssen, erkennen wir so: Wäre z. B. $[s_1 t_2 g_{12}]$ reell, so müsste, da die Ebene $[s_1 q_1 a_3]$ imaginär ist, ihre Schnittlinie s_1 wenigstens einen reellen Punkt haben, was nicht der Fall ist.

Endlich sind auch die zwölf Ebenen

$$[r_i q_k] \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

imaginär; denn wäre z. B. $[r_1 q_2 g_{34}]$ reell, so müsste, da $[r_1 s_1 g]$ imaginär ist, die Schnittlinie r_1 wenigstens einen reellen Punkt haben, was nicht der Fall ist.

Wir haben also nach den 16 ganz imaginären Geraden $r_i\, s_i\, t_i\, q_i$, zu denen die fünf reellen Geraden $a_3\, s\, g\, l\, k$ hinzukommen, nur noch die sechs übrigen

$$g_{12} \quad g_{34} \quad g_{13} \quad g_{24} \quad g_{14} \quad g_{23}$$

hinsichtlich ihrer Realität zu untersuchen, und nach den 40 imaginären Ebenen, deren jede die kubische Fläche in drei Geraden schneidet, und zu denen noch die beiden reellen Ebenen

$$[a_3 l k] \quad \text{und} \quad [s g k]$$

kommen, nur noch die drei übrigen Ebenen

$$[g_{12} g_{34} k] \quad [g_{13} g_{24} k] \quad [g_{14} g_{23} k]$$

hinsichtlich ihrer Realität zu untersuchen.

Was zunächst die sechs Geraden g_{ik} anbetrifft, so können sie nicht ganz imaginär, sondern müssen entweder reell oder punktirt-imaginär sein; denn da die Ebene $[s_i t_k g_{ik}]$ imaginär ist, so muss sie eine reelle Gerade enthalten, welche der reellen kubischen Fläche mindestens in einem reellen Punkte begegnen muss; da dieser aber auf s_i und t_k nicht liegen kann, so muss er auf g_{ik} liegen; oder g_{ik} kann selbst die einzige reelle in der imaginären Ebene enthaltene Gerade sein; mithin muss g_{ik} entweder punktirt-imaginär oder reell sein.

Alle sechs Geraden g_{ik} können nicht gleichzeitig reell sein, denn sonst hätten wir durch die reelle Gerade k fünf reelle Ebenen, deren jede die kubische Fläche noch in einem reellen Linienpaare schnitte; dann müssen aber, wenn wir aus vieren dieser Linienpaare je eine Gerade herausnehmen, solche vier Gerade, die gleichzeitig von k getroffen werden, noch von einer zweiten reellen Geraden getroffen werden, die ganz der $F^{(3)}$ angehörte, also eine der 16 übrigen Geraden sein müsste, von denen wir doch wissen, dass sie sämmtlich ganz imaginär sind. Folglich muss mindestens eine der sechs Geraden punktirt-imaginär sein; nennen wir sie g_{23}, dann muss nothwendig auch g_{14} punktirt-imaginär sein, denn wäre g_{14} reell, so müsste in der reellen Ebene $[k g_{14}]$ auch die dritte Gerade g_{23} reell sein, was nicht der Fall ist.

Die übrigen vier Geraden $g_{13}\,g_{24}\,g_{12}\,g_{34}$ können auch nicht gleichzeitig reell sein; denn wären z. B. g_{12} und g_{13} beide reell, so würden die vier windschiefen reellen Geraden

$$g_{12}\quad g_{13}\quad g\quad a_3$$

ausser von der einen reellen Geraden k nur noch von einer zweiten reellen Geraden geschnitten werden müssen, die der kubischen Fläche angehören müsste; sie werden aber factisch von der Geraden s_1 geschnitten; diese müsste also reell sein, was nicht der Fall ist. Folglich können g_{12} und g_{13} nicht beide reell sein, sondern eine muss punktirt-imaginär sein; nennen wir sie g_{13}; dann muss offenbar auch g_{24} punktirt-imaginär sein, und es bleibt nur noch für die beiden letzten Geraden

$$g_{12}\quad \text{und}\quad g_{34}$$

nachzusehen, ob sie punktirt-imaginär oder reell sind.

Um dies zu ermitteln, bemerken wir zuerst, dass die drei Ebenen

$$[kg_{12}g_{34}]\quad [kg_{13}g_{24}]\quad [kg_{14}g_{23}]$$

reell sein müssen, denn durch eine punktirt-imaginäre Gerade g_{ik} geht nur eine einzige reelle Ebene; gehört die punktirt-imaginäre Gerade der kubischen Fläche $F^{(3)}$ an, so kann die durch dieselbe gehende reelle Ebene die kubische Fläche nur noch in einem Kegelschnitt schneiden, der weder ganz reell noch ganz imaginär sein darf; denn wäre er reell, so würde eine beliebige reelle Gerade in dieser reellen Ebene die kubische Fläche nothwendig noch in einem dritten reellen Punkte schneiden müssen, der auf g_{ik} liegen müsste, was unmöglich ist, weil g_{ik} eine punktirt-imaginäre Gerade ist. Jener Kegelschnitt kann auch nicht ganz imaginär sein; denn sonst würde eine reelle Gerade der reellen Ebene, weil sie den imaginären Kegelschnitt in zwei imaginären Punkten schneidet, die g_{ik} noch in einem reellen Punkte schneiden müssen, was wiederum unmöglich ist, weil g_{ik} punktirt-imaginär ist. Vielmehr muss in der reellen durch g_{ik} gehenden Ebene der übrige Durchschnittskegelschnitt mit $F^{(3)}$ zerfallen in eine reelle Gerade und eine punktirt-imaginäre Gerade, weil eine beliebige reelle Gerade in dieser reellen Ebene die kubische Fläche in einem reellen und zwei imaginären Punkten schneidet, von denen einer auf g_{ik} liegt. Da aber solche reellen Geraden unserer reellen Ebene, welche durch den einzigen reellen Punkt der punktirt-imaginären Geraden g_{ik} gehen, die $F^{(3)}$ in drei reellen Punkten schneiden und es auf der zweiten imaginären Geraden höchstens nur einen einzigen reellen Punkt geben kann, so muss dieser

mit dem reellen Punkte von g_{ik} coincidiren, d. h. unsere einzige durch g_{ik} gehende reelle Ebene muss die kubische Fläche in einer reellen Geraden und zwei punktirt-imaginären Geraden schneiden, die in ihrem Schnittpunkte den einzigen reellen Punkt gemeinsam haben und von denen g_{ik} eine ist.

Sehen wir nun nach, ob durch g_{13} überhaupt eine Ebene geht, welche ausserdem in einer reellen und in einer punktirt-imaginären Geraden die kubische Fläche noch schneidet, so finden wir, dass es nur eine solche Ebene giebt, nämlich $[g_{13}g_{24}k]$. Diese muss daher reell sein, die beiden Geraden g_{13} g_{24} müssen punktirt-imaginär sein und den einzigen reellen Punkt $(g_{13}g_{24})$ gemeinsam haben.

Dasselbe gilt von der Ebene $[g_{14}g_{23}k]$ und würde auch von der Ebene $[g_{12}g_{34}k]$ gelten, wenn g_{12} und g_{34} punktirt-imaginär wären; sind sie aber reell, was noch zulässig ist, so ist selbstverständlich ihre Ebene und ihr Schnittpunkt reell.

Um die letzte Frage zu entscheiden, ob die Geraden g_{12} und g_{34} punktirt-imaginär oder reell sind, kehren wir zu den früher mit

$$\mathfrak{r}_1 \quad \mathfrak{r}_2 \quad \mathfrak{r}_3 \quad \mathfrak{r}_4$$

bezeichneten vier imaginären Punkten des reellen Kegelschnitts $\mathfrak{K}_2^{(2)}$ zurück und bemerken, dass durch dieselben ein und nur ein reelles Linienpaar gehen muss, d. h. von den drei Linienpaaren

$$|\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3|\ |\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_4|, \qquad |\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_1|\ |\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_4|, \qquad |\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2|\ |\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_4|$$

muss eines reell, die beiden andern punktirt-imaginär sein. Wir wählen entsprechend der bereits getroffenen Wahl für das reelle Linienpaar das letzte

$$|\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2| = d_{12}, \quad |\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_4| = d_{34}.$$

Dann folgt, dass die drei reellen windschiefen Geraden

$$d_{12} \quad l \quad g$$

sämmtlich von den beiden imaginären Geraden r_1 und r_2 getroffen werden; es lässt sich daher durch $d_{12}\,l\,g$ ein reelles Hyperboloid $H^{(2)}$ legen, welches die beiden imaginären Geraden r_1 und r_2 ganz enthalten muss; d. h. wenn wir irgend eine reelle Gerade nehmen, welche $d_{12}\,l\,g$ gleichzeitig trifft, und durch dieselbe eine beliebige reelle Ebene legen, so muss sie r_1 und r_2 in zwei imaginären Punkten treffen, die allemal auf einer reellen Geraden liegen.

Da das reelle Hyperboloid $H^{(2)}$ die beiden imaginären Geraden $r_1\,r_2$ ganz enthält, so wird eine reelle Ebene, welche wir jetzt durch die Gerade s legen, dies Hyperboloid in einem reellen Kegelschnitt schneiden,

auf dem die Durchschnittspunkte mit $g\,l\,r_1\,r_2$ liegen; die durch s gelegte reelle Ebene schneidet die kubische Fläche $F^{(3)}$ ausser in s noch in einem reellen Kegelschnitt, welcher den Durchschnittspunkt mit der reellen Geraden l enthält (welche s nicht trifft). Die beiden reellen Kegelschnitte in unserer Ebene haben also einen reellen Punkt (den Durchschnittspunkt der reellen Ebene mit l) und zwei imaginäre Punkte (die Durchschnittspunkte mit r_1 und r_2) gemein, folglich nothwendig noch einen zweiten reellen Punkt, der mit dem Durchschnittspunkte auf l verbunden eine reelle gemeinschaftliche Secante beider Kegelschnitte liefert und eine zweite reelle gemeinschaftliche Secante nothwendig macht, auf welcher die imaginären Durchschnittspunkte mit r_1 und r_2 liegen müssen. Wir schliessen also, dass jede reelle durch s gelegte Ebene die imaginären Geraden r_1 und r_2 in zwei imaginären Punkten treffen muss, die auf einer reellen Geraden liegen. Hieraus folgt, dass es ein reelles Hyperboloid geben muss, dessen eine Regelschaar den drei Geraden $s\,r_1\,r_2$ begegnet oder, was dasselbe sagt, dass durch die reelle Gerade s und die beiden imaginären Geraden $r_1\,r_2$ ein reelles Hyperboloid sich legen lässt. Dies reelle Hyperboloid schneidet die kubische Fläche noch in den drei Geraden $g\,q_3\,q_4$, welche gleichzeitig den dreien $s\,r_1\,r_2$ begegnen; es hat also mit der kubischen Fläche zwei reelle und vier imaginäre Gerade gemein.

Nehmen wir nun eine ganz beliebige reelle Ebene ε, welche das reelle Hyperboloid $\left\{\begin{matrix} s & r_1 & r_2 \\ g & q_3 & q_4 \end{matrix}\right\}$ in einem reellen Kegelschnitt $C^{(2)}$ und die kubische Fläche $F^{(3)}$ in einer reellen Curve $C^{(3)}$ schneidet, deren gemeinschaftliche Punkte die sechs Durchschnittspunkte mit $\left\{\begin{matrix} s & r_1 & r_2 \\ g & q_3 & q_4 \end{matrix}\right\}$ sind, so sehen wir, dass von denselben zwei reell sind (die Durchschnittspunkte von ε mit s und g), die vier übrigen imaginär sind, aber nothwendig durch ein und nur ein reelles Linienpaar verbunden sein müssen. Dies reelle Linienpaar ist leicht zu ermitteln; denn die Durchschnittspunkte von ε mit r_1 und q_3 können nicht auf einer reellen Geraden liegen, weil eine solche die in der Ebene $[r_1 q_3 g_{24}]$ befindliche Gerade g_{24} sonst in einem reellen Punkte treffen müsste, und doch hat g_{24} nur einen einzigen reellen Punkt $(g_{24} g_{13})$, der nicht in der willkürlich gewählten Ebene ε liegt; also können die Durchschnittspunkte von ε mit r_1 und q_3 nicht in einer reellen Geraden liegen; ebensowenig die Durchschnittspunkte von ε mit r_1 und q_4, noch die mit r_2 und q_3, noch auch die mit r_2 und q_4; also bleiben nur übrig die

Durchschnittspunkte von ε mit r_1 und r_2 auf einer reellen Geraden und die Durchschnittspunkte von ε mit q_3 und q_4 auf der zweiten reellen Geraden. Wir schliessen also, jede beliebige reelle Ebene ε wird die imaginären Geraden r_1 und r_2 in zwei imaginären Punkten treffen, die auf einer reellen Geraden liegen müssen, und dasselbe gilt von q_3 und q_4. Solche zwei imaginären Geraden r_1 und r_2 (oder q_3 und q_4) nennt Herr *R. Sturm*, auf dessen sinnreiche Betrachtungen über die Realität der 27 Geraden (a. a. O. S. 281 ff.) unsere Untersuchung sich stützt, zwei *conjugirt-imaginäre Gerade*. Ebenso erkennen wir, dass auch r_3 und r_4, sowie q_1 und q_2 zwei conjugirt-imaginäre Gerade sein müssen, d. h. von jeder reellen Ebene in je zwei imaginären Punkten getroffen werden, die auf einer reellen Geraden liegen.

Legen wir nun endlich durch die reelle Gerade k ein Büschel von reellen Ebenen, so schneidet jede derselben r_1 und r_2 in zwei imaginären Punkten, die auf einer reellen Geraden liegen, und alle diese Geraden gehören daher einer Regelschaar eines reellen Hyperboloids an, welches die Geraden $k\,r_1\,r_2$ enthält. Dieses reelle Hyperboloid schneidet die kubische Fläche $F^{(3)}$ ausserdem in den drei Geraden $g\,l\,g_{34}$, weil jede derselben gleichzeitig den dreien $k\,r_1\,r_2$ begegnet; folglich müssen $\left\{\begin{matrix} k & r_1 & r_2 \\ g & l & g_{34} \end{matrix}\right\}$ auf einem reellen Hyperboloid liegen, und da auf einem solchen eine punktirt-imaginäre Gerade überhaupt nicht liegen kann, sondern nur reelle oder ganz imaginäre, g_{34} aber keine ganz imaginäre Gerade ist, so muss g_{34} *reell* sein. Ebenso muss auf dem reellen Hyperboloid $\left\{\begin{matrix} k & q_3 q_4 \\ a_3 s & g_{12} \end{matrix}\right\}$ die reelle Gerade g_{12} liegen. Es müssen also die Geraden g_{12} und g_{34} reell sein. Dasselbe können wir auch schliessen aus der Realität des Hyperboloids $\left\{\begin{matrix} k\,r_3\,r_4 \\ g\,l\,g_{12} \end{matrix}\right\}$ oder des Hyperboloids $\left\{\begin{matrix} k & q_1 q_2 \\ a_3 s & g_{34} \end{matrix}\right\}$.

Unsere Construction der kubischen Fläche führt uns also in dem Falle, dass $\mathfrak{r}_1\,\mathfrak{r}_2\,\mathfrak{r}_3\,\mathfrak{r}_4$ sämmtlich imaginär sind, auf diejenige Gattung, welche

7 reelle Gerade $a_3 \quad s \quad l \quad g \quad k \quad g_{12} \quad g_{34}$,

4 punktirt-imaginäre Gerade $g_{13} \quad g_{24} \quad g_{14} \quad g_{23}$,

16 ganz imaginäre Gerade $r_i \quad s_i \quad t_i \quad q_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$

enthält, wobei von den 45 Ebenen, welche je drei der kubischen Fläche angehörige Gerade enthalten, 40 imaginär und fünf, nämlich:

$$[k a_3 l] \quad [k s g] \quad [k g_{12} g_{34}] \quad [k g_{13} g_{24}] \quad [k g_{14} g_{23}]$$

reell sind; von diesen enthalten nur drei reelle Geraden-Tripel, die beiden übrigen jede eine reelle und zwei punktirt-imaginäre Gerade, die ihren reellen Punkt gemeinsam haben; diese fünf reellen Ebenen haben eine der sieben reellen Geraden gemeinsam. Von den 40 imaginären Tripelebenen haben 24 die einzige reelle Gerade, welche jede enthalten muss, ganz auf der kubischen Fläche liegend, die übrigen 16 nicht, sondern nur je einen reellen Punkt derselben.

7. Wir können unsere vierte in 5. beschriebene Erzeugungsweise der kubischen Fläche zurückführen auf eine bekannte Erzeugung derselben aus einem Ebenenbüschel und einem mit demselben projectiven Büschel von Flächen zweiter Ordnung, welche dieselbe Grundcurve, eine Raumcurve vierter Ordnung und erster Species gemein haben; diese zerfällt bei unserer Construction in ein Linienpaar und einen Kegelschnitt.

Indem wir von der in 5. beschriebenen Erzeugungsweise der kubischen Fläche ausgehen, können wir uns sämmtliche Ebenen durch $\mathfrak{B}$, das ganze Ebenenbündel, dadurch vergegenwärtigen, dass wir in der festen Ebene $[\mathfrak{B}b_3]$ zuerst eine beliebige Gerade durch $\mathfrak{B}$ ziehen, welche in $\mathfrak{x}_3$ der Geraden b_3 begegne, und die Gerade $|\mathfrak{B}\mathfrak{x}_3|$ als Axe eines Ebenenbüschels festhalten; alle Ebenen dieses Büschels umfassen eine einfache Mannigfaltigkeit; lassen wir sodann $\mathfrak{x}_3$ die ganze Gerade b_3 durchlaufen, so erhalten wir unendlich viele solcher Ebenenbüschel, und die Gesammtheit aller Ebenen dieser Büschel umfasst die doppelte Mannigfaltigkeit des Ebenenbündels $\mathfrak{B}$.

Halten wir nun zuerst $\mathfrak{x}_3$ fest, so bleibt auch die Ebene $[a_3\mathfrak{x}_3]$ fest; das Ebenenbüschel um die Axe $|\mathfrak{B}\mathfrak{x}_3|$ schneidet aus den Ebenen β_1 und β_2 zwei ebene Strahlbüschel aus, welche von den Schnittlinien x_1 und x_2 beschrieben werden; denn die Gerade $|\mathfrak{B}\mathfrak{x}_3|$ trifft β_1 und β_2 in den beiden festen Punkten $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$, um welche sich die Strahlen x_1 und x_2 drehen. Die Ebenen $[\mathfrak{A}_1x_1]$ und $[\mathfrak{A}_2x_2]$ beschreiben also zwei Ebenenbüschel um die festen Axen $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{x}_1|$ und $|\mathfrak{A}_2\mathfrak{x}_2|$ und erzeugen ein Hyperboloid $X^{(2)}$, welches von der festen Ebene $[a_3\mathfrak{x}_3]$ in einem Kegelschnitt geschnitten wird, der auf der kubischen Fläche liegt, weil er nur Schnittpunkte des gesuchten Ortes

$$([\mathfrak{A}_1x_1],\ [\mathfrak{A}_2x_2],\ [a_3\mathfrak{x}_3]) = \mathfrak{x}$$

enthält; er ist der übrige Schnitt, in welchem die feste Ebene $[a_3\mathfrak{x}_3]$ ausser der Geraden a_3 die kubische Fläche durchschneidet.

Mit der Veränderung von $\mathfrak{x}_3$ auf b_3 erhalten wir also eine Reihe von Hyperboloiden $X^{(2)}$, die von den zugehörigen Ebenen des Büschels $[a_3\mathfrak{x}_3]$ in Kegelschnitten durchschnitten werden, welche die ganze kubische Fläche erfüllen. Es ist nun leicht zu erkennen, dass die Hyperboloide $X^{(2)}$ ein Büschel von Flächen zweiter Ordnung mit derselben Grundcurve beschreiben und dass dieses Flächenbüschel mit dem Ebenenbüschel $[a_3\mathfrak{x}_3]$ projectiv ist.

In der That, da sich die beiden Geraden $x_1\, x_2$ immer auf der Schnittlinie $s = |\beta_1\beta_2|$ treffen, so gehört die ganze Gerade s dem Hyperboloid $X^{(2)}$ an, und dasselbe wird schon bestimmt durch die drei windschiefen Geraden

$$|\mathfrak{A}_1\mathfrak{x}_1| \quad |\mathfrak{A}_2\mathfrak{x}_2| \quad s.$$

Bei der Bewegung von $\mathfrak{x}_3$ auf b_3 durchlaufen die Punkte $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$, welche auf der Geraden $|\mathfrak{B}\mathfrak{x}_3|$ liegen, zwei perspectiv liegende gerade Punktreihen auf den Trägern

$$|[\mathfrak{B}b_3],\ \beta_1| = b_1, \quad |[\mathfrak{B}b_3],\ \beta_2| = b_2.$$

Die Schnittlinie

$$|[\mathfrak{A}_1 b_1],\ [\mathfrak{A}_2 b_2]| = g$$

muss also den beiden Geraden $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{x}_1|$ und $|\mathfrak{A}_2\mathfrak{x}_2|$ begegnen, weil sie mit jeder derselben in einer Ebene liegt.

Ausserdem begegnet auch g der Geraden s, wie wir aus dem Früheren wissen; also gehört g dem Hyperboloid $X^{(2)}$ ganz an, weil g drei windschiefen Erzeugenden desselben gleichzeitig begegnet.

Die sämmtlichen Hyperboloide $X^{(2)}$ haben ausser den beiden Geraden s und g noch die Punkte $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ gemeinschaftlich. Ziehen wir die Gerade $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}|$ und suchen den zweiten Schnittpunkt derselben mit dem Hyperboloid $X^{(2)}$ auf. Um denselben zu erhalten brauchen wir nur die Ebene $[\mathfrak{B}\mathfrak{A}_1\mathfrak{x}_1]$ zu legen, welche den beiden Erzeugenden $|\mathfrak{A}_2\mathfrak{x}_2|$ und s in zwei Punkten begegnen wird, deren Verbindungslinie die Gerade $|\mathfrak{B}\mathfrak{A}_1|$ in dem gesuchten Punkte schneiden muss. Die Ebene $[\mathfrak{B}\mathfrak{A}_1\mathfrak{x}_1]$ schneidet aber $|\mathfrak{A}_2\mathfrak{x}_2|$ in dem Punkte $\mathfrak{x}_2$ selbst, weil $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ auf dem Strahl $|\mathfrak{B}\mathfrak{x}_3|$ liegen; trifft also die Ebene $[\mathfrak{B}\mathfrak{A}_1\mathfrak{x}_1]$ die Gerade s im Punkte $\mathfrak{z}$, so ist $|\mathfrak{x}_2\mathfrak{z}|$ diejenige Gerade, welche $|\mathfrak{B}\mathfrak{A}_1|$ in dem gesuchten Punkte trifft. Da sich aber $|\mathfrak{B}\mathfrak{A}_1|$ und $|\mathfrak{x}_2\mathfrak{z}|$ in einem Punkte treffen, den wir suchen, so wird jede andere Ebene, die durch $|\mathfrak{x}_2\mathfrak{z}|$ geht, auch durch diesen Treffpunkt gehen müssen; die Gerade $|\mathfrak{x}_2\mathfrak{z}|$ liegt ganz in der Ebene β_2, also wird der Treffpunkt

$$(|\mathfrak{B}\mathfrak{A}_1|,\ \beta_2) = \mathfrak{B}_2$$

der gesuchte Treffpunkt sein müssen, den wir schon früher in der Ebene β_2 gefunden hatten; dieser Punkt ist aber völlig unabhängig von den Punkten $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$, mithin ist er für sämmtliche Hyperboloide $X^{(2)}$ derselbe; in gleicher Weise erkennen wir, dass dieselben auch durch den festen Punkt

$$(|\mathfrak{B}\mathfrak{A}_2|, \beta_1) = \mathfrak{B}_1$$

gehen müssen; da somit sämmtliche Hyperboloide die feste Ebene $[\mathfrak{B}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2]$ in Kegelschnitten schneiden müssen, welche ausser durch die vier festen Punkte $\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_2\,\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_2$ auch durch die beiden Schnittpunkte mit s und g laufen, so fallen sie sämmtlich in einen einzigen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ zusammen, der in der Ebene $[\mathfrak{B}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2]$ liegt und durch die sechs Punkte schon mehr als bestimmt wird.

Hieraus geht hervor, dass sämmtliche Hyperboloide $X^{(2)}$ einem Büschel angehören, dessen Grundcurve aus den beiden in einer Ebene liegenden Geraden g und s und einem Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ besteht, welcher von den Geraden g und s getroffen wird; ein besonderes Hyperboloid dieses Büschels zerfällt also in ein Ebenenpaar, die Ebene $[gs]$ und die Ebene $[\mathfrak{B}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2]$, in welcher der Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ liegt. Die Projectivität dieses Hyperboloidenbüschels mit dem von der Ebene $[a_3\mathfrak{x}_3]$ beschriebenen Ebenenbüschel erkennen wir daraus, dass die feste Ebene $[g\mathfrak{A}_1]$ aus jedem Hyperboloid des Büschels einen zweiten Strahl $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{x}_1|$ herausschneidet und diese Strahlen ein ebenes Strahlbüschel bilden, welches perspectiv liegt mit dem vom Strahle $|\mathfrak{B}\mathfrak{x}_3|$ beschriebenen Strahlbüschel, also auch projectiv ist mit dem von der Ebene $[a_3\mathfrak{x}_3]$ beschriebenen Ebenenbüschel; folglich ist auch das Hyperboloidenbüschel mit diesem Ebenenbüschel projectiv. Dem besonderen Hyperboloid des ersten Büschels, welches in das Ebenenpaar $[\mathfrak{B}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2]$ und $[gs]$ zerfällt, entspricht die Ebene $[a_3\mathfrak{b}_3]$, wo $\mathfrak{b}_3$ den früher bezeichneten Punkt

$$([\mathfrak{B}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2], b_3) = \mathfrak{b}_3$$

bedeutet, und der Kegelschnitt, in welchem sich diese beiden entsprechenden Elemente der beiden Büschel durchschneiden, zerfällt daher in das Linienpaar l und k, welches auf der kubischen Fläche liegt. —

8. Den im Vorhergehenden beschriebenen Erzeugungsweisen der kubischen Fläche lassen sich noch zwei andere zur Seite stellen, welche von andern Elementen ausgehend, ebenfalls zur Erzeugung der allgemeinen Fläche dritter Ordnung führen. Um aber den Umfang dieser Arbeit nicht zu weit auszudehnen, wollen wir nur die einfach sich ergebenden Resultate

kurz zusammenstellen, zumal die Untersuchung hier, der früheren analog, ohne Schwierigkeit durchgeführt werden kann.

Die eine Erzeugungsweise ist analog der in 2. ausgeführten und lautet so:

Es sind gegeben im Raume drei beliebige Gerade $\boldsymbol{a}_1\, \boldsymbol{a}_2\, \boldsymbol{a}_3$ (von denen keine zwei einander begegnen) und drei beliebige Ebenen $\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3$; um einen festen Punkt $\mathfrak{P}$ dreht sich ein veränderlicher Strahl x, der ein Strahlenbündel beschreibt; die Durchschnittspunkte

$$(x\alpha_1) = \mathfrak{x}_1, \quad (x\alpha_2) = \mathfrak{x}_2, \quad (x\alpha_3) = \mathfrak{x}_3$$

werden bez. mit den festen Axen $\boldsymbol{a}_1\, \boldsymbol{a}_2\, \boldsymbol{a}_3$ durch Ebenen verbunden, dann beschreibt der Schnittpunkt je dreier entsprechenden Ebenen

$$([\boldsymbol{a}_1\mathfrak{x}_1]\ [\boldsymbol{a}_2\mathfrak{x}_2]\ [\boldsymbol{a}_3\mathfrak{x}_3]) = \mathfrak{x}$$

eine kubische Fläche $F^{(3)}$.

Dieselbe enthält die drei Geraden $\boldsymbol{a}_1\, \boldsymbol{a}_2\, \boldsymbol{a}_3$ ganz; bezeichnen wir sodann die Schnittpunkte

$$(\boldsymbol{a}_1\alpha_1) = \mathfrak{A}_1, \quad (\boldsymbol{a}_2\alpha_2) = \mathfrak{A}_2, \quad (\boldsymbol{a}_3\alpha_3) = \mathfrak{A}_3$$

und

$$(|\mathfrak{B}\mathfrak{A}_1|\alpha_2) = \mathfrak{p}_2, \quad (|\mathfrak{B}\mathfrak{A}_2|\alpha_3) = \mathfrak{q}_3, \quad (|\mathfrak{B}\mathfrak{A}_3|\alpha_1) = \mathfrak{r}_1,$$
$$(|\mathfrak{B}\mathfrak{A}_1|\alpha_3) = \mathfrak{p}_3, \quad (|\mathfrak{B}\mathfrak{A}_2|\alpha_1) = \mathfrak{q}_1, \quad (|\mathfrak{B}\mathfrak{A}_3|\alpha_2) = \mathfrak{r}_2,$$

so erhalten wir sechs neue Gerade, die ganz der kubischen Fläche angehören als die Durchschnittslinien der Ebenen:

$$|[\boldsymbol{a}_2\mathfrak{p}_2]\ [\boldsymbol{a}_3\mathfrak{p}_3]| = g_{23}, \quad |[\boldsymbol{a}_3\mathfrak{q}_3]\ [\boldsymbol{a}_1\mathfrak{q}_1]| = g_{31}, \quad |[\boldsymbol{a}_1\mathfrak{r}_1]\ [\boldsymbol{a}_2\mathfrak{r}_2]| = g_{12};$$
$$|[\boldsymbol{a}_2\mathfrak{r}_2]\ [\boldsymbol{a}_3\mathfrak{q}_3]| = l_{23}, \quad |[\boldsymbol{a}_3\mathfrak{p}_3]\ [\boldsymbol{a}_1\mathfrak{r}_1]| = l_{31}, \quad |[\boldsymbol{a}_1\mathfrak{q}_1]\ [\boldsymbol{a}_2\mathfrak{p}_2]| = l_{12}.$$

Diese neun Geraden bilden zwei *Steiner*sche Triëder

$$\begin{array}{c|c|c} \boldsymbol{a}_1 & g_{12} & l_{13} \\ \hline l_{12} & \boldsymbol{a}_2 & g_{23} \\ \hline g_{31} & l_{32} & \boldsymbol{a}_3, \end{array}$$

indem immer je drei in einer Horizontalreihe und je drei in einer Verticalreihe stehende Gerade in einer Ebene liegen.

Zu den übrigen Geraden der kubischen Fläche gelangen wir durch die Regelschaar von Geraden l_x, welche gleichzeitig den drei gegebenen Geraden $\boldsymbol{a}_1\, \boldsymbol{a}_2\, \boldsymbol{a}_3$ begegnen; die drei Ebenen $[\boldsymbol{a}_1 l_x]\ [\boldsymbol{a}_2 l_x]\ [\boldsymbol{a}_3 l_x]$ beschreiben bei der Veränderung der l_x in der Regelschaar drei projective Ebenenbüschel und schneiden daher bez. die Ebenen $\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3$ in drei projectiven Strahl-

büscheln, von denen x_1 x_2 x_3 drei entsprechende Strahlen seien; sobald nun solche drei entsprechende Strahlen von einem durch $\mathfrak{B}$ gehenden Strahle x gleichzeitig getroffen werden in den Punkten $\mathfrak{x}_1$ $\mathfrak{x}_2$ $\mathfrak{x}_3$, müssen offenbar auch die drei entsprechenden Ebenen $[a_1\mathfrak{x}_1]$ $[a_2\mathfrak{x}_2]$ $[a_3\mathfrak{x}_3]$ sich nicht bloss in einem Punkte $\mathfrak{x}$ der kubischen Fläche, sondern in einer Geraden l_x schneiden, welche ganz der kubischen Fläche angehört. Legen wir daher die drei Ebenen $[\mathfrak{B}x_1]$ $[\mathfrak{B}x_2]$ $[\mathfrak{B}x_3]$, so beschreiben dieselben drei projective Ebenenbüschel um die bez. Axen $|\mathfrak{B}\mathfrak{A}_1|$ $|\mathfrak{B}\mathfrak{A}_2|$ $|\mathfrak{B}\mathfrak{A}_3|$, und es wird im Allgemeinen dreimal vorkommen, dass sich drei entsprechende Ebenen derselben in einer Geraden schneiden; es giebt daher auch drei solche Gerade x durch $\mathfrak{B}$, deren jede den drei entsprechenden Strahlen x_1 x_2 x_3 gleichzeitig begegnet, mithin auch drei Gerade l_1 l_2 l_3 aus der Regelschaar l_x, die der kubischen Fläche angehören; von diesen muss eine reell, die beiden andern können imaginär sein.

Aus jeder dieser drei Geraden l_1 l_2 l_3 folgen fünf weitere, so dass alle $9+6.3=27$ Geraden der kubischen Fläche in der Lagenbeziehung hervortreten, welcher sie unterworfen sind. Denn es schneidet

die Ebene $[a_1l_1]$ die kubische Fläche in der dritten Geraden k_{11},
" " $[a_2l_1]$ " " " " " " " k_{21},
" " $[a_3l_1]$ " " " " " " " k_{31},

und es ist leicht einzusehen (s. o. 2.), dass

k_{11} die Geraden g_{23} und l_{23},
k_{21} " " g_{13} und l_{13},
k_{31} " " g_{12} und l_{12} trifft,

so wie, dass die drei Ebenen

$[k_{11}g_{23}]$ $[k_{21}g_{13}]$ $[k_{31}g_{12}]$ sich in einer Geraden m_1,
$[k_{11}l_{23}]$ $[k_{21}l_{13}]$ $[k_{31}l_{12}]$ " " " " n_1

schneiden, und dass die sechs Geraden

$$l_1 \quad m_1 \quad n_1 \quad k_{11} \quad k_{21} \quad k_{31}$$

ganz auf der kubischen Fläche liegen; ähnliches gilt für l_2 und l_3; von diesen zu den ersten neun Geraden hinzutretenden 18 neuen Geraden müssen, da eine der drei Geraden l_1 l_2 l_3 immer reell ist, sechs nothwendig reell, die übrigen zwölf können imaginär sein. Die kubische Fläche enthält also bei dieser Construction entweder 27 reelle Gerade oder 15 reelle und zwölf imaginäre Gerade.

Die zweite Erzeugungsweise ist der in 3. ausgeführten analog und lautet so:

Es sind gegeben zwei beliebige im Raum sich nicht begegnende Gerade $a_1\, a_2$ und ein Punkt $\mathfrak{P}$ sowie zwei beliebige Ebenen $\alpha_1\, \alpha_2$; um einen festen Punkt $\mathfrak{B}$ dreht sich ein veränderlicher Strahl x, der ein Strahlenbündel beschreibt; wir bestimmen die Durchschnittspunkte

$$(x\alpha_1) = \mathfrak{x}_1, \ (x\alpha_2) = \mathfrak{x}_2$$

und die Verbindungsebene $[x\mathfrak{P}] = \xi$; die ersteren werden mit den festen Axen $a_1\, a_2$ durch Ebenen verbunden, dann beschreibt der Durchschnittspunkt je dreier entsprechenden Ebenen

$$([a_1\mathfrak{x}_1]\,[a_2\mathfrak{x}_2]\,\xi) = \mathfrak{x}$$

eine kubische Fläche $F^{(3)}$.

Dieselbe enthält die beiden Geraden a_1 und a_2 und die Verbindungslinie $|\mathfrak{B}\mathfrak{P}| = a_3$ ganz; bezeichnen wir ferner die Durchschnittspunkte

$$(a_3\alpha_1) = \mathfrak{a}_1, \ (a_3\alpha_2) = \mathfrak{a}_2, \quad (a_1\alpha_1) = \mathfrak{A}_1, \ (a_2\alpha_2) = \mathfrak{A}_2,$$
$$(|\mathfrak{B}\mathfrak{A}_1|\,\alpha_2) = \mathfrak{p}_2, \ (|\mathfrak{B}\mathfrak{A}_2|\,\alpha_1) = \mathfrak{p}_1,$$

so gehören auch die drei Geraden

$$|[a_2\mathfrak{p}_2]\,[a_3\mathfrak{A}_1]| = g_1, \quad |[a_1\mathfrak{p}_1]\,[a_3\mathfrak{A}_2]| = g_2, \quad |[a_1\mathfrak{a}_1]\,[a_2\mathfrak{a}_2]| = g_3$$

ganz der kubischen Fläche an; ebenso auch die drei Schnittlinien

$$|[a_2g_3]\,[a_3g_2]| = l_1, \quad |[a_3g_1]\,[a_1g_3]| = l_2, \quad |[a_1g_2]\,[a_2g_1]| = l_3,$$

und die bisherigen neun Geraden der kubischen Fläche bilden die *Steiner*schen Trieder:

a_1	l_3	g_2
g_3	a_2	l_1
l_2	g_1	a_3,

indem immer je drei in einer Horizontal- und je drei in einer Verticalreihe stehende Gerade in einer Ebene liegen.

Da es ferner ersichtlich ist, dass sowohl die Schnittlinie

$$|\alpha_1\alpha_2| = s$$

als auch die Schnittlinie

$$|[\mathfrak{B}a_1]\,[\mathfrak{B}a_2]| = k$$

auf der kubischen Fläche liegen, so folgen drei neue Gerade derselben

$$|[ka_1]\,[sl_1]| = s_1, \quad |[ka_2]\,[sl_2]| = s_2, \quad |[ka_3]\,[sl_3]| = s_3,$$

und es schneiden sich die drei Ebenen

$$[s_1g_1] \quad [s_2g_2] \quad [s_3g_3]$$

in einer Geraden g, welche ebenfalls der kubischen Fläche angehört, so

dass sich die 15 reellen Geraden derselben

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad g_1 \quad g_2 \quad g_3 \quad l_1 \quad l_2 \quad l_3 \quad s_1 \quad s_2 \quad s_3 \quad k \quad s \quad g$$

in folgende 15 Ebenen zu je dreien vertheilen:

$$\begin{array}{cccccc} a_1 g_2 l_3 & a_2 g_1 l_3 & a_3 g_1 l_2 & k a_1 s_1 & s l_1 s_1 \ (=a_2) & g s_1 g_1 \\ a_1 g_3 l_2 & a_2 g_3 l_1 & a_3 g_2 l_1 & k a_2 s_2 & s l_2 s_2 \ (=a_1) & g s_2 g_2 \\ & & & k a_3 s_3 & s l_3 s_3 & g s_3 g_3. \end{array}$$

Die übrigen zwölf Geraden der kubischen Fläche erhalten wir, indem wir die beiden, entweder reellen oder imaginären Geraden $i_1\, i_2$ aufsuchen, welche gleichzeitig die vier im Raume sich nicht begegnenden Geraden

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad s$$

treffen; von den acht Ebenen, deren jede i_1 oder i_2 mit einer dieser vier Geraden verbindet, schneidet jede die kubische Fläche noch in einer dritten Geraden, nämlich

$$\begin{array}{lcccccccc} & [a_1 i_1], & [a_2 i_1], & [a_3 i_1], & [s i_1], & [a_1 i_2], & [a_2 i_2], & [a_3 i_2], & [s i_2] \\ \text{bez. in} & a_1^1, & a_2^1, & a_3^1, & s^1, & a_1^2, & a_2^2, & a_3^2, & s^2, \end{array}$$

und da die vier Geraden $a_1^1\, a_2^1\, a_3^1\, s^1$ gleichzeitig von i_1 geschnitten werden, so müssen sie noch von einer zweiten Geraden h_1 getroffen werden, ebenso die Geraden $a_1^2\, a_2^2\, a_3^2\, s^2$ ausser von i_2 noch von einer zweiten Geraden h_2; wir erhalten also die zwölf letzten Geraden der kubischen Fläche, welche sich in folgender Art zu einer *Schlaefli*schen Doppelsechs gruppiren:

$$\begin{Bmatrix} i_1 & h_1 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & s^2 \\ i_2 & h_2 & a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & s^1 \end{Bmatrix}$$

und entweder alle reell oder alle imaginär sind.

Breslau, 29. Februar 1884.

Zur Theorie der Thetafunctionen mehrerer Argumente.

(Von Herrn *F. Caspary.*)

Herr *Weierstrass* hat Seite 506 der Sitzungsberichte der Berliner Akademie vom Jahre 1882 ein für die σ-Function fundamentales Theorem aufgestellt und dabei die wichtige Bemerkung gemacht, dass ein Beweis desselben aus dem Verschwinden einer *Pfaff*schen Determinante abgeleitet werden könne. Diese Determinante erweist sich als Specialfall einer allgemeineren, welche, wie unmittelbar ersichtlich, ebenfalls identisch verschwindet. Daraus ergiebt sich ein dem *Weierstrass*schen Theorem analoges, welches ich nebst einigen daraus zu ziehenden Folgerungen, mitzutheilen mir erlauben will*).

Bezeichnet man, wie in meiner früheren Arbeit (dieser Band, S. 182), die ϱ-fach unendliche Summe

$$\sum_{m_1, m_2, \dots m_\varrho} e^{i\pi \sum\limits_{\alpha,\beta} \tau_{\alpha\beta}(m_\alpha + \frac{1}{2}g_\alpha)(m_\beta + \frac{1}{2}g_\beta) + 2i\pi \sum\limits_\alpha (v_\alpha + \frac{1}{2}g'_\alpha)(m_\alpha + \frac{1}{2}g_\alpha)}$$
$$(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots \varrho;\ m_\gamma = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \text{ in inf.})$$

mit $\Theta(v;\ \tau)$, und bedeuten $u^{(p)}$ und $v^{(q)}$ zwei Systeme von je ϱ Argumenten $u_\alpha^{(p)}$ und $v_\alpha^{(q)}$, so wird

$$\Theta(u^{(p)} + v^{(q)};\ \tau)\,\Theta(u^{(p)} - v^{(q)};\ \tau) = \sum_k A_{kp} B_{kq} = C_{pq} \qquad \binom{k = 1, 2, \dots r}{r = 2^\varrho},$$

wobei

$$A_{kp} = \vartheta\genfrac{}{}{0pt}{}{\lambda_1^{(k)},\ \lambda_2^{(k)},\ \dots\ \lambda_\varrho^{(k)}}{0,\quad\ 0,\quad\ \dots\quad 0}(2u^{(p)};\ 2\tau),$$

$$B_{kq} = (-1)^{\sum\limits_\alpha \lambda_\alpha^{(k)} g'_\alpha}\, \vartheta\genfrac{}{}{0pt}{}{\lambda_1^{(k)} + g_1,\ \lambda_2^{(k)} + g_2,\ \dots\ \lambda_\varrho^{(k)} + g_\varrho}{0,\qquad\quad 0,\qquad\quad \dots\qquad 0}(2v^{(q)};\ 2\tau)$$

*) Die vorliegende Notiz ist bereits Ende Januar d. J. der Redaction eingereicht worden. Inzwischen ist im zweiten Hefte dieses Bandes S. 100 die Arbeit des Herrn *Frobenius* „Ueber Thetafunctionen mehrerer Variabeln" erschienen, in welcher die hier entwickelten Resultate durch wesentlich andere Betrachtungen gewonnen werden. (April 1884.)

ist und die $\lambda_\alpha^{(k)}$ unabhängig von einander nur die Werthe 0 und 1 annehmen. Legt man nun den Indices p, q die Werthe $h_1, h_2, \dots h_s$ bei, wo $s > r$ sein möge, so wird nach dem Multiplications-Satze der Determinanten

$$|C_{pq}| = 0,$$

und daher folgt das Theorem:

Bedeutet Θ eine ganz beliebige Thetafunction von ϱ Argumenten und ist $s > 2^\varrho$, so verschwindet die Determinante

$$|\Theta(u^{(p)}+v^{(q)};\ \tau)\,\Theta(u^{(p)}-v^{(q)};\ \tau)| \qquad (p, q = h_1, h_2, \dots h_s)$$

identisch.

Ist $v^{(q)} = u^{(q)}$ und Θ eine beliebige ***ungerade*** Thetafunction, so wird $C_{pq} = -C_{qp}$ und daher $C_{pp} = 0$. Die unter diesen Bedingungen gebildeten Determinanten reduciren sich aber für eine ungerade Ordnung auf Null, weil die einzelnen Terme sich gegenseitig aufheben, während sie für eine gerade Ordnung, wie Herr ***Cayley*** (dieses Journal Bd. 38, S. 95) gezeigt hat, gleich einem vollen Quadrate werden, und zwar von einem Ausdrucke $W(h_1, h_2, \dots h_s)$, dessen Zusammensetzung aus Producten von Thetafunctionen das ***Jacobi - Weierstrass***sche Bildungsgesetz unmittelbar ergiebt. (Vgl. S. 183 dieses Bandes.) Daher ist stets

$$W(h_1, h_2, \dots h_s) = 0.$$

In dem einfachsten und deshalb wichtigsten Falle, weil auf ihn, vermöge einer bekannten*) Recursionsformel, sich alle anderen zurückführen lassen, nämlich wenn $s = r+2$ ist, folgt

$$W(h_1, h_2, \dots h_{r+2}) = 0,$$

und dies ist, wenn man zu der σ-Function übergeht und für $h_1, h_2, \dots h_{r+2}$ bez. die Zahlen $0, 1, \dots r+1$ setzt, genau das ***Weierstrass***sche Theorem.

Für $s = r$ wird, wie ich S. 183 dieses Bandes gezeigt habe,

$$W(h_1, h_2, \dots h_r) = |A_{mp}| = |B_{mq}| \qquad \left(\begin{smallmatrix} m = 1, 2, \dots r \\ p, q = h_1, h_2, \dots h_r \end{smallmatrix}\right),$$

und diese Gleichung gestattet, ***jede Determinanten-Identität in eine Relation zwischen Thetafunctionen umzusetzen.***

Aus dieser Bemerkung lassen sich mannigfache Folgerungen ziehen, deren eine, nämlich die Ableitung des ***Weierstrass***schen Theorems aus gewissen ***Kronecker***schen Identitäten den Inhalt meiner o. a. Arbeit bildet. Aber noch eine zweite Folgerung werde erwähnt, zu der die letzte Glei-

*) Vgl. *Baltzer.* Determinanten. V. Aufl. S. 46.

chung Veranlassung giebt. Da nämlich auf ihrer rechten Seite in der Determinante $|A_{mp}|$ die Grössen g_α und g'_α nicht vorkommen, muss auch der Werth der linken Seite von diesen Elementen der Charakteristik unabhängig sein. Daraus folgt:

Der Ausdruck $W(0, 1, \dots r-1)$ hat, abgesehen vom Vorzeichen, für alle $2^{\varrho-1}(2^\varrho-1)$ ungeraden Thetafunctionen den nämlichen Werth.

Da es für $\varrho = 1$ nur *eine* ungerade Thetafunction giebt, ist $\varrho = 2$ der einfachste hier in Betracht kommende Fall. Für diesen liefert der vorige Satz, wenn man

$$G = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g'_1 & g'_2 \end{pmatrix}$$

und

$$\left.\begin{aligned} &\vartheta[G](u^{(0)}+u^{(1)})\vartheta[G](u^{(0)}-u^{(1)})\vartheta[G](u^{(2)}+u^{(3)})\vartheta[G](u^{(2)}-u^{(3)}) \\ +&\vartheta[G](u^{(0)}+u^{(2)})\vartheta[G](u^{(0)}-u^{(2)})\vartheta[G](u^{(3)}+u^{(1)})\vartheta[G](u^{(3)}-u^{(1)}) \\ +&\vartheta[G](u^{(0)}+u^{(3)})\vartheta[G](u^{(0)}-u^{(3)})\vartheta[G](u^{(1)}+u^{(2)})\vartheta[G](u^{(1)}-u^{(2)}) \end{aligned}\right\} = W^{g_1\, g_2}_{g'_1\, g'_2}$$

setzt, nach gehöriger Bestimmung der Vorzeichen das folgende Gleichungssystem

$$W^{10}_{10} = -W^{01}_{01} = W^{11}_{01} = -W^{10}_{11} = W^{01}_{11} = -W^{11}_{10}.$$

Mit wachsendem ϱ compliciren sich die Ausdrücke W recht erheblich; es ist daher bemerkenswerth, dass eine andere Verallgemeinerung des zuletzt angegebenen Gleichungssystems existirt, die ich nächstens mittheilen will, und die deshalb so einfache Resultate für die ungeraden Thetafunctionen liefert, weil für jeden Werth von ϱ nur *vier* Systeme von ϱ Argumenten auftreten.

Berlin, den 22. Januar 1884.

Sur la formation des déterminants irréguliers.

(Par M. *Joseph Perott* à Port-Navalo.)

Second Mémoire.

Nous avons déjà exposé, dans notre précédent travail*), une méthode pour former des déterminants ayant des exposants d'irrégularité divisibles par un nombre premier p donné à l'avance. Mais, quoique tous les déterminants irréguliers soient susceptibles d'être formés par notre méthode, l'existence de ces déterminants pour toute valeur première de p ne résulte nullement de notre procédé qu'on peut employer à les former, ***s'ils existent.*** C'est à combler cette lacune que sera consacré le présent travail, où nous nous bornerons cependant aux déterminants positifs non-carrés, pour ne pas surcharger les énoncés. Nous aurons, peut-être, l'occasion de revenir sur les déterminants négatifs.

1.

On sait**) que D et d étant deux déterminants en rapport carré entre eux et tels que $\frac{D}{d}$ soit égal au carré d'un nombre premier impair q, le rapport des nombres des classes proprement primitives de ces deux déterminants est égal au nombre des classes différentes représentées par les formes

$$(1,\ 0,\ -D),\quad (q^2,\ \varkappa q,\ \varkappa^2-d)$$

où selon qu'on a $\left(\frac{d}{q}\right)=-1$, $d\equiv 0 \pmod{q}$ ou $\left(\frac{d}{q}\right)=1$, $\varkappa$ doit parcourir soit toutes les valeurs depuis 0 jusqu'à $q-1$, soit toutes les valeurs depuis 1 jusqu'à $q-1$, soit enfin toutes celles des valeurs $0, 1, 2, 3, \ldots q-1$ qui ne satisfont pas à la congruence $x^2\equiv d \pmod{q}$. Ces formes seront, par conséquent, au nombre de $q-\left(\frac{d}{q}\right)$, où $\left(\frac{d}{q}\right)$ est le symbole de Legendre qu'il faudra remplacer par 0 quand d est divisible par q.

*) Ce Journal, tome 95, p. 232—236.

**) *Gauss, Disquisitiones arithmeticae*, art. 256, V.

2.

On voit par ce qui précède l'intérêt qui s'attache à l'étude du *complexe* de formes que nous venons de définir et que nous désignerons par Ω. On s'assure immédiatement qu'en composant*) deux formes du complexe soit différentes soit identiques, on obtient toujours une forme du complexe, que l'ordre de composition de deux ou d'un plus grand nombre de formes est indifférent et qu'enfin les égalités symboliques

$$FF'' = F''', \quad F'F'' = F'''$$

entraînent nécessairement la suivante

$$F = F',$$

où F, F', F'', F''' désignent des formes du complexe. Bref, les formes que nous considérons, constituent un groupe**).

Cela étant accordé, nous allons faire voir que le groupe Ω est ***monobase***, c'est-à-dire que tous ses éléments sont susceptibles d'être représentés par des puissances d'une seule base ou racine primitive. Nous pouvons supposer dans la démonstration qui va suivre que q ne divise pas d; dans le cas contraire l'ordre du groupe est un nombre premier et le théorème est évident. Considérons donc l'égalité symbolique

$$x^t = 1,$$

où x désigne une forme du groupe Ω, 1 la forme principale et t un nombre premier quelconque; il ne pourra jamais y avoir plus de t racines satisfaisant à cette égalité. Soit d'abord $t = 2$: l'égalité $x^2 = 1$ admet la racine $x = 1$. Pour qu'une autre forme du groupe $(q^2, \varkappa_1 q, \varkappa_1^2 - d)$ ait pour carré l'unité, il faut et il suffit que le plus grand commun diviseur de q^2 et de $2\varkappa_1 q$ soit égal à q^2, ce qui n'aura lieu que pour $\varkappa_1 = 0$. Il s'ensuit que l'égalité proposée ne peut admettre plus de deux racines. Soit maintenant $t = 3$: l'égalité $x^3 = 1$ admettra encore la principale pour racine; s'il existe une autre forme du groupe $x_1 = (q^2, \varkappa_1 q, \varkappa_1^2 - d)$ ayant pour cube l'unité, on aura d'abord

*) Nous voulons parler de la méthode de composition enseignée dans l'article 243 des *Disquisitiones arithmeticae*, en supposant toutefois qu'on aura soin toujours de réduire le second coefficient de la forme composée à sa moindre valeur non négative. Le procédé est ainsi parfaitement déterminé.

**) Nous entendons par un groupe un complexe d'éléments tel qu'il se trouve défini dans le § 1 du mémoire de M. *Kronecker*. *(Monatsber. der Berl. Acad. vom 1. Dec. 1870.)*



$$x_1^2 = (q^2,\ \varkappa_2 q,\ \varkappa_2^2 - d) \quad \text{où} \quad \varkappa_2 \equiv \frac{d+\varkappa_1^2}{2\varkappa_1} \pmod{q};$$

car il est évident que $\varkappa_1 > 0$. La composition de x_1^2 avec x_1 doit nous donner la principale, ce qui exige que le plus grand commun diviseur de q^2 et de

$$q\left(\frac{d+\varkappa_1^2}{2\varkappa_1} + \varkappa_1\right) = q\frac{d+3\varkappa_1^2}{2\varkappa_1}$$

soit égal*) à q^2, c'est-à-dire que l'on ait

$$d + 3\varkappa_1^2 \equiv 0 \pmod{q}.$$

Inversement, si pour une valeur admissible**) de $\varkappa_1$ on a

$$d + 3\varkappa_1^2 \equiv 0 \pmod{q},$$

la forme

$$(q^2,\ \varkappa_1 q,\ \varkappa_1^2 - d)$$

aura pour cube l'unité.

Nous allons maintenant définir deux suites de polynômes par les formules suivantes

$$\begin{aligned}
\psi_3(\varkappa_1) &= 3\varkappa_1 d + \varkappa_1^3,\\
\varphi_3(\varkappa_1) &= d + 3\varkappa_1^2,\\
\psi_{s+2}(\varkappa_1) &= 2\varkappa_1 d\varphi_s(\varkappa_1) + (d+\varkappa_1^2)\psi_s(\varkappa_1),\\
\varphi_{s+2}(\varkappa_1) &= 2\varkappa_1\psi_s(\varkappa_1) + (d+\varkappa_1^2)\varphi_s(\varkappa_1).
\end{aligned}$$

Ces polynômes qui se trouvent ainsi définis pour toute valeur impaire de s supérieure à l'unité, possèdent plusieurs propriétés remarquables dont voici quelques-unes.

I. Les polynômes $\psi_s(\varkappa_1)$ et $\varphi_s(\varkappa_1)$ sont homogènes et de degrés s et $s-1$ respectivement, si l'on considère d comme étant de l'ordre deux par rapport à $\varkappa_1$. Il s'ensuit que $\psi_s(\varkappa_1)$ est toujours divisible par $\varkappa_1$; l'induction montre immédiatement que $\varphi_s(\varkappa_1)$ a $d^{\frac{s-1}{2}}$ pour terme indépendant de $\varkappa_1$.

---

*) Disons une fois pour toutes que nous désignons ici, pour abréger, par $\frac{d+\varkappa_1^2}{2\varkappa_1}$ l'expression $\frac{d+\varkappa_1^2}{2\varkappa_1} \pmod{q}$. Pour qu'une telle expression soit divisible par q, il faut et il suffit que son numérateur le soit; car nous ne considérerons que des fractions ayant des dénominateurs non congrus à zéro. La même remarque s'applique aux expressions semblables qu'on verra plus loin.

**) Voyez la définition de ces valeurs dans le § 1. Du reste, toutes les fois que le nombre $\varkappa_1$ proviendra d'une forme

$$(q^2,\ \varkappa_1 q,\ \varkappa_1^2 - d)$$

nous supposerons qu'il ait une valeur admissible.

II. Deux polynômes $\psi_s(\varkappa_1)$ et $\varphi_s(\varkappa_1)$ ne peuvent devenir congrus à zéro pour une même valeur ***admissible*** de $\varkappa_1$. En effet, cette propriété ayant lieu pour $s=3$, il suffit de faire voir que si elle a lieu pour s, elle aura aussi lieu pour $s+2$, pour que la proposition soit démontrée d'une manière générale. Supposons donc que les polynômes $\psi_s(\varkappa_1)$ et $\varphi_s(\varkappa_1)$ ne puissent devenir congrus à zéro pour une même valeur admissible de $\varkappa_1$; s'il existe une valeur de $\varkappa_1$ rendant congrus à zéro en même temps les polynômes $\psi_{s+2}(\varkappa_1)$ et $\varphi_{s+2}(\varkappa_1)$, la même chose aura lieu pour les polynômes

$$(d-\varkappa_1^2)^2\psi_s(\varkappa_1),\quad (d-\varkappa_1^2)^2\varphi_s(\varkappa_1),$$

qui en sont des combinaisons linéaires homogènes, et par conséquent aussi pour les polynômes $\psi_s(\varkappa_1)$ et $\varphi_s(\varkappa_1)$, contrairement à notre supposition. ***Donc, etc.***

Cherchons maintenant la condition pour qu'une forme du groupe Ω puisse appartenir à un exposant impair s supérieur à l'unité. Le cas de $s=3$ ayant été déjà considéré on peut supposer que s surpasse 3.

Soit donc

$$x_1 = (q^2,\ \varkappa_1 q,\ \varkappa_1^2-d)$$

une forme éventuelle du groupe Ω appartenant à l'exposant s. On aura en premier lieu

$$x_1^3 = (q^2,\ \varkappa_3 q,\ \varkappa_3^2-d)\quad \text{où}\quad \varkappa_3 \equiv \frac{\psi_3(\varkappa_1)}{\varphi_3(\varkappa_1)}\quad (\text{mod. } q),$$

car il est évident que x_1^3 ne peut donner la principale. Pour former la cinquième puissance de x_1, on n'a qu'à composer x_1^3 avec

$$x_1^2 = (q^2,\ \varkappa_2 q,\ \varkappa_2^2-d)\quad \text{où}\quad \varkappa_2 \equiv \frac{d+\varkappa_1^2}{2\varkappa_1}\quad (\text{mod. } q).$$

Si le plus grand commun diviseur de q^2 et de

$$q\left(\frac{\psi_3(\varkappa_1)}{\varphi_3(\varkappa_1)} + \frac{d+\varkappa_1^2}{2\varkappa_1}\right) = q\,\frac{\varphi_5(\varkappa_1)}{2\varkappa_1\,\varphi_3(\varkappa_1)}$$

est égal à q^2, c'est-à-dire si l'on a

$$\varphi_5(\varkappa_1) \equiv 0\quad (\text{mod. } q),$$

la forme x_1 aura pour cinquième puissance l'unité*); dans le cas contraire on aura

$$x_1^5 = (q^2,\ \varkappa_5 q,\ \varkappa_5^2-d)\quad \text{où}\quad \varkappa_5 \equiv \frac{\psi_5(\varkappa_1)}{\varphi_5(\varkappa_1)}\quad (\text{mod. } q).$$

*) Ce qui ne peut avoir lieu que quand on a $s=5$.

En continuant ainsi de proche en proche on formera

$$x_1^{s-2} = (q^2,\ \varkappa_{s-2}q,\ \varkappa_{s-2}^2 - d) \quad \text{où} \quad \varkappa_{s-2} \equiv \frac{\psi_{s-2}(\varkappa_1)}{\varphi_{s-2}(\varkappa_1)} \quad (\text{mod. } q).$$

La marche du calcul nous fait voir que ni $\varphi_{s-2}(\varkappa_1)$ ni aucun des dénominateurs antérieurs ne peuvent être congrus à zéro; sans cela x_1 appartiendrait à une puissance inférieure à s. Cela étant ainsi, on voit que pour que x_1 appartienne à l'exposant s, il faut que le plus grand commun diviseur de q^2 et de

$$q\left(\frac{\psi_{s-2}(\varkappa_1)}{\varphi_{s-2}(\varkappa_1)} + \frac{d+\varkappa_1^2}{2\varkappa_1}\right) = q\,\frac{\varphi_s(\varkappa_1)}{2\varkappa_1\,\varphi_{s-2}(\varkappa_1)}$$

soit égal à q^2, c.-à-d. qu'on ait

$$\varphi_s(\varkappa_1) \equiv 0 \quad (\text{mod. } q).$$

Revenons maintenant à l'égalité

$$x^t = 1.$$

Les racines de cette égalité se composent de la principale et des formes appartenant à l'exposant t. Il s'ensuit immédiatement, eu égard aux développements précédents, que le nombre des racines de la proposée ne peut surpasser t, ce qui est la condition nécessaire et suffisante pour que le groupe Ω soit monobase.

3.

Profitons du point acquis et représentons les formes du groupe Ω par des puissances successives d'une racine primitive

$$g,\quad g^2,\quad g^3,\quad \ldots\quad g^{q-\left(\frac{d}{q}\right)},$$

où le dernier terme peut être remplacé par l'unité et même par g^0, manière d'écrire facile à justifier: car la forme g^0 composée avec une forme du groupe donne cette forme même, propriété caractéristique de la principale. Si toutes les formes du groupe Ω appartiennent à des classes différentes, le nombre des classes représentées par le groupe sera égal à $q-\left(\frac{d}{q}\right)$. Si au contraire le groupe contient des formes équivalentes, soient g^h, $g^\varkappa$ deux formes équivalentes quelconques du groupe; nous écrirons

$$g^h \backsim g^\varkappa$$

et par suite; en supposant $h > \varkappa$

$$g^{h-\varkappa} \backsim g^0 \backsim 1 \quad \text{où} \quad h-\varkappa < q-\left(\frac{d}{q}\right).$$

Soit donc t le plus petit nombre positif tel que l'équivalence

$$g^t \sim 1$$

ait lieu, nous dirons que la classe g appartient à l'exposant t.

On voit que si le groupe Ω ne contient que des formes appartenant à des classes différentes, on a $t = q - \left(\frac{d}{q}\right)$ et dans le cas contraire on a $t < q - \left(\frac{d}{q}\right)$. On aura, en général, en désignant par h et m des nombres non négatifs

$$g^{ht+m} \sim (g^t)^h . g^m \sim g^m.$$

Inversement, l'équivalence

$$g^m \sim g^n$$

entraîne comme conséquence nécessaire la congruence

$$m \equiv n \qquad (\text{mod. } q).$$

En effet, en divisant m et n par t et en désignant par $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ et μ, ν les quotients et les restes*) respectivement, on aura

$$g^{\mathfrak{m}t+\mu} \sim g^{\mathfrak{n}t+\nu}$$

et par suite

$$g^{\mu} \sim g^{\nu},$$

donc, puisque μ et ν sont inférieurs à t

$$\mu = \nu$$

et

$$m \equiv n \quad (\text{mod. } t).$$

En particulier, on a, à cause de

$$g^{q-\left(\frac{d}{q}\right)} \sim 1 \sim g^0, \quad q - \left(\frac{d}{q}\right) \equiv 0 \quad (\text{mod. } t).$$

Nous pouvons, par conséquent, former le tableau suivant

$$\begin{array}{lllll}
1, & g^t, & g^{2t}, & \ldots & g^{(s-1)t} \\
g, & g^{t+1}, & g^{2t+1}, & \ldots & g^{(s-1)t+1} \\
g^2, & g^{t+2}, & g^{2t+2}, & \ldots & g^{(s-1)t+2} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
g^{t-1}, & g^{2t-1}, & g^{3t-1} & \ldots & g^{st-1},
\end{array}$$

où nous avons posé $\dfrac{q-\left(\frac{d}{q}\right)}{t} = s.$

*) Voici les expressions des quantités que nous désignons par $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, μ, ν

$$E\left(\frac{m}{t}\right) = \mathfrak{m}, \qquad E\left(\frac{n}{t}\right) = \mathfrak{n},$$

$$m - tE\left(\frac{m}{t}\right) = \mu, \quad n - tE\left(\frac{n}{t}\right) = \nu.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que deux éléments de ce tableau appartiennent à une même classe, est qu'ils se trouvent dans une même ligne horizontale. On voit que le nombre des classes représentées par les formes du groupe Ω, est égal à t, et que toutes ces classes peuvent être représentées, en particulier, par les formes

$$1,\ g^1,\ g^2,\ \ldots\ g^{t-1}.$$

Quant au nombre t, il apparaît sous deux aspects différents, soit comme l'exposant auquel appartient la classe g, soit comme le quotient toujours entier de $q-\left(\frac{d}{q}\right)$ par le nombre des formes du groupe Ω qui sont équivalentes à la principale.

4.

Il importe de rechercher les conditions pour que la forme principale soit équivalente à une forme*) du type

$$(q^2,\ \varkappa q,\ \varkappa^2-d).$$

Cette équivalence entraînerait par sa définition même l'existence de cinq entiers α, β, γ, δ, $\varkappa$ satisfaisant aux équations et à l'inégalité suivantes

$$\begin{aligned} \alpha^2-dq^2\gamma^2 &= q^2, \\ \alpha\beta-dq^2\gamma\delta &= \varkappa q, \qquad (0 \leqq \varkappa < q) \\ \alpha\delta-\beta\gamma &= 1. \end{aligned}$$

La première des équations précédentes nous fait voir que α doit être divisible par q. Posons donc

$$\alpha = qa,$$

nous aurons, après quelques réductions,

$$\begin{aligned} &(\text{I.}) & a^2-d\gamma^2 &= 1, \\ &(\text{II.}) & 0 \leqq a\beta-dq\gamma\delta &= \varkappa < q, \\ &(\text{III.}) & qa\delta-\beta\gamma &= 1. \end{aligned}$$

Résolvons d'abord l'équation (I.) par les méthodes connues, et soit a, γ une solution de cette équation, on aura, en résolvant les équations (II.) et (III.) par rapport à β et $q\delta$

$$\begin{aligned} &(A.) & \beta &= a\varkappa+d\gamma, \\ &(B.) & q\delta &= a+\varkappa\gamma. \end{aligned}$$

*) Il est inutile d'ajouter, peut-être, qu'il s'agit ici des formes du groupe Ω.

L'équation (*B.*) nous montre que γ ne doit pas être divisible par q, pour que δ soit entier; sans cela l'équation (*B.*) entraînerait aussi la divisibilité de a par q, et les nombres a, γ auraient un facteur commun, ce qui est impossible à cause de l'équation (I.). Désignons donc par a, γ une solution éventuelle de l'équation (I.) telle que γ ne soit pas divisible par q; on sait qu'il n'existe alors qu'une seule valeur de $\varkappa$ qui rende le second membre de l'équation (*B.*) divisible par q et qui satisfasse en même temps à l'inégalité (II.). Le nombre $\varkappa$ se trouvant ainsi parfaitement déterminé, les équations (*A.*) et (*B.*) nous donneront les valeurs correspondantes de β et de δ. Il est bon d'observer, à cette occasion, que si la substitution propre $\begin{vmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{vmatrix}$ transforme la forme principale en une forme $(q^2, \varkappa q, \varkappa^2-d)$, la substitution $\begin{vmatrix}-\alpha & -\beta \\ -\gamma & -\delta\end{vmatrix}$ conduira à la même forme. Si a est divisible par q, et par conséquent $\varkappa = 0$, il est évident que les substitutions $\begin{vmatrix}\alpha & -\beta \\ -\gamma & \delta\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}-\alpha & \beta \\ \gamma & -\delta\end{vmatrix}$ conduiront encore à la même forme $(q^2, 0, -d)$. Si, au contraire, $\varkappa > 0$, les substitutions $\begin{vmatrix}\pm\alpha & \pm\alpha\mp\beta \\ \mp\gamma & \mp\delta\pm\gamma\end{vmatrix}$, où les signes supérieurs ou inférieurs doivent être pris en même temps, transformeront la forme principale en la forme $(q^2, (q-\varkappa)q, (q-\varkappa)^2-d)$.

En résumé,

$$t = t_{\mathfrak{f}}, \quad u = u_{\mathfrak{f}}$$

étant une solution positive*) éventuelle de l'équation

$$t^2-du^2 = 1$$

telle que $u_{\mathfrak{f}}$ ne soit pas divisible par q, il n'existera qu'un seul et unique système d'entiers α, β, γ, δ, $\varkappa$ tel que la forme principale se transforme en une forme du type $(q^2, \varkappa q, \varkappa^2-d)$ par la substitution propre $\begin{vmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{vmatrix}$ où $\alpha = q t_{\mathfrak{f}}$, $\gamma = u_{\mathfrak{f}}$.

Nous désignerons la substitution précédente sous le nom de substitution attachée à la solution $t_{\mathfrak{f}}$, $u_{\mathfrak{f}}$. Nous dirons encore que la solution $t_{\mathfrak{f}}$, $u_{\mathfrak{f}}$ conduit à la forme $(q^2, \varkappa q, \varkappa^2-d)$.

---

*) Nous désignerons toujours par les lettres t, u munies d'un indice les solutions positives de l'équation

$$t^2-du^2 = 1$$

tandis que t, u sans indice indiqueront une solution quelconque.

5.

Il convient de dire quelques mots sur les solutions positives successives de l'équation

$$t^2 - du^2 = 1.$$

Ces solutions s'obtiennent, comme on sait, par la formule

$$(t_1+u_1\sqrt{d})^{\mathfrak{t}} = t_{\mathfrak{t}}+u_{\mathfrak{t}}\sqrt{d},$$

où t_1, u_1 est la plus petite d'entre elles*) et $\mathfrak{t}$ doit parcourir tous les nombres positifs depuis 1 jusqu'à l'infini. Nous allons faire voir qu'il existe toujours un nombre entier positif λ tel qu'on ait

$$u_\lambda \equiv 0 \pmod{q}$$

où q désigne, comme dans tout ce qui précède et dans tout ce qui suivra, un nombre premier impair. En effet, les solutions positives étant en nombre infini, il doit y avoir deux solutions $t_{\mathfrak{t}}$, $u_{\mathfrak{t}}$ et $t_{\mathfrak{l}}$, $u_{\mathfrak{l}}$ satisfaisant aux congruences

$$t_{\mathfrak{t}} \equiv t_{\mathfrak{l}}, \quad u_{\mathfrak{t}} \equiv u_{\mathfrak{l}} \pmod{q}$$

où l'on peut supposer $\mathfrak{l} > \mathfrak{t}$, et $u_{\mathfrak{t}}$ non divisible par q; sans cela on n'aurait qu'à faire $\lambda = \mathfrak{t}$. De même on peut admettre que q ne divise pas $t_{\mathfrak{t}}$, car dans le cas contraire on aurait

$$u_{2\mathfrak{t}} \equiv 2t_{\mathfrak{t}}u_{\mathfrak{t}} \equiv 0 \pmod{q}$$

et l'on ferait $\lambda = 2\mathfrak{t}$. Nous avons identiquement

$$(t_{\mathfrak{t}}+u_{\mathfrak{t}}\sqrt{d})(t_{\mathfrak{l}-\mathfrak{t}}+u_{\mathfrak{l}-\mathfrak{t}}\sqrt{d}) = t_{\mathfrak{l}}+u_{\mathfrak{l}}\sqrt{d}$$

d'où l'on tire

$$(1.) \qquad t_{\mathfrak{t}}t_{\mathfrak{l}-\mathfrak{t}}+u_{\mathfrak{t}}u_{\mathfrak{l}-\mathfrak{t}}d = t_{\mathfrak{l}} \equiv t_{\mathfrak{t}} \pmod{q},$$

$$(2.) \qquad t_{\mathfrak{t}}u_{\mathfrak{l}-\mathfrak{t}}+u_{\mathfrak{t}}t_{\mathfrak{l}-\mathfrak{t}} = u_{\mathfrak{l}} \equiv u_{\mathfrak{t}} \pmod{q},$$

d'où, en multipliant la première congruence par $t_{\mathfrak{t}}$ et la seconde par $du_{\mathfrak{t}}$ et en retranchant

$$t_{\mathfrak{l}-\mathfrak{t}} \equiv 1 \pmod{q}$$

et par suite, à cause de la congruence (2.),

$$u_{\mathfrak{l}-\mathfrak{t}} \equiv 0 \pmod{q}.$$

Donc on peut faire $\mathfrak{l}-\mathfrak{t} = \lambda$. L'existence d'un indice positif λ tel qu'on ait

*) Quant à la solution 1, 0 que nous ne considérons pas, du reste, comme une solution positive, nous la désignerons par t_0, u_0, car on a identiquement

$$(t_1+u_1\sqrt{d})^0 = 1+0.\sqrt{d}.$$

$$u_\lambda \equiv 0 \pmod{q}$$

étant démontrée, nous désignerons désormais par λ le plus petit de tous ceux qui jouissent de cette propriété. L'équation

$$t_\lambda^2 - du_\lambda^2 = 1$$

nous donne

$$t_\lambda^2 \equiv 1 \pmod{q}$$

et par suite

$$t_\lambda \equiv \pm 1 \pmod{q}.$$

Soit d'abord*)

$$t_\lambda \equiv 1 \pmod{q},$$

on aura immédiatement, à cause des formules

$$t_{m\lambda+\mathfrak{k}} + u_{m\lambda+\mathfrak{k}}\sqrt{d} = (t_1+u_1\sqrt{d})^{m\lambda+\mathfrak{k}} = (t_\mathfrak{k}+u_\mathfrak{k}\sqrt{d})(t_\lambda+u_\lambda\sqrt{d})^m,$$

qui ont lieu pour toutes les valeurs non négatives de m et de $\mathfrak{k}$,

$$t_{m\lambda+\mathfrak{k}} \equiv t_\mathfrak{k}, \quad u_{m\lambda+\mathfrak{k}} \equiv u_\mathfrak{k} \pmod{q}.$$

Inversement, les congruences

$$(\alpha.) \qquad t_\mathfrak{l} \equiv t_\mathfrak{k}, \quad u_\mathfrak{l} \equiv u_\mathfrak{k} \pmod{q}$$

où $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{l}$ sont des nombres non négatifs, entraînent la suivante

$$(\beta.) \qquad \mathfrak{l} \equiv \mathfrak{k} \pmod{\lambda}.$$

En effet, il est permis de réduire les indices des solutions qui figurent dans les congruences (α.), à leurs moindres résidus non négatifs (mod. λ); or ces résidus doivent être égaux, car sans cela λ ne serait plus le plus petit des nombres positifs qui rendent u_λ divisible par q. Donc il est évident qu'on aura

$$\mathfrak{l} \equiv \mathfrak{k} \pmod{\lambda}.$$

Soit maintenant**)

$$t_\lambda \equiv -1 \pmod{q},$$

on déduira par un calcul semblable au précédent les formules

$$t_{m\lambda+\mathfrak{k}} \equiv (-1)^m t_\mathfrak{k}, \quad u_{m\lambda+\mathfrak{k}} = (-1)^m u_\mathfrak{k} \pmod{q}.$$

Inversement, les congruences

$$t_\mathfrak{l} \equiv (-1)^h t_\mathfrak{k}, \quad u_\mathfrak{l} \equiv (-1)^h u_\mathfrak{k} \pmod{q}$$

---

*) Ce qui a lieu, par exemple, pour $d = 5$, $q = 19$; on a alors $\lambda = 3$ et $t_3 = 2889 \equiv 1 \pmod{19}$.

**) Ce qui a lieu, par exemple, pour $d = 5$, $q = 17$; on a alors $\lambda = 3$ et $t_3 = 2889 \equiv -1 \pmod{17}$.

entraîneront nécessairement les suivantes

$$\mathfrak{l} \equiv \mathfrak{t} \quad (\text{mod. } \lambda), \qquad \frac{\mathfrak{l}-\mathfrak{t}}{\lambda} \equiv h \quad (\text{mod. } 2).$$

Des considérations analogues montrent que dans le cas précédent, c'est-à-dire quand on a

$$t_\lambda \equiv 1 \quad (\text{mod. } q),$$

les congruences

$$t_\mathfrak{l} \equiv -t_\mathfrak{t}, \quad u_\mathfrak{l} \equiv -u_\mathfrak{t} \quad (\text{mod. } q)$$

ne peuvent avoir lieu en même temps.

6.

Nous dirons que deux solutions positives $t_\mathfrak{t}$, $u_\mathfrak{t}$ et $t_\mathfrak{l}$, $u_\mathfrak{l}$ de l'équation $t^2-du^2=1$ ayant leurs secondes indéterminées non divisibles par q, sont équivalentes *(metro*) q)* quand on aura en même temps soit

$$t_\mathfrak{l} \equiv t_\mathfrak{t}, \quad u_\mathfrak{l} \equiv u_\mathfrak{t} \quad (\text{mod. } q),$$

soit

$$t_\mathfrak{l} \equiv -t_\mathfrak{t}, \quad u_\mathfrak{l} \equiv -u_\mathfrak{t} \quad (\text{mod. } q).$$

Nous ferons correspondre, en outre, aux deux suppositions précédentes les désignations *d'équivalence propre et d'équivalence impropre.* Dans la question qui nous occupe en ce moment, il n'y a pas lieu de distinguer entre ces deux genres d'équivalence. Il s'agit de faire voir maintenant que deux solutions équivalentes conduisent toujours à la même forme

$$(q^2,\ \varkappa q,\ \varkappa^2-d).$$

En effet, soient $t_\mathfrak{t}$, $u_\mathfrak{t}$ et $t_\mathfrak{l}$, $u_\mathfrak{l}$ deux solutions positives équivalentes de l'équation $t^2-du^2=1$, et $\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}\alpha' & \beta'\\ \gamma' & \delta'\end{vmatrix}$ les substitutions qui leur sont attachées respectivement; nous aurons les équations et les inégalités suivantes

$$\begin{array}{lr}
(\text{I.}) & t_\mathfrak{t}^2-du_\mathfrak{t}^2 = 1,\\
(\text{II.}) & 0<t_\mathfrak{t}\beta-dqu_\mathfrak{t}\delta = \varkappa < q,\\
(\text{III.}) & qt_\mathfrak{t}\delta-\beta u_\mathfrak{t} = 1,\\
(\text{I}'.) & t_\mathfrak{l}^2-du_\mathfrak{l}^2 = 1,\\
(\text{II}'.) & 0\leqq t_\mathfrak{l}\beta'-dqu_\mathfrak{l}\delta' = \varkappa' < q,\\
(\text{III}'.) & qt_\mathfrak{l}\delta'-\beta' u_\mathfrak{l} = 1.
\end{array}$$

Or les équations (III.) et (III'.) nous montrent tout d'abord qu'on a $\beta' \equiv \pm\beta$

*) Nous nous servons de cette manière abrégée d'écrire pour mettre en évidence le nombre q.

(mod. q), et par suite, à cause des équations (II.) et (II'.), $\varkappa \equiv \varkappa'$ (mod. q), donc

$$\varkappa = \varkappa',$$

ce qu'il fallait démontrer.

Cherchons inversement les conditions pour que deux solutions positives*) de l'équation $t^2 - du^2 = 1$ puissent conduire à une même forme. On aura dans ce cas, en gardant les notations précédentes, à cause des équations (II.) et (II'.),

$$t_{\mathfrak{k}}\beta \equiv t_1\beta' \pmod{q},$$

et à cause des équations (III.) et (III'.),

$$\beta u_{\mathfrak{k}} \equiv \beta' u_1 \pmod{q}$$

d'où l'on tire, en carrant les deux congruences précédentes et en retranchant le second résultat multiplié par d du premier, $\beta^2 \equiv \beta'^2$ (mod. q), donc

$$\beta \equiv \pm\beta' \pmod{q};$$

et par suite, comme β ne peut être divisible par q (équ. (III.)),

$$t_{\mathfrak{k}} \equiv \pm t_1, \quad u_{\mathfrak{k}} \equiv \pm u_1 \pmod{q},$$

les signes supérieurs ou inférieurs ayant lieu en même temps. Donc deux solutions positives équivalentes de l'équation $t^2 - du^2 = 1$ conduisent à une seule et même forme et deux solutions non équivalentes conduisent à des formes différentes.

7.

Nous allons faire voir maintenant que si une forme du type $(q^2, \varkappa q, \varkappa^2 - d)$ est proprement équivalente à la principale, il existe toujours une solution positive de l'équation $t^2 - du^2 = 1$ conduisant à la forme $(q^2, \varkappa q, \varkappa^2 - d)$.

Il résulte de ce qui a été dit dans le § 4 qu'il existe nécessairement une solution $t_{\mathfrak{k}}$, $u_{\mathfrak{k}}$ de l'équation $t^2 - du^2 = 1$ conduisant à une des deux formes**)

$$(q^2,\ \varkappa q,\ \varkappa^2 - d), \quad (q^2,\ (q-\varkappa)q,\ (q-\varkappa)^2 - d).$$

Nous pouvons supposer d'ailleurs $\mathfrak{k} < \lambda$, car deux solutions dont les

*) Nous ne voulons parler ici que de solutions ayant leurs secondes indéterminées non divisibles par q. Il est, peut-être, inutile d'avertir que de telles solutions n'existent pas toujours.

**) Il est inutile de considérer le cas où l'on a $\varkappa = 0$, car la proposition est alors évidente. Voyez le § 4.

indices ne diffèrent que par un multiple de λ, conduisent à une même forme. Pour établir la proposition que nous avons en vue, il suffit de montrer que dans le cas où la substitution $\begin{vmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{vmatrix}$ attachée à la solution t_t, u_t transforme la forme principale en la forme $(q^2, (q-\varkappa)q, (q-\varkappa)^2-d)$, la substitution $\begin{vmatrix}\alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta'\end{vmatrix}$ attachée à la solution $t_{\lambda-t}$, $u_{\lambda-t}$ la transformera en la forme $(q^2, \varkappa q, \varkappa^2-d)$.

En effet, soit $(q^2, \varkappa' q, \varkappa'^2-d)$ la forme à laquelle conduit la solution $t_{\lambda-t}$, $u_{\lambda-t}$. On aura d'abord

$$t_t t_{\lambda-t} + d u_t u_{\lambda-t} = t_\lambda \equiv \pm 1 \pmod{q},$$
$$t_t u_{\lambda-t} + t_{\lambda-t} u_t = u_\lambda \equiv 0 \pmod{q};$$

d'où l'on tire

$$t_{\lambda-t} \equiv \pm t_t, \quad u_{\lambda-t} \equiv \mp u_t \pmod{q},$$

les signes supérieurs ou inférieurs ayant lieu en même temps. En supposant écrites les équations analogues à l'équation (III.), on aura

$$\beta = \mp \beta' \pmod{q}$$

et par conséquent

$$t_t \beta \equiv -t_{\lambda-t} \beta' \pmod{q}$$

et à cause des équations analogues à l'équation (II.)

$$q-\varkappa \equiv -\varkappa' \pmod{q},$$

donc $\varkappa' = \varkappa$, ce qu'il fallait démontrer.

8.

Nous rangerons dans une même classe (*metro q*) toutes les solutions positives équivalentes de l'équation $t^2 - du^2 = 1$. Quand nous parlerons des solutions à termes non négatifs, la solution t_0, u_0 sera considérée comme constituant une classe à elle-seule. La substitution attachée à la solution t_0, u_0 sera la suivante $\begin{vmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{vmatrix}$ qui transforme la forme principale en elle-même. Cette substitution ne rentre pas dans le type de celles que nous avons étudiées et on voit qu'ici, comme dans beaucoup d'autres questions d'arithmétique, il faut adjoindre aux objets définis d'une certaine manière d'autres objets pris ailleurs pour que tous les objets réunis forment un groupe*). Ces definitions accordées, on obtient le résultat suivant:

*) Nous n'excluons pas, cependant, la possibilité d'une définition qui comprenne tous les objets du groupe.

Le rapport des nombres des classes proprement primitives des déterminants dq^2 et d, est égal à $q-\left(\frac{d}{q}\right)$ divisé par le nombre des classes des solutions à termes non négatifs (*metro* q) de l'équation $t^2-du^2=1$. Quant à ce dernier nombre, il est égal à λ que nous avons défini précédemment comme le moindre indice positif pour lequel $u\lambda$ est divisible par q. Cela étant ainsi, on a évidemment

$$T_1+U_1\sqrt{dq^2} = (t_1+\sqrt{d}\,u_1)^\lambda,$$

où T_1, U_1 est la plus petite solution positive de l'équation

$$T^2-dq^2U^2 = 1.$$

Le résultat que nous venons d'établir est bien connu *) et on le considère, en général, comme donnant la solution du problème sur la détermination du rapport des nombres des classes proprement primitives de deux déterminants ayant pour quotient un carré d'un nombre premier impair. Il est bon d'observer, cependant, que les tâtonnements auxquels on est obligé de recourir maintenant pour déterminer le nombre λ, sont tout à fait analogues à ceux qu'on pourrait employer à la fin du § 3. A partir de ce paragraphe, nous n'avons pas fait un seul pas *en avant*.

9.

Il n'est pas hors de propos, peut-être, de dire ici quelques mots sur un groupe qui, sans rentrer dans le type de celui que nous avons étudié précédemment, présente des propriétés analogues. Ce groupe que nous désignerons par Ψ se compose des formes suivantes

$$(1,\ 0,\ -D),\quad \left(4,\ 1,\ \frac{1-D}{4}\right),\quad \left(4,\ 3,\ \frac{9-D}{4}\right)$$

où D doit être évidemment de la forme $8n+5$. Le nombre des classes différentes représentées par le groupe Ψ est égal, comme on sait **), au rapport du nombre des classes proprement primitives de déterminant D, à

*) Nous nous rangeons volontiers à l'opinion de ceux qui croient que ce résultat était connu de *Gauss*. Comp. *Disquisitiones arithmeticae*, art. 256, VI; *Lejeune-Dirichlet, Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres*, art. 8 (ce Journal, t. 21); M. *Lipschitz, Einige Sätze aus der Theorie der quadratischen Formen* (ce Journal, t. 53); M. *Dedekind, Zahlentheorie*, No. 151; M. *Dedekind, Ueber die Anzahl der Ideal-Classen* § 10 (Festschrift zur Säkularfeier des Geburtstages von *Carl Friedrich Gauss*, Braunschweig 1877).

**) *Disquisitiones arithmeticae*, art. 256, VI.

celui des classes improprement primitives. Il est facile de justifier, à l'aide du procédé dont nous nous sommes servi au § 2, la dénomination de groupe que nous donnons au complexe de formes Ψ. Le groupe est évidemment monobase, car les deux formes non ambiguës sont des racines primitives. Désignons par g la forme $\left(4,\ 1,\ \frac{1-D}{4}\right)$, les trois formes du groupe seront

$$1,\quad g,\quad g^2.$$

Il s'ensuit immédiatement que les trois formes du groupe Ψ sont équivalentes ou appartiennent à des classes différentes. Le nombre des classes représentées par le groupe est, par conséquent, égal à un ou à trois, selon que la forme principale est équivalente à une forme non ambiguë du groupe ou qu'une telle équivalence est impossible. Cherchons donc la condition pour que la forme principale soit équivalente à une autre forme du groupe Ψ. Cette équivalence entraînerait nécessairement l'existence de cinq entiers $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varkappa$ tels qu'on ait

$$\begin{aligned}
&(\text{I.}) & \alpha^2 - D\gamma^2 &= 4,\\
&(\text{II.}) & \alpha\beta - D\gamma\delta &= 2+(-1)^\varkappa, \quad (0 < \varkappa < 3)\\
&(\text{III.}) & \alpha\delta - \beta\gamma &= 1.
\end{aligned}$$

L'équation (I.) exige que les nombres α, γ soient de même parité, et comme d'après l'équation (III.) ces nombres ne peuvent avoir de facteur commun, il s'ensuit que α et γ doivent être impairs. Inversement, *s'il existe* une solution impaire*) α, γ de l'équation**) $t^2 - Du^2 = 4$, il est toujours possible de trouver un système de valeurs de $\beta, \delta, \varkappa$ de manière que les équations et l'inégalité (I.), (II.), (III.) soient satisfaites. En effet, soit α, γ une solution impaire de l'équation $t^2 - Du^2 = 4$, on aura, en résolvant les équations (II.) et (III.) par rapport à β et δ,

$$(A.)\quad \beta = \frac{\{2+(-1)^\varkappa\}\alpha + D\gamma}{4},$$

$$(B.)\quad \delta = \frac{\alpha + \{2+(-1)^\varkappa\}\gamma}{4}.$$

En donnant à $\varkappa$ celle des valeurs 1, 2 qui rend entier le second membre

*) Nous disons, pour abréger, une solution impaire au lieu de dire une solution à termes impairs.

**) Une telle solution existe pour $D = 5,\ 13,\ 21,\ 29,\ 45,\ 53\ \ldots$ Elle n'existe pas pour $D = 37,\ 101,\ 141,\ 189,\ \ldots$ Voyez le tableau dressé par M. *Cayley* (ce Journal Bd. 53, p. 371).

de $(B.)$, le nombre β sera aussi entier, car on a pour toute valeur*) de x

$$\{2+(-1)^x\}\alpha+D\gamma \equiv \alpha+\{2+(-1)^x\}\gamma \pmod{4}.$$

Il s'ensuit que le groupe Ψ ne contient qu'une seule classe ou en contient trois, selon qu'il est possible de résoudre l'équation $t^2-Du^2=4$ en nombres impairs ou que cette possibilité n'a pas lieu**).

Il convient maintenant de dire quelques mots sur les solutions positives successives de l'équation $t^2-Du^2=4$.

Toutes ces solutions s'obtiennent, comme on sait***), par la formule

$$\frac{t_r+u_r\sqrt{D}}{2} = \left(\frac{t_1+u_1\sqrt{D}}{2}\right)^r$$

où t_1, u_1 est la plus petite d'entre elles. Il est facile de voir que si la solution t_1, u_1 est paire, toutes les autres solutions le seront aussi.

En effet, on a alors

$$\frac{t_r}{2}+\frac{u_r}{2}\sqrt{D} = \left(\frac{t_1}{2}+\frac{u_1}{2}\sqrt{D}\right)^r,$$

où $\frac{t_1}{2}$ et $\frac{u_1}{2}$ sont des nombres entiers, donc $\frac{t_r}{2}$ et $\frac{u_r}{2}$ seront aussi des entiers. Si, au contraire, la solution t_1, u_1 est impaire, formons d'abord la solution t_2, u_2; nous aurons

$$\frac{t_2+u_2\sqrt{D}}{2} = \left(\frac{t_1+u_1\sqrt{D}}{2}\right)^2$$

d'où

$$t_2 = \frac{t_1^2+u_1^2D}{2} \equiv 3 \pmod{4}, \qquad u_2 = t_1u_1 \equiv 1 \pmod{2}.$$

La solution t_2, u_2 sera, par conséquent, impaire. Passons, maintenant à la solution t_3, u_3; nous aurons

$$t_3 = t_1\frac{t_1^2+3u_1^2D}{4} \equiv 0, \qquad u_3 = u_1\frac{3t_1^2+u_1^2D}{4} \equiv 0 \pmod{2}.$$

Il s'ensuit que dans le cas où t_1, u_1 est une solution impaire, t_3, u_3 est la plus petite des solutions paires. Or il est évident que d'une solution paire de l'équation $t^2-Du^2=4$ on peut déduire par la division de ses deux termes par deux, une solution de l'équation

$$\tau^2-Dv^2 = 1,$$

---

*) Le déterminant D est, comme on l'a déjà signalé, de la forme $8n+5$.

**) Résultat bien connu d'ailleurs. Comp. les Nos 99 et 151 de la *Zahlentheorie* de M. *Dedekind.*

***) *Disquisitiones arithmeticae,* art. 200.

et qu'inversement d'une solution quelconque de l'équation $\tau^2 - Dv^2 = 1$, on peut toujours déduire par la multiplication de ses deux termes par deux, une solution paire de l'équation

$$t^2 - Du^2 = 4.$$

Il s'ensuit que la plus petite des solutions positives de l'équation $\tau^2 - Dv^2 = 1$ s'obtient en divisant par deux les deux termes de la plus petite des solutions positives paires de l'équation $t^2 - Du^2 = 4$. Cela revient à écrire, dans le cas où t_1, u_1 est une solution impaire, la formule bien connue*)

$$\tau_1 + v_1\sqrt{D} = \left(\frac{t_1 + u_1\sqrt{D}}{2}\right)^3$$

où τ_1, v_1 désigne la plus petite des solutions positives de l'équation $\tau^2 - Dv^2 = 1$.

Il est bon d'observer qu'il ne s'agit pas ici d'une identité algébrique, mais d'une égalité arithmétique qui n'a lieu que pour des valeurs de D possédant certaines propriétés arithmétiques. Il est donc de toute nécessité de prouver que de telles valeurs de D *existent*, ce qu'on fait, du reste, facilement à l'aide de la table de M. *Cayley*, comme nous l'avons déjà fait précédemment. Il n'est pas plus permis d'omettre cette démonstration qu'il n'est pas permis d'omettre la démonstration de la convergence d'une série dont on se sert.

10.

Passons maintenant à l'objet principal de notre travail. Nous nous proposons de définir une opération arithmétique telle qu'en l'exécutant sur un nombre premier impair**) p, on obtienne un déterminant $\triangle(p)$ ayant un exposant d'irrégularité divisible par p.

Soit p un nombre premier impair quelconque et t_1, u_1 la plus petite des solutions positives de l'équation

$$t^2 - pu^2 = 1.$$

On aura, en conservant les notations dont nous nous sommes servi toujours,

---

*) *Comp.* la *Zahlentheorie* de M. *Dedekind*, No. 99; M. *Poincaré, Sur la réduction simultanée d'une forme quadratique et d'une forme linéaire*, Comptes Rendus, t. XCI, p. 846.

**) Il est inutile de démontrer l'existence de déterminants ayant des exposants d'irrégularité divisibles par deux. Le déterminant 3026, cité par *Gauss*, en pourra rendre témoignage.

$$t_p + u_p\sqrt{p} = (t_1 + u_1\sqrt{p})^p.$$

En développant le second membre de cette égalité par la formule du binôme, on voit immédiatement que $\frac{u_p}{pu_1}$ et $\frac{t_p}{t_1}$ sont des nombres entiers supérieurs à l'unité et premiers à $2pt_1u_1$. Soit q_1 le plus petit des nombres premiers qui divisent u_p sans diviser $2pt_1u_1$, et q_2 le plus petit des nombres premiers qui divisent t_p sans diviser $2pt_1u_1$, et soit p^s la plus haute puissance*) de p qui divise u_1, je dis que le déterminant

$$\triangle = p^{2s+3}q_1^2q_2^2$$

aura un exposant d'irrégularité divisible par p.

En effet, en faisant $d = p^{2s+1}$, $q = q_1$, on aura $\lambda = p$, donc

$$q - \left(\frac{p}{q_1}\right) \equiv 0 \pmod{p}.$$

De même, en faisant $d = p^{2s+1}$, $q = q_2$, on aura $\lambda = 2p$, donc

$$q_2 - \left(\frac{p}{q_2}\right) \equiv 0 \pmod{2p}.$$

En faisant maintenant $d = p^{2s+3}$, $q = q_1$, on aura $\lambda = 1$ et, par conséquent le groupe Ω_1

$$(1,\ 0,\ -p^{2s+3}q_1^2),\quad (q_1^2,\ \varkappa q_1,\ \varkappa^2 - p^{2s+3})$$

ne contiendra que des formes non équivalentes qu'on pourra représenter par

$$1,\ g_1^1,\ g_1^2,\ \ldots\ g_1^{q_1-\left(\frac{p}{q_1}\right)-1}$$

où g_1 désigne une racine primitive du groupe Ω_1. De même, en faisant $d = p^{2s+3}q_2^2$, $q = q_1$, on aura le groupe de formes non équivalentes Ω_1'

$$1,\ G_1^1,\ G_1^2,\ \ldots\ G_1^{q_1-\left(\frac{p}{q_1}\right)-1}$$

dont toutes les formes pourront être considérées comme déduites des formes correspondantes du groupe Ω_1 par la multiplication des seconds et des troisièmes coefficients de ces dernières par q_2 et q_2^2 respectivement, puis par la réduction des seconds coefficients ainsi obtenus à leurs moindres valeurs non négatives**) (mod. q_1^2) et par le calcul des troisièmes coefficients en conséquence. En effet, en déduisant G_1 de g_1 par le procédé indiqué, les

*) Nous n'excluons pas le cas où l'on a $s = 0$. Il est probable que s peut avoir des valeurs supérieures à zéro; nous devons avouer que nous n'en avons pas pu trouver d'exemples.

**) On excepte la forme principale pour laquelle il n'y a aucune réduction à faire.

valeurs successives de $\varkappa$ pour les formes du groupe Ω_1' s'obtiendront à l'aide des congruences qu'on pourra considérer comme déduites des congruences analogues pour le groupe Ω_1 par la multiplication de leurs deux termes par q_1, car toutes ces congruences sont homogènes si l'on considère d comme étant de l'ordre deux par rapport à $\varkappa$.

En faisant maintenant $d = p^{2s+3}q_1^2$, $q = q_2$, on aura $\lambda = 2$, et, par conséquent, le groupe

$$(1,\ 0,\ -p^{2s+3}q_1^2q_2^2),\quad (q_2^2,\ \varkappa q_2,\ \varkappa^2-p^{2s+3}q_1^2)$$

contiendra $\dfrac{q_2-\left(\frac{p}{q_2}\right)}{2}$ formes non équivalentes qu'on pourra représenter par

$$1,\ G_2^1,\ G_2^2,\ \ldots\ G_2^{\frac{q_2-\left(\frac{p}{q_2}\right)}{2}-1}$$

où G_2 désigne une racine primitive du groupe. Nous désignerons le complexe de formes

$$1,\ G_2^1,\ G_2^2,\ \ldots\ G_2^{\frac{q_2-\left(\frac{p}{q_2}\right)}{2}-1}$$

par Ω_2'. Nous allons faire voir maintenant que les formes

$$1,\ G_1^1,\ G_1^2,\ \ldots\ G_1^{q_1-\left(\frac{p}{q_1}\right)-1},\quad G_2^1,\ G_2^2,\ \ldots\ G_2^{\frac{q_2-\left(\frac{p}{q_2}\right)}{2}-1}$$

appartiennent à des classes différentes.

Soit Ξ le complexe des représentants de toutes les classes proprement primitives du déterminant $p^{2s+3}q_1^2$, choisis de manière que leurs premiers coefficients soient premiers à q_2. On peut évidemment faire figurer dans le complexe Ξ toutes les formes du complexe Ω_1. Cela étant ainsi, déduisons un complexe de formes Ξ' du complexe Ξ en multipliant tous les seconds et les troisièmes coefficients de ce dernier complexe par q_2 et q_2^2 respectivement. Le complexe Ξ' contiendra des formes respectivement équivalentes aux suivantes

$$1,\ G_1^1,\ G_1^2,\ \ldots\ G_1^{q_1-\left(\frac{p}{q_1}\right)-1}.$$

Or on sait*) que toutes les classes proprement primitives du déterminant $\triangle$ peuvent s'obtenir par la composition de toutes les classes du complexe Ξ' avec toutes les classes du complexe Ω_2' et qu'on n'obtient de cette manière chaque classe qu'une seule fois. Des formes respectivement équivalentes

*) *Disquisitiones arithmeticae,* art. 249—256.

aux suivantes

$$1,\ G_1^1,\ G_1^2,\ \ldots\ G_1^{q_1-\left(\frac{p}{q_1}\right)-1},\ G_2^1,\ G_2^2,\ \ldots\ G_2^{\frac{q_2-\left(\frac{p}{q_2}\right)}{2}-1}$$

figureront, par conséquent, comme représentants de classes différentes, ce qui rend évident ce que nous voulons démontrer.

Cela étant ainsi, l'équivalence

$$x^p \backsim 1 \qquad (\text{det. } \triangle)$$

admettra $p+1$ racines suivantes

$$1,\ G_1^{\frac{q_1-\left(\frac{p}{q_1}\right)}{p}},\ G_1^{2\frac{q_1-\left(\frac{p}{q_1}\right)}{p}},\ \ldots\ G_1^{(p-1)\frac{q_1-\left(\frac{p}{q_1}\right)}{p}},\ G_2^{\frac{q_2-\left(\frac{p}{q_2}\right)}{2p}}.$$

Il s'ensuit que le déterminant $\triangle$ est irrégulier*) et que son exposant d'irrégularité est divisible par p.

Exemples.

Ex. I. Soit $p=3$, on aura

$$t_1 = 2, \qquad u_1 = 1,$$
$$t_3 = 26 = 2.13, \quad u_3 = 3.5;$$

donc

$$q_1 = 5, \quad q_2 = 13,$$
$$\triangle = 3^3.5^2.13 = 114075.$$

Ce déterminant a un exposant d'irrégularité divisible par trois.

Ex. II. Soit $p=5$, on aura

$$t_1 = 9 = 3^2, \qquad u_1 = 4 = 2^2,$$
$$t_5 = 930249 = 3^2.41.2521,$$
$$u_5 = 416020 = 2^2.5.11.31.61;$$

donc

$$q_1 = 11, \quad q_2 = 41,$$
$$\triangle = 5^3.11^2.41^2 = 25425125.$$

Ce déterminant a un exposant d'irrégularité divisible par cinq.

Ex. III. Soit $p=7$, on aura

$$t_1 = 8 = 2^3, \quad u_1 = 3,$$
$$t_7 = 130576328 = 2^3.29.197.2857,$$
$$u_7 = 49353213 = 3.7.13.293.617;$$

*) ou *polybase.*

donc

$$q_1 = 13, \quad q_2 = 29,$$

$$\triangle = 7^3.13^2.29^2 = 48750247.$$

Ce déterminant a un exposant d'irrégularité divisible par sept.

Ex. IV. Soit $p = 11$, on aura

$$t_1 = 10 = 2.5, \qquad u_1 = 3,$$
$$t_{11} = 99612037019890 = 2.5.89.111923637101,$$
$$u_{11} = 30034159217997 = 3.11.273569.3326861;$$

donc

$$q_1 = 273569, \quad q_2 = 89,$$

$$\triangle = 11^3.273569^2.89^2 = 7890269452345566611.$$

Ce déterminant a un exposant d'irrégularité divisible par onze.

Port-Navalo, le 19 octobre 1883.

Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste.

(Aus einem Aufsatze in No. XXIII der Sitzungsberichte der Berliner Akademie von 1884.)

(Von *L. Kronecker.*)

Bedeuten m und n positive ungrade Zahlen, und ist h eine der Zahlen $1, 2, \dots \frac{1}{2}(m-1)$, so sind in den beiden Producten:

$$\prod_k \left(\frac{h}{m} - \frac{k}{n}\right), \quad \prod_{k'} \left(\frac{h}{m} + \frac{k'}{n} - \frac{1}{2}\right) \qquad (k, k' = 1, 2, \dots \tfrac{1}{2}(n-1))$$

je zwei Factoren, für welche $k+k' = \frac{1}{2}(n+1)$ ist, von gleichem Vorzeichen, den einzigen Fall ausgenommen, in welchem eine Zahl k zwischen $\frac{nh}{m}$ und $\frac{nh}{m} + \frac{1}{2}$ liegt. Da dies dann und nur dann der Fall ist, wenn der absolut kleinste Rest von nh (mod. m) *negativ* ist, so stimmt das Vorzeichen dieses Restes in *jedem* Falle mit dem Vorzeichen des Productes jener beiden Producte überein. Es besteht daher, wenn mit h' der positive Werth des absolut kleinsten Restes von nh (mod. m) und mit $\operatorname{sgn}.a$ das Vorzeichen einer reellen Grösse a bezeichnet wird, die Congruenz:

$$nh \equiv h' \operatorname{sgn}.\prod_k \left(\frac{h}{m} - \frac{k}{n}\right)\left(\frac{h}{m} + \frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right) \pmod{m} \qquad (k = 1, 2, \dots \tfrac{1}{2}(n-1)).$$

Setzt man hierin für h die Zahlen $1, 2, \dots \frac{1}{2}(m-1)$ und multiplicirt alle daraus entstehenden Congruenzen mit einander, so kommt:

$$n^{\frac{1}{2}(m-1)} \prod_h h \equiv \prod_h h . \operatorname{sgn}.\prod_{h,k} \left(\frac{h}{m} - \frac{k}{n}\right)\left(\frac{h}{m} + \frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right) \pmod{m},$$
$$(h = 1, 2, \dots \tfrac{1}{2}(m-1);\ k = 1, 2, \dots \tfrac{1}{2}(n-1))$$

und hieraus resultirt, wenn m *Primzahl* ist, für das *Legendre*sche Zeichen $\left(\frac{n}{m}\right)$ die Gleichung:

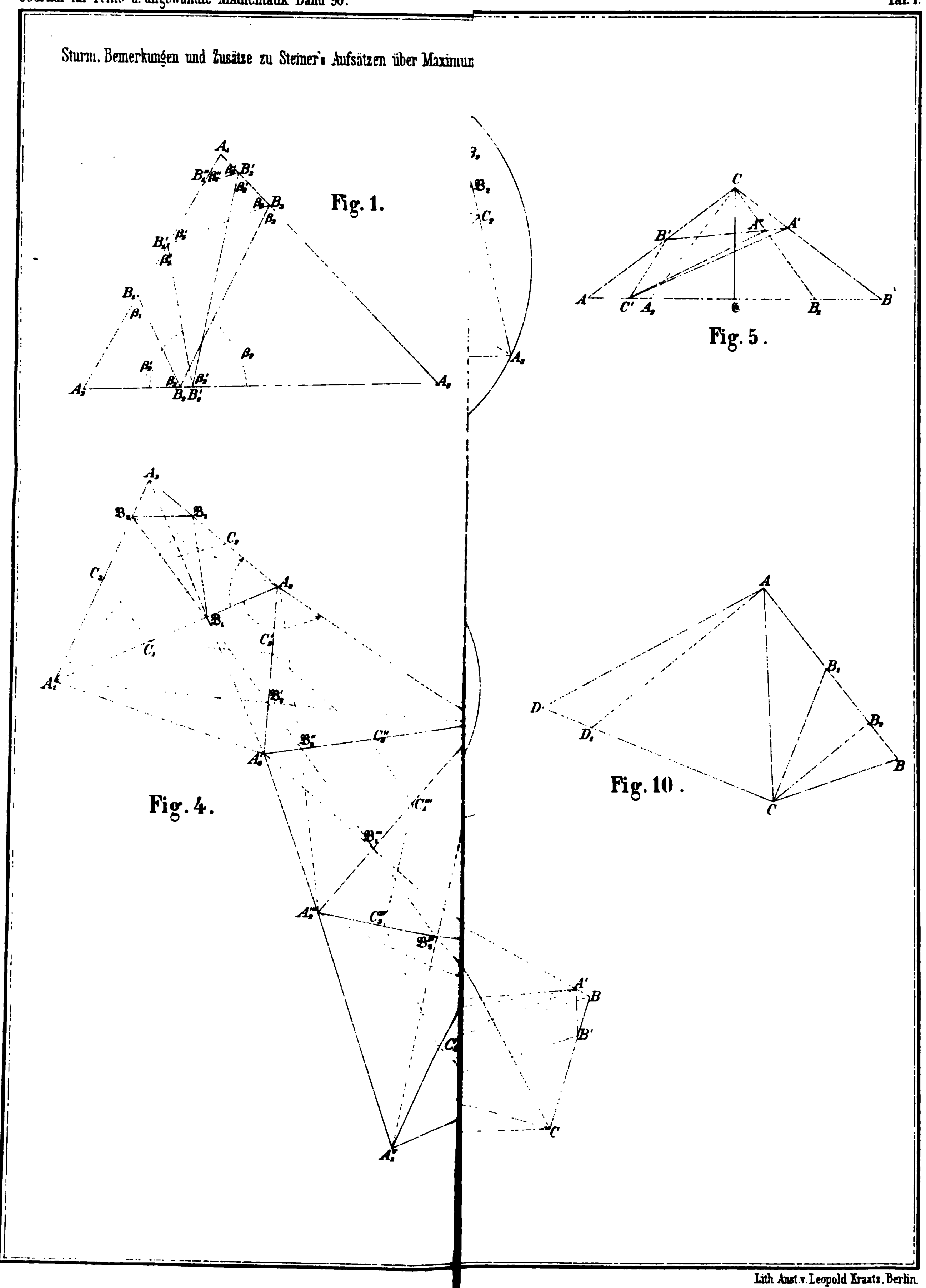
$$\left(\frac{n}{m}\right) = \operatorname{sgn}.\prod_{h,k} \left(\frac{h}{m} - \frac{k}{n}\right)\left(\frac{h}{m} + \frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right) \qquad \binom{h = 1, 2, \dots \frac{1}{2}(m-1)}{k = 1, 2, \dots \frac{1}{2}(n-1)}.$$

Bei dieser Darstellung des *Legendre*schen Zeichens tritt nun das Reciprocitätsgesetz in Evidenz; denn da, falls auch n Primzahl ist,

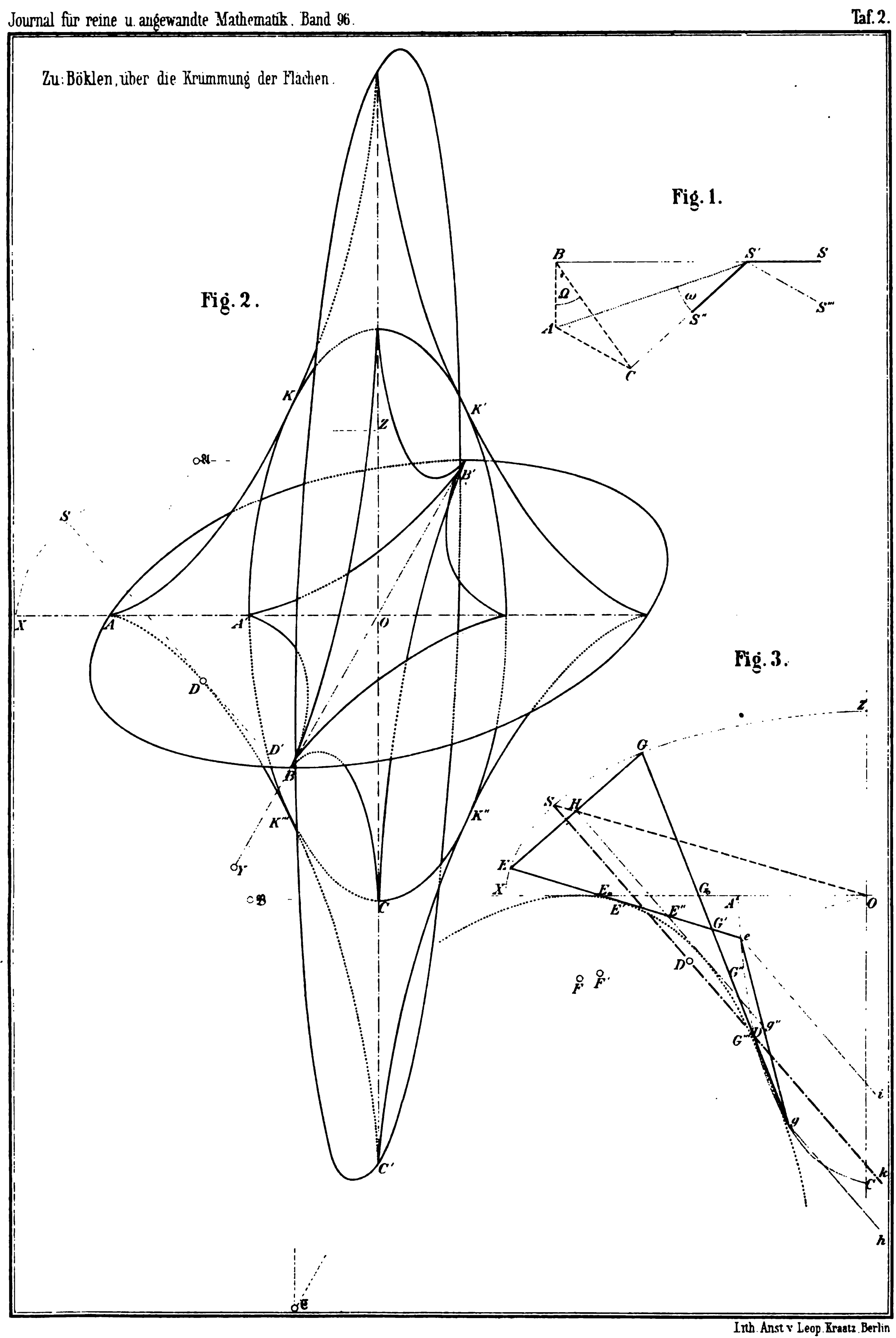
$$\left(\frac{m}{n}\right) = \operatorname{sgn}.\prod_{h,k} \left(\frac{k}{n} - \frac{h}{m}\right)\left(\frac{k}{n} + \frac{h}{m} - \frac{1}{2}\right) \qquad \binom{h = 1, 2, \dots \frac{1}{2}(m-1)}{k = 1, 2, \dots \frac{1}{2}(n-1)}$$

wird, so folgt unmittelbar die Reciprocitätsgleichung:

$$\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\frac{1}{4}(m-1)(n-1)}.$$



Lith. Anst. v. Leopold Kraatz. Berlin.



Lith. Anst. v. Leop. Kraatz, Berlin

